

Les nombres que nous croyons si familiers
semblent entretenir des liens secrets à notre insu.
En vérité, le monde des nombres regorge de soaisu.

La symétrie cachée des nombres naturels

Kenichi Takemura
Chercheur indépendant

Voici un défi mathématique ! Soient a, b, c, d, e, f, g, h huit nombres naturels tous différents les uns des autres. Est-il possible que ces huit nombres vérifient simultanément les trois égalités suivantes

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= e + f + g + h \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &= e^2 + f^2 + g^2 + h^2 \\ a^3 + b^3 + c^3 + d^3 &= e^3 + f^3 + g^3 + h^3 \end{aligned}$$

En d'autres termes : la somme des 4 nombres de gauche égale à celle des 4 nombres de droite, et cette égalité parfaite se répète pour leurs carrés, puis pour leurs cubes, le tout en même temps ! Prenez un moment, pour y réfléchir. ...

Difficile de savoir par où commencer, n'est-ce pas ? Mais nous vivons à l'ère de l'intelligence artificielle. Même sans connaissances en programmation, il suffit de soumettre ce problème à un outil d'IA avec les bonnes instructions pour obtenir, par exemple, la solution suivante

$$\begin{aligned} 2 + 8 + 15 + 9 &= 3 + 12 + 14 + 5 = 34 \\ 2^2 + 8^2 + 15^2 + 9^2 &= 3^2 + 12^2 + 14^2 + 5^2 = 374 \\ 2^3 + 8^3 + 15^3 + 9^3 &= 3^3 + 12^3 + 14^3 + 5^3 = 4624. \end{aligned}$$

Impressionnant, non?! Les sommes des puissances 1, 2 et 3 des quatre nombres de chaque groupe coïncident parfaitement. Ce type de problème est connu sous le nom de problème de Prouhet-Tarry-Escott (ou problème PTE¹). Lorsque, comme dans notre exemple, le degré k atteint $p-1$ pour des ensembles de taille p , on parle de solution idéale. La question de savoir si une telle solution idéale existe pour tout p est, à ce jour, un problème ouvert c'est-à-dire un problème que personne dans le monde mathématique n'a encore réussi à résoudre !

Définition et notation

Le nom « problème de Prouhet-Tarry-Escott » n'est pas très parlant au premier abord. Nous allons donc introduire un nouveau terme, plus évocateur : les *soaisu* (prononcé « soai-sou », où « sou » se prononce comme le « su » de sushi).

Définition : soaisu

Soient deux ensembles S_1 et S_2 , chacun contenant p entiers. Si,

- la somme des éléments de S_1 est égale à la somme des éléments de S_2 ,
 - la somme des carrés des éléments de S_1 égale la somme des carrés des éléments de S_2 ,
 - ...
 - la somme des éléments de S_1 à la puissance k égale la somme des éléments de S_2 à la puissance k ,
- alors on dit que S_1 et S_2 forment un *soaisu* p - p de force k .

Le mot japonais (soai) signifie « s'aimer mutuellement », une belle métaphore pour des nombres qui partagent leurs sommes de puissances !

1. Le nom de ce problème rend hommage à trois mathématiciens : Eugène Prouhet, qui en a été le premier chercheur au milieu du XIX^e siècle (vers 1851) ; Gaston Tarry et Edward B. Escott, qui ont chacun de leur côté construit des solutions au début du XX^e siècle. Ce problème remonte cependant à une correspondance entre Christian Goldbach et Leonhard Euler datant de 1750-1751.

Dans notre exemple (égalité des puissances 1, 2 et 3, entre deux groupes de 4 nombres), on parle de 4-4 *soaisu*♥♥♥. La force 3 du *soaisu* est ici symbolisée par les trois «♥» : plus la force est grande, plus les groupes partagent des propriétés communes.

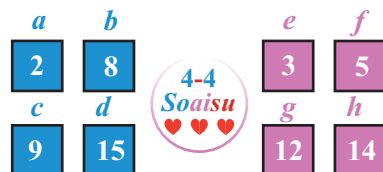


Figure 1 – 4-4 *soaisu*♥♥♥

Existe-t-il d'autres *soaisu* ?

Maintenant que nous avons trouvé un exemple de 4-4 *soaisu*♥♥♥, une question naturelle se pose :

Laquelle de ces trois possibilités est la bonne ?

A. Il n'existe qu'un seul 4-4 *soaisu*♥♥♥ soit celui que l'on vient de trouver.

B. Il en existe plusieurs (mais en nombre fini).

C. Il en existe une infinité.

Avant d'aller plus loin, quelle réponse choisiriez-vous A, B ou C et, pourquoi ?

L'objectif de cet article est non seulement de répondre clairement à cette question, mais aussi de révéler une symétrie d'une beauté surprenante, cachée au cœur des nombres naturels que nous croyions si bien connaître. Notre outil ? Un simple carré de nombres, bien connu de tous.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Figure 2 – Le carré naturel d'ordre 4

Le carré naturel d'ordre 4 est tout simplement la grille 4 × 4 dans laquelle on place les nombres de 1 à 16 dans l'ordre. Dans cette grille, les huit nombres formant notre 4-4 *soaisu*♥♥♥ occupent une position remarquable, que nous appellerons la position *soaisu* dans le carré naturel d'ordre 4.



1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Figure 3 – La position du 4-4 *soaisu*♥♥♥ dans le carré naturel d'ordre 4

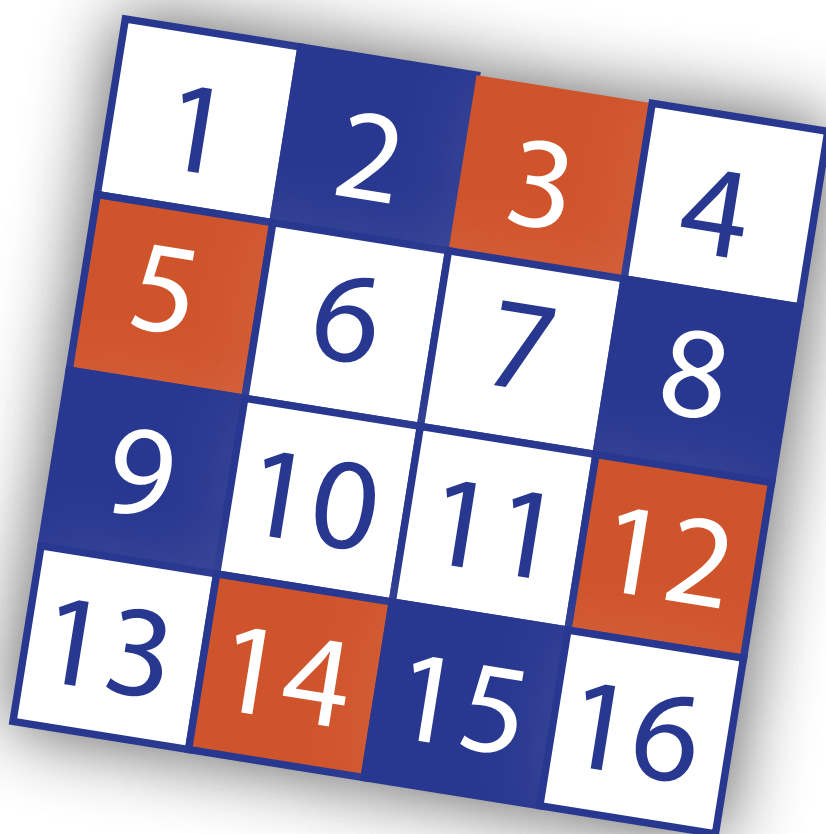
Ce qui est fascinant ici, c'est la *symétrie géométrique* de cette disposition. Les 4 cases bleues et les 4 cases roses sont arrangées de façon très ordonnée. En fait, cette formation possède des propriétés remarquables vis-à-vis du groupe diédral D_4 c'est-à-dire le groupe des huit transformations géométriques qui envoient le carré sur le carré. Ces transformations sont des rotations autour du centre du carré et des symétries par rapport à des droites :

– Rotation centrale :

Si l'on fait pivoter la grille de 90° autour de son centre, les cases bleues restent bleues et les cases roses restent roses : *chaque groupe conserve exactement sa configuration*.

– Symétrie horizontale ou verticale :

Si l'on retourne la grille de gauche à droite ou de haut en bas, les cases bleues prennent la place des roses, et inversement : *les deux groupes s'échangent*.



– Symétrie par rapport aux diagonales :

Si l'on retourne la grille selon l'une ou l'autre de ses diagonales, les cases bleues prennent également la place des roses, et inversement : *les deux groupes s'échangent*.

En d'autres termes, les nombres bleus et roses se comportent, sur le « canevas » du carré naturel d'ordre 4, comme des jumeaux : *invariants par rotation, mais interchangeables par symétrie*.

C'est cette relation géométrique magnifique qui est la clé du mystère des soaisu. Et cette structure est si robuste qu'elle ne dépend pas des nombres 1 à 16 eux-mêmes. Voyons ce qui se passe si l'on ajoute 1 à chaque case.



2	3	4	5
6	7	8	9
10	11	12	13
14	15	16	17

Figure 4

On ajoute 1 à chaque nombre de la grille

Les quatre nombres bleus et les quatre nombres roses forment encore un 4-4 soaisu ♥♥♥! Vérifions-le :

Puissance 1 :

$$3 + 9 + 10 + 16 = 38$$

$$4 + 6 + 13 + 15 = 38$$

Puissance 2

$$3^2 + 9^2 + 10^2 + 16^2$$

$$= 9 + 81 + 100 + 256 = 446$$

$$4^2 + 6^2 + 13^2 + 15^2$$

$$= 16 + 36 + 169 + 225 = 446$$

Puissance 3

$$3^3 + 9^3 + 10^3 + 16^3$$

$$= 27 + 729 + 1000 + 4096 = 5852$$

$$4^3 + 6^3 + 13^3 + 15^3$$

$$= 64 + 216 + 2197 + 3375 = 5852$$

Osons aller plus loin : que se passe-t-il si l'on ajoute un nombre quelconque n à chaque case de la grille ?



$1+n$	$2+n$	$3+n$	$4+n$
$5+n$	$6+n$	$7+n$	$8+n$
$9+n$	$10+n$	$11+n$	$12+n$
$13+n$	$14+n$	$15+n$	$16+n$

Figure 5

On ajoute n à chaque nombre de la grille

Calculons les sommes des puissances pour les quatre nombres de chaque groupe.

Puissance 1 :

$$(2 + n) + (8 + n) + (15 + n) + (9 + n) = 4n + 34$$

$$(3 + n) + (12 + n) + (14 + n) + (5 + n) = 4n + 34$$

Puissance 2 :

$$(2 + n)^2 + (8 + n)^2 + (15 + n)^2 + (9 + n)^2 = 4n^2 + 68n + 374$$

$$(3 + n)^2 + (12 + n)^2 + (14 + n)^2 + (5 + n)^2 = 4n^2 + 68n + 374$$

Puissance 3 :

$$(2 + n)^3 + (8 + n)^3 + (15 + n)^3 + (9 + n)^3 = 4n^3 + 102n^2 + 1122n + 4624$$

$$(3 + n)^3 + (12 + n)^3 + (14 + n)^3 + (5 + n)^3 = 4n^3 + 102n^2 + 1122n + 4624$$

Les deux groupes donnent toujours le même résultat. C'est la puissance de l'algèbre !

Pourquoi la force est-elle préservée par translation ?

Les vérifications directes des pages précédentes sont convaincantes, mais elles ne couvrent que les puissances 1, 2 et 3. Existe-t-il une méthode qui permettrait de voir, d'un seul coup d'œil, pourquoi l'égalité est toujours préservée ?

La réponse est « Oui » et l'outil pour s'en convaincre s'appelle le *théorème du binôme*.

Théorème : invariance par translation

Si deux ensembles B et R forment un 4-4 soaisu♡♡♡, alors les ensembles obtenus en ajoutant un même entier n à chaque élément forment également un 4-4 soaisu♡♡♡.

Plus généralement, cette propriété reste valide pour tout soaisup- p de force k quelconque.

Conclusion

Dès qu'il existe un seul 4-4 soaisu♡♡♡, on peut en engendrer une infinité d'autres en ajoutant à chacun des huit nombres un même entier n quelconque. Il existe donc une infinité de 4-4 soaisu♡♡♡. (La réponse est C!)

Remarquons que n ne doit pas nécessairement être un entier naturel : le résultat reste valide pour tout nombre réel, voire complexe.

Démonstration du théorème

Notons $B = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ (bleu) et $R = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ (rose) deux ensembles formant un 4-4 soaisu♡♡♡.

L'outil clé : le théorème du binôme.

Pour tous nombres a, n et tout entier naturel k ,

$$(a+n)^k = a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}n + \binom{k}{2}a^{k-2}n^2 + \cdots + n^k,$$

où les coefficients $\binom{k}{j}$ sont des entiers qui ne dépendent que de k et de j , et non des valeurs a_i ou b_i . Par exemple, $\binom{3}{1} = 3$ et $\binom{3}{2} = 3$.

Notation : dans la suite, nous écrivons $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ sous la forme abrégée $\sum_{i=1}^4 a_i$ (le symbole $\sum$ désigne une somme).

Étape 1 puissance 1 :

$$(a_1+n)+(a_2+n)+(a_3+n)+(a_4+n) = (a_1+a_2+a_3+a_4)+4n \\ = (b_1+b_2+b_3+b_4)+4n$$

Étape 2 puissance 2 :

D'après le théorème du binôme,

$$(a+n)^2 = a^2+2an+n^2, \text{ donc :}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 (a_i+n)^2 &= \sum_{i=1}^4 a_i^2 + 2n \sum_{i=1}^4 a_i + 4n^2 \\ &= \sum_{i=1}^4 (b_i+n)^2 \end{aligned}$$

Étape 3 puissance 3 :

De même, $(a+n)^3 = a^3 + 3a^2n + 3an^2 + n^3$, donc :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 (a_i+n)^3 &= \sum_{i=1}^4 a_i^3 + 3n \sum_{i=1}^4 a_i^2 + 3n^2 \sum_{i=1}^4 a_i + 4n^3 \\ &= \sum_{i=1}^4 (b_i+n)^3 \end{aligned}$$

Pourquoi cela fonctionne-t-il toujours ? À chaque étape, les coefficients $\binom{k}{j}$ sont identiques pour B et pour R , ils se factorisent, et l'on retrouve les sommes de puissances inférieures, déjà égales par hypothèse. C'est ce mécanisme qui garantit la préservation de la force, quelle que soit la puissance considérée.

La belle structure symétrique des *soaisu*

La disposition des cases du 4-4 *soaisu* dans le carré naturel d'ordre 4 est encore plus robuste et généreuse qu'on pourrait le croire.

Jusqu'ici, nous n'avons travaillé qu'avec des entiers naturels consécutifs, mais la magie opère bien au-delà. Il suffit que les 16 nombres placés dans la grille 4×4 soient 16 termes consécutifs d'une suite arithmétique (c'est-à-dire 16 nombres régulièrement espacés) pour que la relation *soaisu* (égalité des sommes de puissances 1, 2 et 3) soit parfaitement préservée.

Considérons par exemple la transformation $f(x) = dx + c$, où d est la raison de la suite et c une constante. Multiplier tous les nombres par d et ajouter c ne brise pas la propriété *soaisu* : le facteur d^k se factorise de chaque côté de l'égalité, qui reste donc vérifiée.



1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

Figure 6 – La propriété *soaisu* est préservée même avec les nombres impairs (raison $d = 2$)

Puissance k	Somme (bleu)	Somme (rose)	Égalité
1	64	64	Oui
2	1 364	1 364	Oui
3	32 704	32 704	Oui
4	841 508	818 468	Non

Tableau 1 Comparaison des sommes de puissances pour le 4-4 *soaisu* avec la suite arithmétique des nombres impairs

Au-delà des entiers naturels consécutifs, il suffit donc d'une structure « régulièrement espacée » pour que les *soaisu* y élisent domicile. La forêt des suites arithmétiques recèle encore bien des symétries cachées, que le lecteur curieux pourra explorer à son gré.

Pour finir, voici une dernière surprise. En contemplant l'intégralité du « canevas » que forment les nombres 1 à 16, on découvre une harmonie encore plus étonnante. Regardez la figure 7 : elle montre une partition de la grille en deux groupes très symétriques les 8 nombres sur les diagonales (en rose) et les 8 autres (en bleu).

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Figure 7 – La disposition du 8-8 *soaisu* dans le carré naturel d'ordre 4

Ces deux groupes forment un 8-8 *soaisu*, comme on le constate dans le tableau suivant.

Puissance k	Somme (bleu)	Somme (rose)	Égalité
1	68	68	Oui
2	748	748	Oui
3	9 248	9 248	Oui
4	122 692	121 156	Non

Tableau 2 – Comparaison des sommes de puissances pour le 8-8 *soaisu* (groupes diagonaux)

Les nombres de 1 à 16, les tout premiers que l'on apprend à l'école primaire, cachent une « partition parfaite », d'une beauté saisissante. Alors, la prochaine fois que tu verras une grille de nombres, regarde-la avec d'autres yeux : peut-être qu'une harmonie secrète s'y dissimule, attendant d'être découverte !

Et la notion de *soaisu* ne s'arrête pas à deux ensembles. Elle s'étend naturellement à trois groupes ou davantage, une piste fascinante, dont voici un avant-goût.

Dans le carré naturel d'ordre 6 (les nombres de 1 à 36 disposés en grille 6×6), on peut colorer les cases de trois couleurs de façon à obtenir un 12-12-12 *soaisu*♥♥♥ :

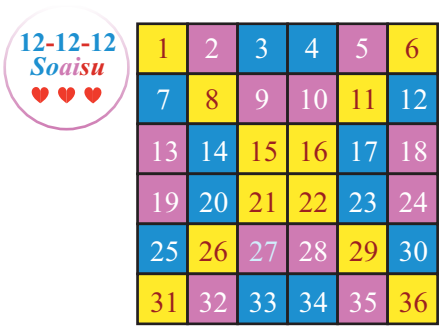


Figure 8

Les trois groupes de 12 nombres jaune, rose et bleu vérifient les égalités suivantes.

Puissance k	Somme (jaune)	Somme (bleu)	Somme (rose)	Égalité
1	222	222	222	Oui
2	5 402	5 402	5 402	Oui
3	147 852	147 852	147 852	Oui
4	4 332 326	4 308 134	4 308 134	Non

Tableau 3 - Comparaison des sommes de puissances pour le 12-12-12 *soaisu* (carré naturel d'ordre 6)

Que les nombres de 1 à 36 puissent se partager aussi harmonieusement en trois groupes – voilà qui témoigne de la profondeur des symétries cachées dans les nombres naturels. Et une question surgit naturellement : ces *soaisu* à trois ensembles résistent-ils, eux aussi, aux translations et aux suites arithmétiques ? À toi de vérifier !

Pour finir, voici peut-être la surprise la plus étonnante. On pourrait croire que la partition de la figure 8 est unique. Or il n'en est rien : les façons de colorier le carré naturel d'ordre 6 en trois groupes de 12 de manière à former un 12-12-12 *soaisu*♥♥♥ sont, contre toute intuition, fort nombreuses.

En voici trois exemples (figure 9) aux symétries bien différentes – et ce n'est là qu'un aperçu. Le nombre total de telles partitions reste, à ce jour, une question ouverte.

Dans la vaste forêt des nombres naturels, d'innombrables *soaisu* attendent encore d'être découverts...

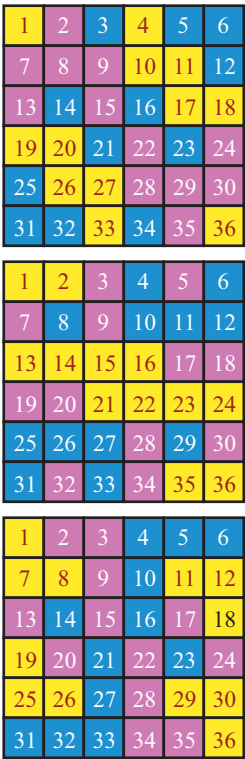


Figure 9

Trois exemples distincts de 12-12-12 *soaisu*♥♥♥ dans le carré naturel d'ordre 6. Pour chaque partition, les sommes des puissances $k = 1, 2, 3$ des douze nombres de chaque couleur coïncident parfaitement ($k=1$: 222 ; $k=2$: 5402 ; $k=3$: 147852), tandis que les sommes des puissances $k = 4$ diffèrent.