

*Le Lotto 6/49 fait rêver, intrigue et souvent déçoit.
Si certains billets valent des millions, la vaste majorité n'offrent
aucun retour. Entre promesse de richesse et lois des probabilités,
quelles sont les chances exactes de gagner
— et combien vaut réellement un billet joué?*

LE LOTTO 6/49

Christian Genest
Université McGill

Samuel Valiquette
Université de Sherbrooke

Inauguré le 12 juin 1982, le Lotto 6/49 est une loterie pancanadienne administrée par la Société de la loterie interprovinciale (SLI), dont le siège social est situé à Toronto. Cette loterie fut la première au pays à permettre la sélection des numéros figurant sur le billet. De ce fait, elle a vite gagné en popularité et jouit encore aujourd'hui d'un grand engouement.

Pour la modique somme de 3 \$, toute personne ayant l'âge légal requis (18 ans au Québec, 19 ans dans quelques autres provinces ou territoires) peut acheter une participation pour le tirage du mercredi ou du samedi. Un billet est composé de six numéros distincts entre 1 et 49, d'où le nom de la loterie. La sélection peut être effectuée manuellement ou de façon automatique.

Structure des lots

Lors du tirage, la SLI choisit aléatoirement six numéros distincts dans l'ensemble $\{1, \dots, 49\}$. Ces six numéros constituent la « combinaison gagnante ». Puis, un « numéro complémentaire » est sélectionné parmi les 43 numéros restants. La personne détenant un billet sur lequel figure la combinaison gagnante remporte le gros lot, d'une valeur de 5 millions de dollars. Si plusieurs billets se qualifient, la somme est partagée équitablement entre leurs propriétaires.

Divers autres lots sont offerts, selon le nombre de numéros qu'un billet a en commun avec la combinaison gagnante ou avec le numéro complémentaire. La structure des lots est décrite plus précisément au tableau 1. Dans ce tableau, la configuration 5/6 désigne un billet dont cinq des six numéros font partie de la combinaison gagnante, tandis que la configuration 5/6+ indique qu'en plus de ces cinq numéros, le sixième corres-

pond au numéro complémentaire. Les autres configurations énumérées dans le tableau s'interprètent de façon analogue.

Tel qu'indiqué au tableau 1, les lots correspondant aux configurations 3/6, 2/6+ et 2/6 sont fixés à l'avance. Dans les autres cas, l'expression « Part de... » signifie que le montant est divisé entre l'ensemble des personnes détenant des billets répondant à la configuration en question. Les gains correspondants varient donc d'un tirage à l'autre et dépendent d'une « cagnotte », dont la valeur est déterminée en fonction du volume des ventes.

Tableau 1 Structure des lots du 6/49	
Configuration	Lot
6/6	Part de 5 000 000 \$
5/6+	Part de 32,15% de la cagnotte
5/6	Part de 13,5% de la cagnotte
4/6	Part de 54,35% de la cagnotte
3/6	10 \$
2/6+	5 \$
2/6	Participation gratuite

Pour chaque billet vendu, une somme de 3 \$ est perçue par la SLI, qui retient 1,44 \$ pour le financement des différents lots et verse le reste à l'État. De cette retenue, un montant de 0,89 \$ est alloué au gros lot ainsi qu'au tirage de « la boule d'or », dont il ne sera pas question dans cet article. Le reste, soit 0,55 \$, est versé à un « fonds de lots », duquel on commence par soustraire les sommes à payer pour les configurations 3/6, 2/6+ et 2/6, c'est-à-dire :

- le nombre de billets gagnants pour la configuration 3/6, multiplié par 10 \$;
- le nombre de billets gagnants pour la configuration 2/6+, multiplié par 5 \$;
- le nombre de billets gagnants pour la configuration 2/6, multiplié par 1,44 \$, ce qui correspond aux participations gratuites.

Le solde constitue la cagnotte, qui est répartie entre les lots correspondants aux configurations 5/6+, 5/6 et 4/6, selon les pourcentages précisés au tableau 1. Au final, les lots associés à ces trois configurations constituent donc des variables aléatoires qui dépendent du volume des ventes et du nombre de billets primés dans chacune des catégories, à l'exception du gros lot.

Questions d'intérêt

Au vu des modalités du Lotto 6/49, deux questions importantes se posent, tant pour la clientèle que pour la SLI, qui gère la loterie :

- Quelles sont les probabilités d'obtenir les divers lots ?
- Quelle est l'espérance de gain associée à l'achat d'une participation ?

Ces deux questions seront examinées ci-dessous. Comme on le verra, les calculs requis sont suffisamment simples pour être accessibles à un jeune public et se prêter à une discussion en classe.

La probabilité de gagner le gros lot

La probabilité la plus facile à calculer est celle de remporter le gros lot. Pour ce faire, on suppose que tous les éléments de l'ensemble $\{1, \dots, 49\}$ ont la même probabilité d'être sélectionnés. Le réalisme de ce postulat, adopté dans l'ensemble des calculs, sera discuté à la fin de l'article.

Pour remporter le gros lot, il faut sélectionner au hasard le bon sous-ensemble de six numéros parmi les entiers 1 à 49. Le nombre de façons de choisir successivement six numéros est donné par le produit $49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44 = 10\,068\,347\,520$. Toutefois, comme l'ordre de sélection n'a pas d'importance, il convient de diviser ce nombre par celui des permutations possibles des six numéros sélectionnés, soit $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$. Le nombre de sous-ensembles ou « combinaisons » possibles est donc $10\,068\,347\,520 / 720 = 13\,983\,816$, de sorte que

$$\Pr(\text{gagner le lot 6/6}) = \frac{1}{13\,983\,816} \approx 7,15 \times 10^{-8}.$$

Cette probabilité est infime, comme on peut l'illustrer de différentes manières. Voici deux exemples, qui semblent appropriés pour des situations d'apprentissage et d'évaluation en classe.

- Lorsqu'une pièce de monnaie de 2 \$ est lancée, la probabilité d'obtenir « pile » est de $\frac{1}{2}$. Si la pièce est lancée deux fois de manière indépendante, la probabilité d'obtenir pile deux fois est alors $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$. À combien de lancers de pile consécutifs une probabilité de $7,15 \times 10^{-8}$ correspond-elle? Autrement dit, pour quel entier n a-t-on à peu près $2^n = 13\,983\,816$? Réponse : entre $n=23$ et $n=24$, puisque $2^{23} = 8\,388\,608$ et $2^{24} = 16\,777\,216$. [Pour le public averti : $\log_2(13\,983\,816) \approx 23,74$]



2. Le diamètre d'une pièce canadienne de 2\$ est de 28 mm. Supposons que des pièces de 2\$ soient alignées à la queue leu leu le long d'une route. Quelle doit être la longueur de cette chaîne de pièces pour que la probabilité de choisir la bonne soit la même que celle de remporter le gros lot du Lotto 6/49 ? Réponse : environ 391,55 km, soit un peu moins que la distance Québec / Baie-Comeau !

Une fois que l'on prend conscience du caractère extrêmement improbable de cet événement, on est tenté de se demander pourquoi, malgré tout, le gros lot est si souvent remporté. La raison est simple : des billets sont achetés en très grand nombre pour chacun des tirages !

Par ailleurs, il existe une différence fondamentale entre la probabilité qu'une personne donnée remporte le gros lot et celle que le gros lot soit remporté par quelqu'un. Pour mieux illustrer cette distinction, supposons un instant que, plutôt que de laisser aux gens le choix des combinaisons, la SLI imprime trois séries complètes de billets, soit 41 951 448 au total. Ce nombre correspond à peu près à la population actuelle du Canada. Si chaque personne résidant au pays détenait un billet, indépendamment de son âge ou de toute autre considération, le gros lot serait forcément remporté et partagé en trois. [Les personnes détentrices de la combinaison 1, 2, 3, 4, 5, 6 auraient sans doute l'impression de n'avoir pratiquement aucune chance de gagner, non ?]

Bien sûr, la certitude d'avoir exactement trois bénéficiaires du gros lot s'estompe quand on laisse la sélection des numéros au libre arbitre. Toutefois, le raisonnement demeure valable en moyenne. Autrement dit, on s'attendrait à ce qu'environ trois billets se partagent le gros lot, bien que la probabilité qu'un billet spécifique remporte le gros lot reste la même qu'avant.

La probabilité de gagner d'autres lots

Pour calculer la probabilité des autres lots du Lotto 6/49, il faut avoir recours aux concepts mathématiques de factorielle et de coefficient binomial. Pour tout entier n , on appelle « la factorielle de n » le produit $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$. Par exemple,

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720,$$

comme on l'a déjà calculé plus haut. Le nombre de façons de choisir k objets parmi n sans tenir compte de l'ordre est alors donné par le coefficient binomial

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

En particulier, le coefficient $C_{49}^6 = 13\,983\,816$ donne le nombre de façons de former un sous-ensemble de taille 6 à partir de l'ensemble $\{1, \dots, 49\}$; c'est ce que l'on appelle, en jargon probabiliste, le « nombre de cas possibles ». Par ailleurs, le coefficient $C_6^6 = 1$ représente la seule façon de piger les six numéros de la combinaison gagnante ; c'est le « nombre de cas favorables ». Le rapport de ces deux entiers donne la probabilité de gagner le gros lot, soit

$$\Pr(\text{gagner le lot 6/6}) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{C_6^6}{C_{49}^6} \\ &= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44} \\ &= \frac{1}{13\,983\,816}. \end{aligned}$$

Les probabilités de gain associées aux différents lots du 6/49 sont rapportées au tableau 2. De toute évidence, le nombre de cas possibles est toujours le même, soit C_{49}^6 , puisqu'un billet est composé de six numéros. Seul le nombre de cas favorables varie. Pour remporter le lot correspondant à la configuration 2/6+, par exemple, il faut choisir exactement deux des six numéros de la combinaison gagnante, piger ensuite le numéro complémentaire et compléter la sélection au moyen de trois numéros pris parmi les 42 numéros restants. On trouve ainsi

$\Pr(\text{gagner le lot } 2/6+) =$

$$= \frac{C_6^2 C_1^1 C_{42}^3}{C_{49}^6}$$

$$= \frac{172\,200}{13\,983\,816} \approx 1,2 \times 10^{-2}.$$

Au total, la probabilité de gagner quelque chose, ne fût-ce qu'une participation gratuite, s'élève à $2\,111\,774/13\,983\,816$, soit environ 15,1 %. En effet, il est justifié de cumuler ici tous les cas favorables, parce que les sept différentes façons de remporter un lot sont mutuellement exclusives. Le nombre de tirages moyen pour un gain quelconque est donc de l'ordre de $1/0,151\,662$, soit un peu plus d'une fois par mois pour les gens qui achètent un billet par tirage. C'est suffisant, peut-on supposer, pour entretenir ou stimuler l'intérêt de la clientèle...

Tableau 2 Probabilités de gain des divers lots du 6/49		
Configuration	Probabilité	Nombre de cas favorables
6/6	$p_6 = 1/C_{49}^6$	1
5/6+	$p_{5+} = C_6^5 C_1^1 / C_{49}^6$	6
5/6	$p_5 = C_6^5 C_{42}^1 / C_{49}^6$	252
4/6	$p_4 = C_6^4 C_{43}^2 / C_{49}^6$	13 545
3/6	$p_3 = C_6^3 C_{43}^3 / C_{49}^6$	246 820
2/6+	$p_{2+} = C_6^2 C_1^1 C_{42}^3 / C_{49}^6$	172 200
2/6	$p_2 = C_6^2 C_{42}^4 / C_{49}^6$	1 678 950

Espérance de gain

La seconde question qui se pose est celle du gain moyen. Elle serait rapidement expédiée s'il n'y avait qu'une seule façon de gagner : la configuration 6/6. En effet, puisqu'une participation coûte 3 \$ et que le gros lot s'élève à 5 millions de dollars, l'espérance du gain serait alors égale à

$$-3 \$ + p_6 \times 5\,000\,000 \$ \approx -2,64 \$,$$

où $p_6 = 1/13\,983\,816$, tel qu'indiqué au tableau 2. Ce calcul suppose évidemment qu'il n'y ait qu'une seule participation gagnante, comme on le fera systématiquement dans la suite. Par conséquent, l'achat d'un billet représente en moyenne un débours net de 2,64 \$. On peut le voir comme un don à l'État, en échange du rêve d'une vie transformée dans l'éventualité où l'on remporterait le

gros lot. Cette pratique n'est pas forcément néfaste à court terme, dans la mesure où l'on peut se le permettre sans développer une dépendance au jeu.

Cependant, le calcul du gain moyen – ou plutôt de la perte moyenne – est rendu plus compliqué par la structure de lots plus complexe du Lotto 6/49 déjà mentionnée, et surtout par le fait que la configuration 2/6 donne droit à une participation gratuite, ce qui engendre une récursion. En effet, si on dénote par la lettre grecque μ le lot moyen, on a alors

$$\mu = 5\,000\,000 p_6 + \mu_{5+} p_{5+} + \mu_5 p_5 + \mu_4 p_4 + 10 p_3 + 5 p_{2+} + \mu p_2. \quad (1)$$

Dans cette équation, les constantes μ_{5+} , μ_5 et μ_4 représentent les lots moyens associés aux configurations 5/6+, 5/6 et 4/6. Comme elles dépendent du volume des ventes, ces constantes varient d'un tirage à l'autre. Toutefois, le site d'Atlantic Lottery, partenaire de la SLI, permet de les estimer de la façon suivante :

$$\mu_{5+} = 104\,177 \$, \mu_5 = 1\,042 \$, \mu_4 = 78 \$.$$

Par simple substitution dans l'équation (1), on peut isoler la valeur de μ , qui est à peu près égale à 0,83 \$. Par conséquent, la perte moyenne s'élève à environ $3 \$ - 0,83 \$ = 2,17 \$$, en supposant toujours qu'il n'y ait qu'une seule participation gagnante par configuration autre que 2/6.

Un calcul plus précis est difficile à effectuer sans données détaillées, car il devrait tenir compte de la possibilité de doublons et des fluctuations du volume des ventes, qui sont susceptibles de varier selon la saison et la taille des lots. En toute justice, il faudrait aussi intégrer au calcul les modalités de la « boule d'or », mais celles-ci sont trop complexes pour être traitées ici.

Retour sur le postulat d'équiprobabilité

Pour que les calculs présentés ci-haut soient valables, il faut bien entendu que toutes les combinaisons soient équiprobables. Autrement dit, tous les numéros entre 1 et 49 doivent avoir la même probabilité d'être sélectionnés lors du tirage. Au vu de la figure 1, il semble bien que ce soit le cas : l'histogramme qui y est présenté indique la fréquence historique d'apparition des numéros entre 1 et 49, en date du 31 décembre 2025. Ceci représente un échantillon de taille 4 377, puisque les tirages du mercredi n'ont commencé qu'en septembre 1985.

L'histogramme de la figure 1 met certes en évidence de légères variations dans la fréquence d'apparition des 49 numéros ; à titre d'exemple, en date du 31 décembre 2025, c'est le 45 qui avait été pigé le plus souvent et, à l'inverse, le 14 qui avait été tiré le moins souvent. C'est pour cette raison que l'un et l'autre sont souvent présentés sur Internet comme les « plus chanceux » : l'un parce

qu'il est souvent sélectionné, l'autre parce que l'on estime qu'il devrait bientôt l'être...

De telles croyances relèvent toutefois de la pure superstition, car les écarts observés entre les fréquences d'apparition des différents numéros ne sont pas statistiquement significatifs, comme divers tests d'adéquation permettent de le vérifier. À ce sujet, on pourra se reporter à un article de Genest, Lockhart et Stephens (2002) rédigé en anglais.

Il en va de même de la croyance selon laquelle les participations achetées le mercredi ou le vendredi seraient plus susceptibles d'être gagnantes. On constate en effet que, parmi les billets gagnants, nombreux sont ceux qui ont été achetés ces jours-là. Toutefois, cette observation s'explique par un biais d'échantillonnage : les jours où davantage de billets sont vendus sont forcément ceux où l'on observe le plus de billets gagnants.

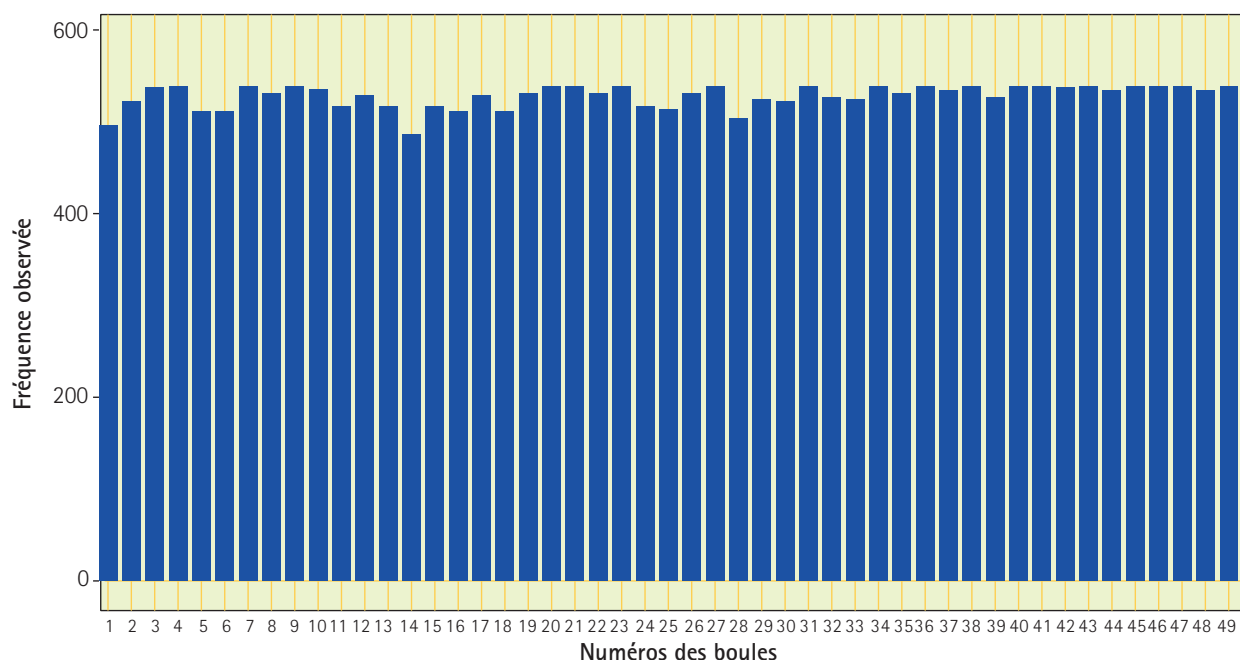


Figure 1.

Fréquence observée de sélection des 49 numéros du Lotto 6/49 lors des 4 377 tirages réalisés entre le 12 juin 1982 et le 31 décembre 2025.

Une stratégie payante ?

Dans la « Rubrique des paradoxes » parue à l'automne 2023 dans les pages d'*Accromath*, Jean-Paul Delahaye proposait l'énigme suivante : existe-t-il une — ou plusieurs — combinaisons plus favorables que d'autres pour les personnes qui achètent des billets de loterie ?

La réponse, révélée dans sa rubrique suivante, est on ne peut plus simple : il faut s'assurer de sélectionner une combinaison que personne d'autre ne choisira. On s'assure ainsi qu'en cas de gain, le lot ne sera pas partagé. Cela dit, cet objectif est plus facile à formuler qu'à atteindre, puisqu'il dépend des préférences de la clientèle en matière de choix de numéros, à propos desquelles on sait peu de choses, du moins au Canada.

Rempporter le gros lot rend-il heureux ?

Pas nécessairement, si l'on se fie aux tribulations d'une famille montréalaise qui, le 2 avril 1986, a remporté un gros lot de 7 650 267 \$ au Lotto 6/49 (le gros lot n'est plafonné à 5 millions que depuis le 14 septembre 2022). Après qu'un certain William Murphy eut retrouvé et restitué à Jean-Guy Lavigueur son portefeuille perdu, dans lequel se trouvait le billet gagnant, ce dernier partagea le gros lot avec le bon samaritain ainsi qu'avec trois de ses enfants et le frère de son épouse décédée, tous codétenteurs du billet. La seule membre de la famille n'ayant pas participé à l'achat, Louise — alors mineure — a par la suite intenté des poursuites dans l'espoir d'obtenir une part du butin. De nombreux déboires s'ensuivirent, parmi lesquels un suicide, comme le rapporte Yve Lavigueur (2007) dans un livre. Cette saga a aussi fait l'objet d'une mini-série en six épisodes, réalisée par Sylvain Archambault et diffusée sur les ondes de Radio-Canada en 2008.

Conclusion

Que retenir de cet article ? Qu'en gros, jouer au Lotto 6/49 revient à déposer une pièce de 2 \$ au bord d'une route en espérant qu'elle sera l'heureuse élue parmi toutes celles disposées à la queue leu leu par des millions de personnes sur près de 400 km... À défaut de quoi, la pièce est perdue. C'est un pari risqué, mais les pertes sont limitées à condition de contrôler son ardeur au jeu. Par ailleurs, on peut se consoler en pensant que les « profits » de Loto-Québec et de ses partenaires de la SLI sont réinvestis par l'État dans les programmes sociaux. Au final, cette loterie est donc une forme de taxe volontaire, assortie d'un espoir de gain qui fait rêver.

Quand tout le monde remporte le gros lot...

Dans le film « Bruce le tout-puissant », sorti en 2003, un journaliste de Buffalo (Jim Carrey) se voit confier par Dieu (Morgan Freeman) la charge de gouverner l'univers pendant une semaine. Appelé à examiner toutes les prières formulées par les mortels, qu'il reçoit sous forme de courriels, Bruce devient exaspéré par la tâche et, un soir, les exauce toutes sans se pencher sur leur contenu. À son réveil, le lendemain matin, il découvre que des milliers de gens ont remporté le gros lot à la loterie, empochant ainsi la coquette somme de... 17 \$ chacun. Sans parler de toutes les équipes sportives professionnelles qui ont fait match nul, de façon à contenter tout le monde !