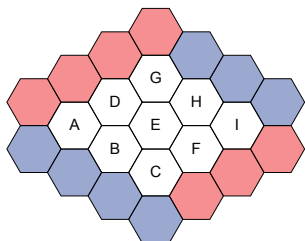


Section problèmes



Jeu de Hex

1. Dans le jeu de Hex 3x3, BLEU a une stratégie gagnante. Pour cela, BLEU doit bien jouer son premier coup. Déterminer quels sont les premiers coups possibles de la stratégie gagnante.

À propos de la diagonale du carré

1. En prenant appui sur l'incommensurabilité de la diagonale et du côté du carré, montrer que le réel $\sqrt{2}$ est irrationnel.
2. Dans le passage des *Premiers analytiques* (I.23), Aristote écrit que si on suppose la diagonale et le côté du carré commensurables, alors « un nombre impair se trouve égal à un nombre pair ».

Donner une démonstration de cette affirmation en restant le plus près possible des mathématiques de l'époque d'Aristote.

(En particulier, ne pas faire intervenir le réel $\sqrt{2}$ en tant que tel.)

3. Étant donné la figure ci-contre (voir la description dans le texte, p. 5), on veut que montrer que $A'B \cong A'D'$.

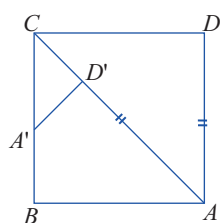


Figure pour les problèmes 3 et 4
(Diagonale du carré)

- a) Démontrer ce résultat en considérant le segment BD' .
- b) Reprendre le problème en vous appuyant cette fois sur le segment AA' .
- c) Reprendre à nouveau le problème par *pliage* : plier le coin inférieur gauche du carré de manière à superposer le côté AB sur la diagonale AC .

4. Soit c' , la longueur du côté CD' du carré $A'B'CD'$.

- a) Montrer que $c' < c/2$, où c est la longueur du côté du carré initial.

Tuyau : Considérer l'hypoténuse du triangle rectangle $A'CD'$.

- b) En conclure que les carrés « à la Chrystal » deviennent arbitrairement petits.



Figure pour le problème 1
(Symétrie cachée)

Carré naturel et carré magique parfait

1. Nous avons utilisé la formule

$$0 + 1 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Démontrer ce résultat comme le jeune Gauss l'aurait fait instantanément.

Indice : Écrivez la même somme dans l'ordre inverse et additionnez les deux lignes !

Le Lotto 6/49

1. Supposons que l'on imprime et vende n séries complètes de billets Lotto 6/49, soit 13 983 816 x n billets au total.
 - a) Calculer les lots pour les configurations 6/6, 5/6+, 5/6 et 4/6.
 - b) Pour quelle valeur entière de n est-il préférable de gagner le lot 5/6+ plutôt que le 6/6.

La symétrie cachée des nombres naturels

1. Les ensembles $A = \{4, 6, 15, 17, 23\}$

et $B = \{3, 9, 11, 20, 22\}$ forment un 5-5 soaisu ♥♥♥♥ de force 4, c'est-à-dire que pour tout entier $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ on a

$$\sum_{i=1}^5 a_i^k = \sum_{i=1}^5 b_i^k.$$

(l'égalité n'est pas vérifiée pour $k=5$).

Montrer qu'en ajoutant un même entier n à chaque élément, les deux nouveaux ensembles $A' = \{a_i + n\}$ et $B' = \{b_i + n\}$ forment également un 5-5 soaisu ♥♥♥♥ de force 4, c'est-à-dire que pour tout $k \in \{1, 2, 3, 4\}$,

$$\sum_{i=1}^5 (a_i + n)^k = \sum_{i=1}^5 (b_i + n)^k.$$

Indication : Développez $(a_i + n)^k$ à l'aide du théorème du binôme, summez sur $i = 1, \dots, 5$, et observez que chaque coefficient binomial

$$\binom{k}{j}$$

est le même pour A et pour B .