

À propos de la diagonale du carré : une démarche à saveur antique

Regards sur un résultat géométrique bien familier à l'époque de la Grèce antique, en prenant appui sur une démarche tout à fait dans l'esprit du temps. Mais le raisonnement présenté ici ne semble pourtant pas se retrouver tel quel dans les écrits des mathématiciens de l'Antiquité.

Bernard R. Hodgson
Université Laval

Le thème central de ce texte porte sur le rapport, dans un carré, de la diagonale au côté. En termes modernes, il sera donc question ici (*n'est-ce pas ?*) de l'irrationalité du célèbre nombre réel $\sqrt{2}$. Mais ce n'est pas ainsi que l'on s'exprimait dans les temps anciens : on parlait alors plutôt de l'*incommensurabilité de la diagonale et du côté du carré*. On lit en effet ce qui suit chez le philosophe grec Aristote (-384 – -322) – *Premiers Analytiques*, I.23 –, alors qu'il présente une forme de déduction menant à une « conséquence impossible », c'est-à-dire la méthode de démonstration aujourd'hui appelée *preuve par contradiction* :

« Par exemple, on établit que la diagonale¹ est incommensurable² parce qu'une fois qu'on a supposé qu'elle est commensurable, un nombre impair se trouve égal à un nombre pair. »³

On aura noté qu'Aristote tient ici pour bien connue chez son lecteur l'application de l'incommensurabilité au cas du carré, de même que l'argument permettant d'établir cette propriété (y compris le rôle qu'y joue la dichotomie pair/impair) : il ne fait, en effet, que mentionner en passant ce cas de figure, le citant tout bonnement comme un exemple type de raisonnement par contradiction.

1. Sous-entendu : du carré.

2. Sous-entendu : avec le côté.

3. Tiré de Michel Crubellier, Aristote: Premiers Analytiques. (Flammarion, 2014, p. 117). Pour le texte original grec (avec traduction en anglais), voir Ivor Thomas, *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics*, vol. I: From Thales to Euclid. Harvard University Press, 1991, pp. 110-111.

Deux notions fondamentales

Pour bien comprendre le commentaire précédent d'Aristote, il faut tout d'abord rappeler deux notions de base bien présentes chez les mathématiciens de l'Antiquité grecque et qui jouent un rôle clé dans la suite de ce texte : le fait qu'un segment de droite donné mesure un deuxième segment, et l'idée de *commensurabilité* de deux segments de droite donnés. (Voir l'encadré *Des définitions de base*.)

Par exemple, le segment de longueur x mesure le segment de longueur y ($y = 5x$), mais pas celui de longueur z . À noter que rien n'empêche a priori qu'il puisse exister un certain segment, disons de longueur x' , qui soit

Des définitions de base

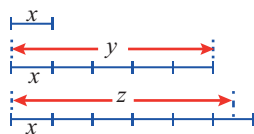
Étant donné un segment de longueur x , on dira qu'il mesure un segment de longueur y si, en le juxtaposant à lui-même⁴ un certain nombre de fois, on en vient à recouvrir exactement le deuxième segment. Dans un tel cas, il existe donc un entier naturel k (non nul) tel que $y = k \times x$. Le segment de longueur x est dit une *mesure commune* de deux segments de longueur respective y et z s'il mesure chacun de ces deux segments.

Lorsque deux segments possèdent une mesure commune, on dira qu'ils sont *commensurables*.⁵ Et s'il n'existe pas de telle mesure commune, ils sont *incommensurables*.

4. C'est-à-dire en l'« additionnant » à lui-même, si on préfère.

5. Le terme commensurable dérive du latin *mensura*, « mesure », et renvoie donc explicitement à l'idée d'une « commune mesure » de deux segments donnés.

une mesure commune des deux segments en cause, auquel cas ces segments seraient de ce fait commensurables (mais cela, pas en vertu de la mesure x).



Ce vocabulaire permet d'énoncer clairement et succinctement le résultat central du présent texte :

dans tout carré, la diagonale et le côté sont incommensurables.

C'est là précisément ce dont parle Aristote dans le passage cité plus haut. La suite de ce texte propose une démarche dans l'esprit des mathématiques de la Grèce antique permettant d'établir ce fait.

Une construction auxiliaire élémentaire

Introduisons tout d'abord une figure géométrique élémentaire sur laquelle prend appui cette démarche. Les différentes étapes de sa construction reposent toutes sur des faits mathématiques bien connus dans l'Antiquité. Mais pour autant que je sache, la figure en cause ici ne se retrouve pas telle quelle dans les textes anciens : sa toute première publication semble être dans un livre du mathématicien écossais George Chrystal (1851–1911). (Voir à ce sujet l'encadré À propos de la construction de Chrystal.)

La construction de Chrystal démarre avec un carré $ABCD$ quelconque. Considérant la diagonale AC , on y détermine le point D' tel que $AD' \cong AD$, puis on trace la perpendiculaire à AC passant par D' , obtenant ainsi le point A' à l'intersection avec le côté BC .

On vérifie aisément que le triangle $A'CD'$ est non seulement rectangle (et d'hypoténuse $A'C$), mais aussi isocèle. En effet, l'angle $\angle A'CD'$, déterminé par AC , vaut la moitié d'un angle droit, de sorte qu'il en est de même de l'angle $\angle CA'D'$ (en raison de la somme des angles d'un triangle).

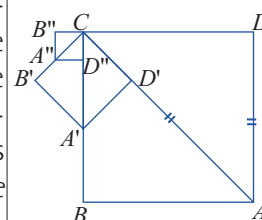
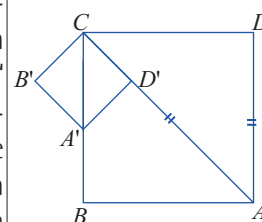
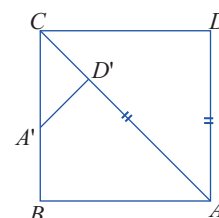
On est donc en présence d'un demi-carré ! Introduisons alors le point B' permettant de tracer le carré $A'B'CD'$.

Voilà donc la structure de base de l'approche de Chrystal. La même construction peut maintenant être effectuée sur ce dernier carré. On obtient de la sorte le point D'' sur sa diagonale $A'C$ — on a maintenant $A'D'' \cong A'D'$ —, puis élevant à nouveau une perpendiculaire, le point A'' sur le côté $B'C$. Comme précédemment, le triangle $A''CD''$ est à la fois rectangle et isocèle, ce qui mène à un nouveau carré $A''B''CD''$.

On pourrait bien sûr reprendre la même procédure avec le point D''' (situé sur la diagonale $A''C$), etc. On est donc ici en présence d'une construction pouvant être répétée indéfiniment, menant de la sorte à des carrés de plus en plus petits ! (Voir l'encadré *Une famille de carrés qui rapetissent vigoureusement* !)



George Chrystal
1851-1911



À propos de la construction de Chrystal

La plus ancienne mention de la construction géométrique présentée ici se retrouve, à ma connaissance, dans un traité d'algèbre bien connu datant de la fin du 19^e siècle, le célèbre *Algebra: An Elementary Text-Book for the Higher Classes of Secondary Schools and for Colleges* de George Chrystal, manuel publié pour la première fois en 1886 mais qui a connu de nombreuses rééditions au fil des décennies.⁶ Chrystal introduit sa construction dans un chapitre portant sur les notions de rapport et de proportion : il applique alors les résultats qu'il vient tout juste de développer

au cas de l'incommensurabilité dans le carré.

Dans leur présentation de ce résultat, Hans Rademacher et Otto Toeplitz (voir le *Pour en savoir plus*) écrivent : « Il ne faut pas chercher [cette] démonstration dans les travaux des mathématiciens grecs mais elle est bien du genre de celles qu'ils ont données et ils ont pu la connaître. » (p. 213)

6. Voir par exemple : *Algebra: An Elementary Text-Book for the Higher Classes of Secondary Schools and for Colleges*, Part I, (1964), New York : Chelsea Publishing Company.

Une famille de carrés qui rapetissent vigoureusement !

Nous désignons par c et d la longueur respectivement du côté et de la diagonale du carré initial $ABCD$, et de même pour c' et d' pour le carré $A'B'CD'$. Un fait de base en géométrie élémentaire, connu sous le nom d'*inégalité triangulaire*, stipule que dans tout triangle, la longueur d'un de ses côtés est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés. Ce résultat (proposition 20 du Livre I des *Éléments* d'Euclide) renvoie tout bonnement à l'idée que la ligne droite est le plus court chemin entre deux points.

Appliquant l'inégalité triangulaire au triangle ACD , on obtient ainsi que $c + c' > d$, c'est-à-dire $c' > d - c$. Or en vertu de notre construction même, la longueur $d - c$ peut être lue comme correspondant au côté CD'

du second carré, et donc à c' . Il s'ensuit alors que $c > c'$.

Le même raisonnement pourrait être repris à partir du carré $A'B'CD'$, obtenant ainsi des carrés dont les côtés décroissent sans fin :

$$c > c' > c'' > c''' > \dots$$

Mais il y a plus : on peut même montrer que la longueur de ces côtés successifs tend vers 0 et que les carrés deviennent ainsi aussi petits que l'on souhaite. Cette observation cruciale découle du fait que $c' < c/2$. (voir la *Section problèmes*). Le côté du carré $A'B'CD'$ est donc de longueur moindre que la moitié du côté du carré initial, et ce phénomène se répète bien sûr en passant d'un carré au suivant.

C'est sur cette famille de carrés qui se rapetissent sans limite que s'appuie Chrystal pour son argument d'incommensurabilité dans le carré.

L'arithmétique des diagonales et des côtés

Revenons au passage du carré initial $ABCD$ à $A'B'CD'$, le premier carré construit à la Chrystal. Il semble pertinent de bien situer ce nouveau carré en termes du carré $ABCD$, tant en ce qui concerne son côté (disons $A'D'$) que sa diagonale $A'C$. Or pour le côté, on sait déjà que $A'D' \equiv CD'$. Pour ce qui est de la diagonale $A'C$, il est utile de porter notre attention sur le segment $A'B$. Et on peut aisément montrer que

$$A'B \equiv A'D' \quad (*)$$

(voir la *Section Problèmes*). Le nouveau carré $A'B'CD'$ présente donc une structure qui semble intimement liée à celle du carré $ABCD$, petits bouts par petits bouts. Regardons cela de plus près, tout en mettant explicitement en branle notre démarche vers l'incommensurabilité.

Nous supposons donc (pour fins de contradiction) qu'il existe un « segment étalon » déterminé de longueur e qui est une mesure commune de la diagonale et du côté (respectivement de longueur d et c) du carré initial $ABCD$. Il existe alors, par hypothèse, des entiers naturels m et n tels que $d = m \times e$ et $c = n \times e$. Nous nous intéressons maintenant à la diagonale et au côté (respectivement de longueur d' et c') du carré $A'B'CD'$.

Pour ce qui est de la longueur c' du côté CD' , on a tout simplement

$$c' = d - c = (m - n) \times e,$$

(voir la construction géométrique de ce segment), de sorte que c' est à nouveau un multiple de l'étalon e , disons $c' = n' \times e$ avec n' un entier naturel.



Pour la longueur d' de la diagonale $A'C$, on s'appuie sur la congruence (*) ci-haut. On voit que le segment $A'B$ au côté du carré initial, ce qui revient, par (*), à enlever $A'D'$, c'est-à-dire CD' , le côté du carré en jeu. Il en résulte que

$$\begin{aligned} d' &= c - c' = n \times e - (m - n) \times e \\ &= (2n - m) \times e, \end{aligned}$$

de sorte qu'on a à nouveau un multiple de l'étalon e , disons $d' = m' \times e$ avec m' un entier naturel.

La mesure commune (de longueur e) de la diagonale et du côté du carré initial a donc été transférée au carré $A'B'CD'$ résultant de la construction de Chrystal! Mais on pourrait faire de même en passant de $A'B'CD'$ à $A''B''CD''$, etc.

Le fait crucial à observer ici est donc le suivant :

si un segment étalon donné est une mesure commune de la diagonale et du côté du carré initial, alors ce même segment est aussi une mesure commune de tout carré résultant de la construction de Chrystal.

Mais les carrés à la Chrystal, on l'a vu (encadré ci-haut), rapetissent de manière illimitée, alors que l'étalon de longueur e est fixe. Cela ne marche pas : les carrés vont finir par devenir si petits que leur côté va être plus court que l'étalon. Un tel segment étalon ne peut donc pas exister !

Cette contradiction montre que l'hypothèse d'une mesure commune à la diagonale et au côté du carré $ABCD$ ne tient pas la route. Il s'agit donc de deux segments incommensurables.

Une autre façon de conclure l'argument d'incommensurabilité

Revenant au moment où on a observé la présence d'une famille illimitée de carrés de plus en plus petits, on peut compléter l'argument de manière légèrement différente en se concentrant par exemple sur les diagonales de ces carrés (on pourrait tout aussi bien travailler avec les côtés).

La construction de Chrystal mène donc à une suite infinie strictement décroissante de longueurs des diagonales

$$d > d' > d'' > d''' > \dots,$$

où $d = m \times e$, $d' = m' \times e$, $d'' = m'' \times e$, etc., et $m, m', m'', \dots$ sont des entiers naturels. Or de cette suite d'inégalités, on peut extraire la suite suivante, qui se déroule cette fois parmi les nombres naturels :

$$m > m' > m'' > m''' > \dots.$$

On se retrouve alors devant une suite infinie strictement décroissante de nombres naturels. Mais l'essence même des nombres naturels fait qu'une telle suite ne peut tout simplement pas exister ! Encore une fois, on conclut à l'incommensurabilité de la diagonale et du côté du carré (voir l'encadré qui suit).

À propos de « descente infinie »

Ce dernier argument utilise un principe de raisonnement aujourd'hui appelé la *descente infinie*, selon la terminologie introduite en 1659 par Pierre de Fermat (1601–1665). On s'appuie alors sur le fait qu'une suite strictement décroissante de naturels est nécessairement finie. Fermat a fait de ce principe un instrument important dans ses recherches en théorie des nombres, mais il était connu bien auparavant : il est notamment mis en œuvre par Euclide à la proposition VII.31 de ses *Éléments*, alors qu'il démontre qu'un naturel composé a forcément un facteur premier. Sur le plan axiomatique, le principe de descente infinie est relié au fait que l'ordre dans les naturels est un *bon ordre* : tout sous-ensemble non vide de naturels possède un plus petit élément.

À noter que Rademacher et Toeplitz (voir l'encadré *À propos de la construction de Chrystal*), dans leur présentation de ce résultat (p. 24), font un lien explicite avec la notion de descente infinie.