

Du carré naturel au carré magique parfait : le secret des diagonales brisées

Dans un carré magique, la diagonale brisée brise-t-elle la magie ?

Kenichi Takemura
Chercheur indépendant¹

Introduction

Connaissez-vous les carrés magiques ? Voici un exemple : on écrit les nombres de 1 à 16, chacun une seule fois, dans un quadrillage 4×4, de sorte que la somme de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale soit toujours la même, à savoir 34. C'est un carré étonnant, et il est loin d'être unique : il existe en tout 880 carrés magiques d'ordre 4.

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

Figure 1 : Un exemple de carré magique d'ordre 4

Vérifiez par vous-même que toutes les sommes valent bien 34 ! Ce nombre 34 s'appelle la *constante magique* ; c'est le cœur battant de tout carré magique d'ordre 4.

Somme : 34

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

Figure 2 : La somme de chaque ligne, colonne et diagonale est toujours 34

Considérons maintenant une disposition radicalement différente : la plus simple qui soit.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Figure 3 : Le carré naturel d'ordre 4

Décevant, n'est-ce pas ? Les nombres sont simplement écrits dans l'ordre, de gauche à droite et de haut en bas. Appelons cela le *carré naturel d'ordre 4*. « Ce n'est qu'une liste ordonnée, ça n'a rien d'intéressant », pourrait-on penser. Pourtant, attendez un instant !

Cette disposition apparemment banale cache un secret que même les carrés magiques pourraient envier. De quoi s'agit-il ?

Qu'est-ce qu'une diagonale brisée ?

Concentrons-nous sur les lignes diagonales. Il existe un concept peu connu : celui de *diagonale brisée*, qui généralise la notion habituelle de diagonale.

1. Kenichi Takemura est un chercheur indépendant basé à Tokyo, au Japon. Ses travaux portent sur les soaisu (nombres d'affection mutuelle), une généralisation du problème de Prouhet-Tarry-Escott, ainsi que sur les symétries cachées dans les carrés magiques et les arrangements magiques naturels. Il partage activement la beauté des mathématiques via son site web (www.kazunosekai.com), son blog et sa chaîne YouTube (<https://www.youtube.com/channel/UCCN6pN9ISzSU-xHad7oA-zbg>).

Diagonales brisées

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Figure 4: Les diagonales brisées du carré naturel d'ordre 4

Examinons concrètement les 4 diagonales brisées « descendantes vers la droite » (↘) du carré naturel d'ordre 4. Dans un carré ordinaire, on ne considère que les 2 grandes diagonales passant par le centre; mais les diagonales brisées suivent la règle suivante: « lorsqu'on atteint un bord, on réapparaît du côté opposé ». Elles regroupent ainsi tous les alignements parallèles aux diagonales:

- $L_1 = \{1, 6, 11, 16\}$ (diagonale principale);
- $L_2 = \{2, 7, 12, 13\}$ (commence en 2, puis saute à 13 en atteignant le bord droit);
- $L_3 = \{3, 8, 9, 14\}$ (commence en 3, puis saute à 9 en atteignant le bord droit);
- $L_4 = \{4, 5, 10, 15\}$ (commence en 4, puis effectue des sauts vers le bas et vers la droite).

Il existe également 4 diagonales brisées montantes (↗), soit 8 diagonales brisées au total. Et voici ce qu'il y a de remarquable: dans le carré naturel d'ordre 4, la somme des 4 nombres sur *chacune* de ces 8 diagonales brisées est toujours exactement la constante magique 34!



Somme : 34

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Figure 5: Sur chaque diagonale brisée du carré naturel d'ordre 4, la somme des 4 nombres vaut 34.

Est-ce une coïncidence? Quel secret se cache derrière ce phénomène? Avant de lever le voile, prenez un moment pour y réfléchir.

À la conquête du carré naturel d'ordre n

Jusqu'ici, nous avons étudié le cas 4×4 . Or, la vraie beauté des mathématiques réside dans la *généralité* : le résultat vaut-il pour *toute* taille de carré ? Élargissons donc notre regard au carré $n \times n$, c'est-à-dire d'ordre n .

Dans le carré naturel d'ordre n , les nombres 1, 2, 3, ... sont disposés dans l'ordre, de gauche à droite et de haut en bas. Chaque case est entièrement déterminée par deux informations : son numéro de ligne et son numéro de colonne. La structure est on ne peut plus simple ! Pour faciliter les calculs, nous numérotions lignes et colonnes à partir de 0 (autrement dit, la case en haut à gauche est la case « ligne 0, colonne 0 »).

Définissons à présent les diagonales brisées pour un ordre n quelconque. Puisqu'il y a deux directions diagonales, il y a deux types de règles.

Définition générale des diagonales brisées

1. Direction principale (descendante $\searrow$) : ce sont les alignements où les numéros de ligne et de colonne augmentent au même rythme. Ils se caractérisent par la propriété : la *différence* entre le numéro de ligne et celui de colonne est constante modulo n (c'est-à-dire à un multiple de n près)
2. Direction secondaire (montante $\nearrow$) : ce sont les alignements où le numéro de ligne augmente tandis que celui de colonne diminue. Ils se caractérisent par la propriété : la somme des numéros de ligne et de colonne est constante modulo n .

Notre objectif est de démontrer que la somme de chacune de ces $2n$ diagonales brisées est toujours égale à la *constante magique* du carré magique d'ordre n (somme d'une ligne, d'une colonne, ou d'une diagonale) :

$$M_n = \frac{n(n^2 + 1)}{2}.$$

Somme : 65

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Figure 6: Les 10 diagonales brisées du carré naturel d'ordre 5 ont toutes pour somme 65

Pourquoi les sommes coïncident-elles ?

Théorème 1

La somme de chacune des diagonales brisées du carré naturel d'ordre n est égale à la constante magique M_n .

En un mot, le secret est le suivant : sur chaque diagonale brisée, les numéros de ligne et les numéros de colonne prennent chacun exactement une fois toutes les valeurs de 0 à $n - 1$.

Prenons par exemple, pour $n = 4$, la diagonale brisée descendante $\{2, 7, 12, 13\}$. Les cases occupées sont (0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0) : les numéros de ligne $\{0, 1, 2, 3\}$ comme les

numéros de colonne $\{1, 2, 3, 0\}$ contiennent bien chacune des valeurs de 0 à 3, une fois et une seule. C'est précisément le mécanisme du « saut vers le bord opposé » qui garantit cette propriété.

La valeur de chaque case est déterminée par la combinaison « numéro de ligne $\times n$ » + « numéro de colonne » + « 1 » ; la somme sur une diagonale brisée s'écrit donc :

(somme des numéros de ligne) $\times n$ + (somme des numéros de colonne) + n .

La somme des numéros de ligne comme celle des numéros de colonne valent toutes deux

$$0 + 1 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2};$$

la somme sur chaque diagonale brisée est donc :

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)}{2} \times n + \frac{n(n-1)}{2} + n \\ = \frac{n(n^2+1)}{2} = M_n. \end{aligned}$$

La constante magique apparaît !

Ce simple raisonnement suffit à établir, pour tout entier n , que la somme de chaque diagonale brisée du carré naturel d'ordre n est égale à M_n . Voilà toute la puissance des mathématiques² !

Pour aller plus loin

Le carré magique présenté en introduction est en réalité bien plus qu'un carré magique ordinaire !

Somme : 34

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

Figure 7: Un carré magique d'ordre 4 parfait : les 8 diagonales brisées ont toutes pour somme 34

Pour aller plus loin pour les amateurs de mathématiques

Notons $a_{ij} = ni + j + 1$ la valeur de la case ligne i , colonne j du carré naturel d'ordre n (avec $i, j = 0, 1, \dots, n-1$). La somme d'une diagonale brisée descendante ($i - j \equiv k \pmod n$) vaut :

$$S_k = \sum_{j=0}^{n-1} [n \times ((j+k) \bmod n) + j + 1].$$

Lorsque j parcourt $0, 1, \dots, n-1$, la quantité $(j+k) \bmod n$ prend exactement une fois chacune des valeurs $0, 1, \dots, n-1$, d'où :

$$\begin{aligned} S_k &= n \times \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + n \\ &= \frac{n(n^2+1)}{2} = M_n. \end{aligned}$$

Le cas des diagonales montantes ($i+j \equiv k \pmod n$) est analogue.

En effet, non seulement la somme de chaque ligne, colonne et grande diagonale vaut 34, mais la somme de chacune des diagonales brisées est elle aussi égale à 34 !

Un carré magique jouissant de cette propriété supplémentaire est appelé *carré magique parfait*. Nous l'appellerons *carré magique pandiagonal* : il possède le plus haut degré de symétrie parmi tous les carrés magiques.

Autres propriétés prodigieuses du carré magique parfait d'ordre 4

Le carré magique parfait d'ordre 4 présenté ici possède d'autres caractéristiques fascinantes au-delà des diagonales brisées. L'une d'elles est que la somme des quatre nombres contenus dans n'importe quel « bloc 2×2 » est également toujours égale à 34 (la constante magique). Parmi les 880 carrés magiques d'ordre 4 existants, 48 sont parfaits.

2. Le lecteur observateur aura peut-être noté que, dans le carré naturel d'ordre 4, on pourrait remplacer la paire $\{6, 11\}$ par $\{7, 10\}$ dans une diagonale brisée sans changer la somme. Cela n'est pas surprenant : ce qui compte, c'est que chaque ligne et chaque colonne soit représentée exactement une fois. C'est là, précisément, l'essence même de la démonstration du théorème 1.

Somme : 34

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

Figure 8 : La propriété de somme constante des blocs 2x2 dans un carré magique parfait d'ordre 4 (la somme des 4 nombres vaut toujours 34)

Cette propriété peut être étendue. En juxtaposant quatre copies du carré magique parfait pour former une grille 8x8, on constate que les 16 blocs 2x2 – y compris ceux qui franchissent les bords – ont tous pour somme 34. Cela reflète la structure d'un tore (surface en forme de beignet) : « quand on atteint un bord, on réapparaît du côté opposé ».

Somme : 34

1	8	10	15	1	8	10	15
12	13	3	6	12	13	3	6
7	2	16	9	7	2	16	9
14	11	5	4	14	11	5	4
1	8	10	15	1	8	10	15
12	13	3	6	12	13	3	6
7	2	16	9	7	2	16	9
14	11	5	4	14	11	5	4

■ Bloc intérieur
■ Bord vertical
■ Bord horizontal
■ Double bord

La mystérieuse structure commune

En réalité, il existe une structure commune inattendue entre le carré naturel et le carré magique parfait, bien que cela ne soit pas évident à première vue. Dans ces deux carrés, la somme des « quatre nombres aux coins » ainsi que la somme des quatre nombres du « bloc central (2 x 2) » sont toutes deux égales à 34, la constante magique.

Somme : 34

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

Figure 9 : La somme des quatre nombres aux coins est de 34 pour le carré naturel comme pour le carré magique parfait

Somme : 34

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

Figure 10 : La somme des quatre nombres du bloc central est de 34 pour le carré naturel comme pour le carré magique parfait.

Grâce à cette propriété, on s'aperçoit que les deux carrés possèdent une « structure de division égale en deux parties » : en séparant les « 8 nombres situés sur les deux diagonales » des « 8 autres nombres », la somme totale du carré (136) est répartie exactement par moitié (68 chacune).

Somme : 34

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

Figure 11 : Structure de division égale de la somme totale partagée par le carré naturel et le carré magique parfait

Cette caractéristique structurelle est une propriété universelle que l'on retrouve dans chacun des 48 types de « carrés magiques parfaits d'ordre 4 » parmi les 880 carrés magiques existants. Le carré naturel, qui semble n'être qu'une simple suite ordonnée de nombres, est peut-être, contre toute attente, un proche parent des carrés magiques. La relation entre ces deux carrés mériterait d'être explorée plus en profondeur.

La constante magique et les nombres triangulaires centrés

La constante magique M_n peut être définie comme la valeur moyenne des entiers de 1 à n^2 :

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n^2} k = \frac{n(n^2 + 1)}{2}.$$

Observons comment M_n croît lorsque n augmente (accroissement $C_n = M_n - M_{n-1}$):

- $M_1 = 1$
- $M_2 = 5$ (+4)
- $M_3 = 15$ (+10)
- $M_4 = 34$ (+19)

Les accroissements successifs 1, 4, 10, 19, 31, ... sont précisément les *nombres triangulaires centrés*. Un nombre triangulaire centré représente un point central entouré de trois triangles de points; son expression est :

$$C_n = 3T_{n-1} + 1 = \frac{3n^2 - 3n + 2}{2}.$$

où $T_{n-1} = n(n-1)/2$ désigne le $(n-1)$ -ième nombre triangulaire. On vérifie: $C_1 = 1$, $C_2 = 4$, $C_3 = 10$, $C_4 = 19$. Exact ! Autrement dit, M_n s'obtient en empilant, couche par couche, les nombres triangulaires centrés du rang 1 au rang n : par exemple, pour le carré d'ordre 4,

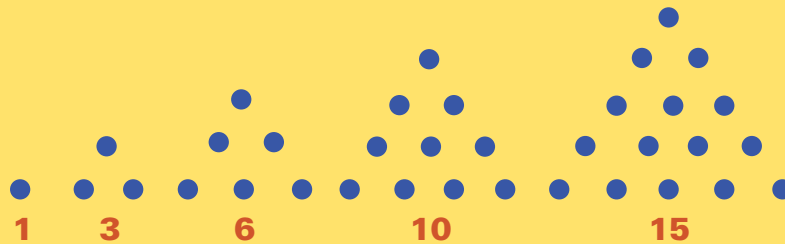
$$1 + 4 + 10 + 19 = 34.$$

Mais pourquoi les accroissements sont-ils exactement des nombres triangulaires centrés ? On peut le vérifier mécaniquement en calculant la différence $M_n - M_{n-1}$ à partir de la formule polynomiale de M_n . Puisque M_n est un polynôme de degré 3 en n , il est naturel que son accroissement C_n soit un polynôme de degré 2, donc une suite de type triangulaire.

Mais y a-t-il, au-delà du calcul algébrique, une raison géométrique profonde pour laquelle des triangles surgissent ainsi dans le monde des carrés ? Nous vous invitons à y réfléchir ! Le monde des carrés (le carré naturel) et le monde des triangles (les nombres triangulaires) semblent se rejoindre de façon étonnamment belle. N'est-ce pas fascinant ?

Nombres triangulaires

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$



Nombres triangulaires centrés

$$C_n = 3T_{n-1} + 1 = 3 \frac{(n-1)n}{2} + 1 = \frac{3n^2 - 3n + 2}{2}$$

