

Accrom α th

Volume 21 • été-automne 2026

Jeu de Hex

Autres *articles*

- À propos de la diagonale du carré :
une démarche à saveur antique
- L'évolution de la coopération
- L'o-dix-ée vers l'ouest
- Du carré naturel au carré magique parfait :
le secret des diagonales brisées
- Le Lotto 6/49
- La symétrie cachée des nombres naturels
- Classement des équipes sportives :
l'algèbre linéaire à la rescousse

Rubrique des
Paradoxes
Le vote
par
téléphone

Éditorial α

Nous déplorons le décès d'André Deschênes, qui fut membre du Comité éditorial au cours des huit premières années d'Accromath. Nous offrons nos condoléances à son épouse Louise Maheux Deschênes et à ses trois filles Nancy, Gaétane et Michelle.

Dans le premier Accro-flash de ce numéro, Christiane Rousseau pose la question : existe-t-il une stratégie gagnante au **Jeu de Hex** ?

Nous enchaînons avec l'Accro-flash **À propos de la diagonale du carré : une démarche à saveur antique**, où Bernard Hodgson aborde, dans l'esprit du temps, un problème remontant à l'Antiquité, celui de l'incommensurabilité de la diagonale et du côté du carré.

Christiane Rousseau, dans l'article **L'évolution de la coopération**, nous présente une réflexion sur comment des espèces animales, des groupes d'individus ou des organisations choisissent de coopérer.

Dans **L'o-dix-ée vers l'ouest**, Jérôme Fortier nous fait revivre l'évolution du système de numération qui partant de la Chine, et repris par les Arabes, a finalement été adopté par l'Occident.

Dans un carré magique, la somme des termes sur la diagonale est égale à celle des lignes et des colonnes. Qu'en est-il des diagonales brisées du carré naturel dans lequel chaque case est numérotée selon son ordre ? Kenichi Takemura traite cette question dans l'article **Du carré naturel au carré magique parfait : le secret des diagonales brisées**.

On a tous entendu parler d'une chance sur treize millions de gagner le gros lot au 6/49. Mais quelles sont les chances de gagner quelque chose à ce jeu ? Dans **Le Lotto 6/49**, Christian Genest et Samuel Valiquette nous montrent quelles sont réellement nos chances de gagner à la loterie 6/49.

Dans **La symétrie cachée des nombres naturels**, Kenichi Takemura nous présente les *soiasu*♡♡♡ qui ont des qualités intéressantes en lien avec la représentation graphique des carrés naturels.

Dans **Classement des équipes sportives : l'algèbre linéaire à la rescousse**, Paul Guertin nous présente deux façons d'utiliser l'algèbre linéaire pour classer des équipes sportives selon la liste de toutes les parties et de leur pointage final.

Dans l'article **Le vote par téléphone**, cinq personnes, dans cinq pays différents, doivent voter par téléphone. Jean-Paul Delahaye pose la question : comment s'assurer que leur vote sera absolument confidentiel ?

Bonne lecture !
André Ross

Rédacteur en chef

André Ross

Professeur de mathématiques

Comité éditorial

Line Baribeau

*Professeure de mathématiques
Université Laval*

France Caron

*Professeure de didactique
des mathématiques
Université de Montréal*

Christian Genest

*Professeur de statistique
Université McGill*

Bernard R. Hodgson

*Professeur de mathématiques
Université Laval*

Tomasz Kaczynski

*Professeur de mathématiques
Université de Sherbrooke*

Nadia Lafrenière

*Professeure de mathématiques
Université Concordia*

Bruno Martin

*Professeur de mathématiques
Responsable recherche et développement
CIMMI*

Christiane Rousseau

*Professeure de mathématiques
Université de Montréal*

Christian Sévigny

*Professeur de physique
École secondaire Pointe-Lévy*

Anik Trahan

*Professeur de mathématiques
Cégep de Sherbrooke*

Robert Wilson

*Professeur de mathématiques
Cégep de Lévis-Lauzon*

Production et Iconographie

Alexandra Haedrich

Institut des sciences mathématiques

Conception graphique

Pierre Lavallée

Néograf Design inc.

Illustrations de scientifiques et caricatures

Noémie Ross

Illustrations mathématiques

André Ross

Révision linguistique

Robert Wilson

*Professeur de mathématiques
Cégep de Lévis-Lauzon*

Accromath

*Institut des sciences mathématiques
Université du Québec à Montréal
Case postale 8888, succ. Centre-ville
Montréal (Québec)
H3C 3P8 Canada*

Accromath

Volume 21 • été – automne 2026

Sommaire

Dossier *Accro-flashes*

Jeu de Hex

Christiane Rousseau

À propos de la diagonale du carré : une démarche à saveur antique

Bernard R. Hodgson

Dossier *Applications des mathématiques*

L'évolution de la coopération

Christiane Rousseau

Dossier *Histoire des mathématiques*

L'o-dix-ée vers l'ouest

Jérôme Fortier

Dossier *Propriétés des nombres*

Du carré naturel au carré magique parfait : le secret des diagonales brisées

Kenichi Takemura

Dossier *Applications des mathématiques*

Le Lotto 6/49

Christian Genest et Samuel Valiquette

Dossier *Propriétés des nombres*

La symétrie cachée des nombres naturels

Kenichi Takemura

Dossier *Applications des mathématiques*

Classement des équipes sportives : l'algèbre linéaire à la rescousse

Paul Guertin

Rubrique **des paradoxes**

Le vote par téléphone

Jean-Paul Delahaye

Solution du paradoxe précédent

Jean-Paul Delahaye

Section problèmes



2

4

8

14

18

24

30

36

42

43

44



24



30



36

42



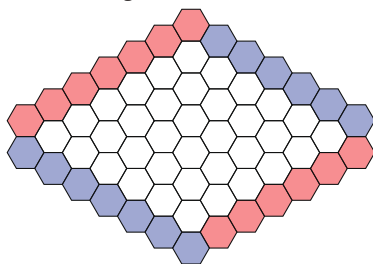
Le jeu de Hex

Le jeu de Hex se joue à deux sur un tablier en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Chaque paire de côtés opposés du losange est identifiée à une couleur. À tour de rôle, BLEU et ROUGE colorent une case de leur couleur. Le but du jeu est de joindre les deux côtés opposés de leur couleur par une chaîne de cases colorées adjacentes de la même couleur.

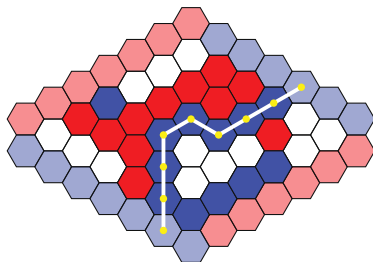
Christiane Rousseau
Université de Montréal

Le jeu de Hex a été introduit indépendamment par deux mathématiciens, une première fois par Piet Hein en 1942, et une deuxième fois par John Nash¹ en 1947.

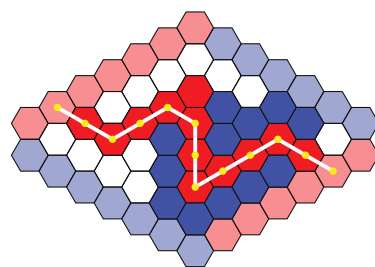
Voici un tablier de jeu de Hex. Les cases colorées ne font pas partie du jeu. Elles servent à identifier la couleur des côtés opposés du losange. Le losange peut être arbitrairement grand. Dans la figure il a $6 \times 6 = 36$ cases.



BLEU et ROUGE jouent à tour de rôle et colorent une case de leur couleur et BLEU commence. Voici une partie où BLEU gagne après avoir joué 12 coups.



Et voici une partie où ROUGE gagne après avoir joué 12 coups.



Bien sûr, après un nombre fini de coups toutes les cases sont rouges ou bleues.

Peut-on avoir une partie nulle?

John Nash a montré que non : soit BLEU, soit ROUGE gagne à chaque partie.

Remarquons que tant que personne n'a gagné, BLEU et ROUGE continuent de jouer jusqu'à remplir toutes les cases. Supposons que BLEU n'ait pas gagné. Intuitivement, c'est parce que ROUGE lui a barré le chemin d'un côté à l'autre du tablier. C'est cette barrière qui garantit que ROUGE a alors gagné. Dans l'encadré, on explique comment écrire rigoureusement cette idée.

Y a-t-il une stratégie gagnante?

Y a-t-il un avantage pour BLEU ou pour ROUGE?

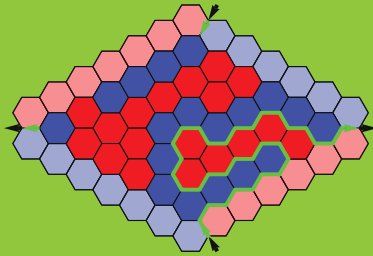
Aussi, rappelons que le tablier peut être arbitrairement grand. S'il y a un avantage, est-il toujours du même côté? Ou bien dépend-il de la taille du tablier?

John Nash a montré que BLEU a une stratégie gagnante. Ce qui veut dire que si BLEU ne commet pas d'erreur, BLEU gagne toujours. Pourtant, la stratégie gagnante est inconnue dès que le tablier est plus grand que 9×9 .

1. John Nash (1928-2015) s'est mérité le prix Nobel d'économie en 1994 pour ses contributions à la théorie des jeux.

Il n'y a pas de partie nulle

Regardons les flèches d'entrée et de sortie sur la figure. Elles sont orientées pour que le bleu se trouve du côté gauche.

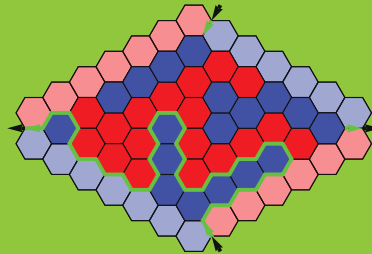


Rentrons par la flèche inférieure et continuons le chemin le long des arêtes en laissant toujours le bleu à gauche et le rouge à droite. Il n'y a qu'une seule manière de le faire.

Ce chemin ne peut pas avoir d'auto-intersection, ni faire une boucle car il est ouvert

à une extrémité. Donc, il doit ressortir par une des deux sorties du tablier. Sur la figure à gauche il sort à droite. À gauche du chemin se trouve une trajectoire qui montre que BLEU a gagné.

L'autre possibilité est que le chemin ressorte à gauche (figure ci-dessous).



C'est maintenant à droite du chemin qu'on trouve une trajectoire qui montre que ROUGE a gagné.

Comment est-ce possible? C'est que la preuve de Nash est existentielle : John Nash a montré qu'il existe une stratégie gagnante pour BLEU. Pour cela, il suppose qu'il n'en existe pas. Ceci signifie que, quoi que joue BLEU, ROUGE va pouvoir répliquer et gagner. Donc,

cela veut dire que ROUGE a une stratégie gagnante. Et John Nash en déduit une contradiction. C'est ce qu'on appelle une *preuve par l'absurde*, elle ne nous apprend rien sur la stratégie. Le détail de l'argument se retrouve dans l'encadré.

BLEU a une stratégie gagnante

Supposons que BLEU n'ait pas de stratégie gagnante. Cela veut dire que ROUGE qui joue en second a une stratégie gagnante appelée S_R . Remarquons qu'on peut interchanger les couleurs ROUGE et BLEU. Et alors, cette stratégie gagnante de S_R donne une stratégie gagnante S_B pour BLEU si c'est ROUGE qui commence. Cette stratégie S_B signifie que si ROUGE commence et si BLEU réplique à chaque coup de ROUGE par la stratégie S_B , alors BLEU va construire une trajectoire bleue qui traverse le tablier.

Au premier coup, BLEU joue n'importe quelle case, appelée A_1 . Ensuite ROUGE joue son premier coup selon S_R . À chaque

coup de ROUGE selon S_R , BLEU réplique par la stratégie S_B . Si la stratégie S_B commandait de jouer A_1 , alors BLEU joue n'importe quelle case vide, appelée A_2 . Etc.

Donc, en pratique, toutes les cases que la stratégie S_B commandait de colorer en bleu seront bleues. Et ces cases donnent une trajectoire gagnante pour BLEU et forment une barrière empêchant ROUGE de gagner.

Contradiction avec l'hypothèse que ROUGE a une stratégie gagnante. Donc, BLEU a une stratégie gagnante.

On voit bien que cette preuve ne nous apprend rien de la stratégie gagnante pour BLEU.

À propos de la diagonale du carré : une démarche à saveur antique

Regards sur un résultat géométrique bien familier à l'époque de la Grèce antique, en prenant appui sur une démarche tout à fait dans l'esprit du temps. Mais le raisonnement présenté ici ne semble pourtant pas se retrouver tel quel dans les écrits des mathématiciens de l'Antiquité.

Bernard R. Hodgson
Université Laval

Le thème central de ce texte porte sur le rapport, dans un carré, de la diagonale au côté. En termes modernes, il sera donc question ici (*n'est-ce pas?*) de l'irrationalité du célèbre nombre réel $\sqrt{2}$. Mais ce n'est pas ainsi que l'on s'exprimait dans les temps anciens : on parlait alors plutôt de l'*incommensurabilité de la diagonale et du côté du carré*. On lit en effet ce qui suit chez le philosophe grec Aristote (-384 – -322) – *Premiers Analytiques*, I.23 –, alors qu'il présente une forme de déduction menant à une « conséquence impossible », c'est-à-dire la méthode de démonstration aujourd'hui appelée *preuve par contradiction* :

« Par exemple, on établit que la diagonale¹ est incommensurable² parce qu'une fois qu'on a supposé qu'elle est commensurable, un nombre impair se trouve égal à un nombre pair. »³

On aura noté qu'Aristote tient ici pour bien connue chez son lecteur l'application de l'incommensurabilité au cas du carré, de même que l'argument permettant d'établir cette propriété (y compris le rôle qu'y joue la dichotomie pair/impair) : il ne fait, en effet, que mentionner en passant ce cas de figure, le citant tout bonnement comme un exemple type de raisonnement par contradiction.

1. Sous-entendu : du carré.

2. Sous-entendu : avec le côté.

3. Tiré de Michel Crubellier, Aristote: Premiers Analytiques. (Flammarion, 2014, p. 117). Pour le texte original grec (avec traduction en anglais), voir Ivor Thomas, *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics*, vol. I: From Thales to Euclid. Harvard University Press, 1991, pp. 110-111.

Deux notions fondamentales

Pour bien comprendre le commentaire précédent d'Aristote, il faut tout d'abord rappeler deux notions de base bien présentes chez les mathématiciens de l'Antiquité grecque et qui jouent un rôle clé dans la suite de ce texte : le fait qu'un segment de droite donné mesure un deuxième segment, et l'idée de *commensurabilité* de deux segments de droite donnés. (Voir l'encadré *Des définitions de base*.)

Par exemple, le segment de longueur x mesure le segment de longueur y ($y=5x$), mais pas celui de longueur z . À noter que rien n'empêche a priori qu'il puisse exister un certain segment, disons de longueur x' , qui soit

Des définitions de base

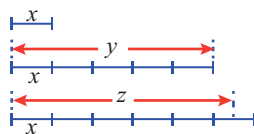
Étant donné un segment de longueur x , on dira qu'il mesure un segment de longueur y si, en le juxtaposant à lui-même⁴ un certain nombre de fois, on en vient à recouvrir exactement le deuxième segment. Dans un tel cas, il existe donc un entier naturel k (non nul) tel que $y = k \times x$. Le segment de longueur x est dit une *mesure commune* de deux segments de longueur respective y et z s'il mesure chacun de ces deux segments.

Lorsque deux segments possèdent une mesure commune, on dira qu'ils sont *commensurables*.⁵ Et s'il n'existe pas de telle mesure commune, ils sont *incommensurables*.

4. C'est-à-dire en l'« additionnant » à lui-même, si on préfère.

5. Le terme commensurable dérive du latin mensura, « mesure », et renvoie donc explicitement à l'idée d'une « commune mesure » de deux segments donnés.

une mesure commune des deux segments en cause, auquel cas ces segments seraient de ce fait commensurables (mais cela, pas en vertu de la mesure x).



Ce vocabulaire permet d'énoncer clairement et succinctement le résultat central du présent texte :

dans tout carré, la diagonale et le côté sont incommensurables.

C'est là précisément ce dont parle Aristote dans le passage cité plus haut. La suite de ce texte propose une démarche dans l'esprit des mathématiques de la Grèce antique permettant d'établir ce fait.

Une construction auxiliaire élémentaire

Introduisons tout d'abord une figure géométrique élémentaire sur laquelle prend appui cette démarche. Les différentes étapes de sa construction reposent toutes sur des faits mathématiques bien connus dans l'Antiquité. Mais pour autant que je sache, la figure en cause ici ne se retrouve pas telle quelle dans les textes anciens : sa toute première publication semble être dans un livre du mathématicien écossais George Chrystal (1851–1911). (Voir à ce sujet l'encadré À propos de la construction de Chrystal.)

La construction de Chrystal démarre avec un carré $ABCD$ quelconque. Considérant la diagonale AC , on y détermine le point D' tel que $AD' \cong AD$, puis on trace la perpendiculaire à AC passant par D' , obtenant ainsi le point A' à l'intersection avec le côté BC .

On vérifie aisément que le triangle $A'CD'$ est non seulement rectangle (et d'hypoténuse $A'C$), mais aussi isocèle. En effet, l'angle $\angle A'CD'$, déterminé par AC , vaut la moitié d'un angle droit, de sorte qu'il en est de même de l'angle $\angle CA'D'$ (en raison de la somme des angles d'un triangle).

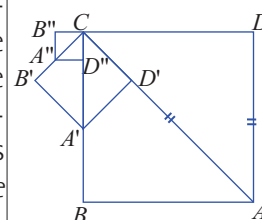
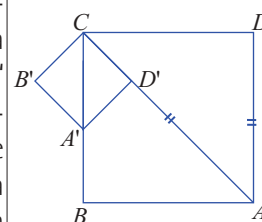
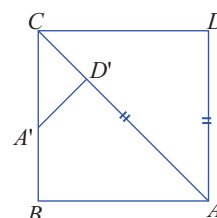
On est donc en présence d'un demi-carré ! Introduisons alors le point B' permettant de tracer le carré $A'B'CD'$.

Voilà donc la structure de base de l'approche de Chrystal. La même construction peut maintenant être effectuée sur ce dernier carré. On obtient de la sorte le point D'' sur sa diagonale $A'C$ — on a maintenant $A'D'' \cong A'D'$ —, puis élevant à nouveau une perpendiculaire, le point A'' sur le côté $B'C$. Comme précédemment, le triangle $A''CD''$ est à la fois rectangle et isocèle, ce qui mène à un nouveau carré $A''B''CD''$.

On pourrait bien sûr reprendre la même procédure avec le point D''' (situé sur la diagonale $A''C$), etc. On est donc ici en présence d'une construction pouvant être répétée indéfiniment, menant de la sorte à des carrés de plus en plus petits ! (Voir l'encadré *Une famille de carrés qui rapetissent vigoureusement* !)



George Chrystal
1851-1911



À propos de la construction de Chrystal

La plus ancienne mention de la construction géométrique présentée ici se retrouve, à ma connaissance, dans un traité d'algèbre bien connu datant de la fin du 19^e siècle, le célèbre *Algebra: An Elementary Text-Book for the Higher Classes of Secondary Schools and for Colleges* de George Chrystal, manuel publié pour la première fois en 1886 mais qui a connu de nombreuses rééditions au fil des décennies.⁶ Chrystal introduit sa construction dans un chapitre portant sur les notions de rapport et de proportion : il applique alors les résultats qu'il vient tout juste de développer

au cas de l'incommensurabilité dans le carré.

Dans leur présentation de ce résultat, Hans Rademacher et Otto Toeplitz (voir le *Pour en savoir plus*) écrivent : « Il ne faut pas chercher [cette] démonstration dans les travaux des mathématiciens grecs mais elle est bien du genre de celles qu'ils ont données et ils ont pu la connaître. » (p. 213)

6. Voir par exemple : *Algebra: An Elementary Text-Book for the Higher Classes of Secondary Schools and for Colleges*, Part I, (1964), New York : Chelsea Publishing Company.

Une famille de carrés qui rapetissent vigoureusement !

Nous désignons par c et d la longueur respectivement du côté et de la diagonale du carré initial $ABCD$, et de même pour c' et d' pour le carré $A'B'CD'$. Un fait de base en géométrie élémentaire, connu sous le nom d'*inégalité triangulaire*, stipule que dans tout triangle, la longueur d'un de ses côtés est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés. Ce résultat (proposition 20 du Livre I des *Éléments* d'Euclide) renvoie tout bonnement à l'idée que la ligne droite est le plus court chemin entre deux points.

Appliquant l'inégalité triangulaire au triangle ACD , on obtient ainsi que $c + c' > d$, c'est-à-dire $c' > d - c$. Or en vertu de notre construction même, la longueur $d - c$ peut être lue comme correspondant au côté CD'

du second carré, et donc à c' . Il s'ensuit alors que $c > c'$.

Le même raisonnement pourrait être repris à partir du carré $A'B'CD'$, obtenant ainsi des carrés dont les côtés décroissent sans fin :

$$c > c' > c'' > c''' > \dots$$

Mais il y a plus : on peut même montrer que la longueur de ces côtés successifs tend vers 0 et que les carrés deviennent ainsi aussi petits que l'on souhaite. Cette observation cruciale découle du fait que $c' < c/2$. (voir la *Section problèmes*). Le côté du carré $A'B'CD'$ est donc de longueur moindre que la moitié du côté du carré initial, et ce phénomène se répète bien sûr en passant d'un carré au suivant.

C'est sur cette famille de carrés qui se rapetissent sans limite que s'appuie Chrystal pour son argument d'incommensurabilité dans le carré.

L'arithmétique des diagonales et des côtés

Revenons au passage du carré initial $ABCD$ à $A'B'CD'$, le premier carré construit à la Chrystal. Il semble pertinent de bien situer ce nouveau carré en termes du carré $ABCD$, tant en ce qui concerne son côté (disons $A'D'$) que sa diagonale $A'C$. Or pour le côté, on sait déjà que $A'D' \equiv CD'$. Pour ce qui est de la diagonale $A'C$, il est utile de porter notre attention sur le segment $A'B$. Et on peut aisément montrer que

$$A'B \equiv A'D' \quad (*)$$

(voir la *Section Problèmes*). Le nouveau carré $A'B'CD'$ présente donc une structure qui semble intimement liée à celle du carré $ABCD$, petits bouts par petits bouts. Regardons cela de plus près, tout en mettant explicitement en branle notre démarche vers l'incommensurabilité.

Nous supposons donc (pour fins de contradiction) qu'il existe un « segment étalon » déterminé de longueur e qui est une mesure commune de la diagonale et du côté (respectivement de longueur d et c) du carré initial $ABCD$. Il existe alors, par hypothèse, des entiers naturels m et n tels que $d = m \times e$ et $c = n \times e$. Nous nous intéressons maintenant à la diagonale et au côté (respectivement de longueur d' et c') du carré $A'B'CD'$.

Pour ce qui est de la longueur c' du côté CD' , on a tout simplement

$$c' = d - c = (m - n) \times e,$$

(voir la construction géométrique de ce segment), de sorte que c' est à nouveau un multiple de l'étalon e , disons $c' = n' \times e$ avec n' un entier naturel.



Pour la longueur d' de la diagonale $A'C$, on s'appuie sur la congruence (*) ci-haut. On voit que le segment $A'B$ au côté du carré initial, ce qui revient, par (*), à enlever $A'D'$, c'est-à-dire CD' , le côté du carré en jeu. Il en résulte que

$$\begin{aligned} d' &= c - c' = n \times e - (m - n) \times e \\ &= (2n - m) \times e, \end{aligned}$$

de sorte qu'on a à nouveau un multiple de l'étalon e , disons $d' = m' \times e$ avec m' un entier naturel.

La mesure commune (de longueur e) de la diagonale et du côté du carré initial a donc été transférée au carré $A'B'CD'$ résultant de la construction de Chrystal! Mais on pourrait faire de même en passant de $A'B'CD'$ à $A''B''CD''$, etc.

Le fait crucial à observer ici est donc le suivant :

si un segment étalon donné est une mesure commune de la diagonale et du côté du carré initial, alors ce même segment est aussi une mesure commune de tout carré résultant de la construction de Chrystal.

Mais les carrés à la Chrystal, on l'a vu (encadré ci-haut), rapetissent de manière illimitée, alors que l'étalon de longueur e est fixe. Cela ne marche pas : les carrés vont finir par devenir si petits que leur côté va être plus court que l'étalon. Un tel segment étalon ne peut donc pas exister !

Cette contradiction montre que l'hypothèse d'une mesure commune à la diagonale et au côté du carré $ABCD$ ne tient pas la route. Il s'agit donc de deux segments incommensurables.

Une autre façon de conclure l'argument d'incommensurabilité

Revenant au moment où on a observé la présence d'une famille illimitée de carrés de plus en plus petits, on peut compléter l'argument de manière légèrement différente en se concentrant par exemple sur les diagonales de ces carrés (on pourrait tout aussi bien travailler avec les côtés).

La construction de Chrystal mène donc à une suite infinie strictement décroissante de longueurs des diagonales

$$d > d' > d'' > d''' > \dots,$$

où $d = m \times e$, $d' = m' \times e$, $d'' = m'' \times e$, etc., et $m, m', m'', \dots$ sont des entiers naturels. Or de cette suite d'inégalités, on peut extraire la suite suivante, qui se déroule cette fois parmi les nombres naturels :

$$m > m' > m'' > m''' > \dots.$$

On se retrouve alors devant une suite infinie strictement décroissante de nombres naturels. Mais l'essence même des nombres naturels fait qu'une telle suite ne peut tout simplement pas exister ! Encore une fois, on conclut à l'incommensurabilité de la diagonale et du côté du carré (voir l'encadré qui suit).

À propos de « descente infinie »

Ce dernier argument utilise un principe de raisonnement aujourd'hui appelé la *descente infinie*, selon la terminologie introduite en 1659 par Pierre de Fermat (1601–1665). On s'appuie alors sur le fait qu'une suite strictement décroissante de naturels est nécessairement finie. Fermat a fait de ce principe un instrument important dans ses recherches en théorie des nombres, mais il était connu bien auparavant : il est notamment mis en œuvre par Euclide à la proposition VII.31 de ses *Éléments*, alors qu'il démontre qu'un naturel composé a forcément un facteur premier. Sur le plan axiomatique, le principe de descente infinie est relié au fait que l'ordre dans les naturels est un *bon ordre* : tout sous-ensemble non vide de naturels possède un plus petit élément.

À noter que Rademacher et Toeplitz (voir l'encadré *À propos de la construction de Chrystal*), dans leur présentation de ce résultat (p. 24), font un lien explicite avec la notion de descente infinie.

L'évolution de la coopération

Dans la nature et dans la société on observe des espèces animales, des groupes d'individus ou des organisations, ou même des ensembles de cellules qui « choisissent » de coopérer, même si une approche égocentrique paraît plus profitable a priori. Comment la coopération se développe-t-elle?

Christiane Rousseau
Université de Montréal

De telles situations peuvent être expliquées à partir du dilemme du prisonnier. Deux personnes en prison, complices d'un même crime, sont séparées et interrogées sans possibilité de communiquer entre elles : elles ont le choix de se taire (coopérer) ou de dénoncer l'autre (faire défection). Si les deux se taisent, elles auront chacune deux ans de prison. Si les deux dénoncent, elles auront trois ans de prison. Si l'une dénonce et l'autre se tait, celle qui dénonce hérite d'un an de prison et l'autre de quatre ans de prison.

On résume ceci dans le tableau suivant :

		Personne B	
		Se tait	Dénonce
Personne A	Se tait	2 ans de prison / 2 ans de prison	4 ans de prison / 1 an de prison
	Dénonce	1 an de prison / 4 ans de prison	3 ans de prison / 3 ans de prison

Que doit faire chaque personne? Prenons la personne A :

- Si la personne B se tait, A hérite de deux ans de prison si elle se tait et d'un seul si elle dénonce. Donc, elle a intérêt à dénoncer.
- Si la personne B dénonce, A hérite de quatre ans de prison si elle se tait et de trois ans si elle dénonce. Donc, elle a encore intérêt à dénoncer.

Alors, le choix logique de A est de dénoncer. Comme le tableau est symétrique, le choix logique de la personne B est aussi de dénoncer. Donc, les deux personnes dénoncent et héritent chacune de trois ans de prison. Elles auraient hérité de seulement deux ans de prison si elles avaient décidé de se taire...

Le dilemme

Chacune des deux personnes a fait un raisonnement logique pour décider de dénoncer. Ces raisonnements sont incomplets : aucune des deux personnes n'a pris en compte dans sa démarche que l'autre personne puisse faire le même raisonnement logique qu'elle, et donc qu'elle risquait de décider, elle aussi, de dénoncer.

Le dilemme du prisonnier se retrouve sous de nombreuses formes dans la nature et dans l'organisation de la planète par l'homme. Sous sa forme générale, R (la récompense), T (la tentation), S (le sentiment de s'être fait duper) et P (la punition) représentent le gain (ou la perte lorsque le gain est négatif) que reçoivent les personnes A et B en fonction des choix faits par l'une et l'autre.

		Personne B	
		Coopère	Fait défection
Personne A	Coopère	R / R	S / T
	Fait défection	T / S	P / P

Chaque personne a intérêt à faire défection si $T > R$ et $P > S$. De plus, la double défection est pire que la double coopération si $R > P$. Donc, on a les conditions du dilemme du prisonnier dès que

$$T > R > P > S$$

Les exemples foisonnent.

Pensons au désarmement. Chaque pays a intérêt à s'armer pour se protéger : c'est la défection. Mais si l'un s'arme, l'autre le fait aussi... C'est la course aux armements. Les grands traités de désarmement sont des exemples de choix de coopération.

Il en est de même des traités de libre-échange. Chaque pays peut avoir intérêt à protéger ses entreprises locales et à mettre des tarifs douaniers pour l'entrée des marchandises étrangères. Mais alors, le pays partenaire réplique par des tarifs douaniers... Les traités de libre-échange sont donc des exemples de coopération.¹

C'est aussi le cas des négociations pour protéger l'environnement et le climat. Chaque pays a, individuellement, intérêt à faire défection et à laisser effectuer le gros des efforts de réduction des GES et de protection de l'environnement par les autres pays. Mais, si tous les pays font défection, tous les pays sont perdants.

Pour un athlète de haut niveau, choisir de se dopage est équivalent à un dilemme du prisonnier. Se dopage améliore les chances de gagner. Mais, si les autres athlètes se dopent, le dopage n'a plus que des inconvénients, dont le risque de se faire prendre.

Le dilemme du prisonnier est un exemple de jeu mathématique étudié par la théorie des jeux. C'est un jeu à somme non nulle, car ce que gagne un joueur n'est pas ce que perd l'autre².

Le dilemme du prisonnier itéré

En fait, la plupart des partenaires impliqués dans un dilemme du prisonnier vont choisir de faire défection. Mais, ce qui se passe souvent dans la réalité, c'est que les mêmes partenaires se retrouvent à rejouer le même jeu plusieurs fois. C'est là que peut se bâtir tranquillement la coopération. Au vu de l'évolution du jeu, les partenaires ajustent leur stratégie.

Il faut cependant une condition pour que la coopération se bâtisse. En effet, les deux partenaires pourraient s'entendre pour s'exploiter l'un l'autre en alternance. Il faut que ceci soit moins rentable que de toujours coopérer, ce qui donne la condition

$$2R > S + T.$$

Pour expliquer le phénomène et comprendre les conditions qui permettent à la coopération d'émerger, des chercheurs ont mis sur pied des expérimentations. La première expérimentation scientifique a été mise sur pied par le politologue Robert Axelrod qui a invité en 1979 des experts de théorie des jeux à « jouer » au dilemme. Chaque expert programait une stratégie et 200 parties étaient jouées par simulation informatique pour chaque paire de stratégies proposées, y compris une paire opposant chaque stratégie avec elle-même. La stratégie *ALÉATOIRE*, qui consiste à coopérer ou faire défection avec probabilité 50%-50% a aussi été ajoutée.

La stratégie déclarée gagnante est celle qui a permis de récolter le plus grand nombre de points après avoir joué 200 parties contre chaque stratégie. Cette stratégie, *Œil pour œil, dent pour dent*, et que nous appellerons *COPYCAT*, est la plus élémentaire. Elle a été

1. Plusieurs des exemples impliquent plus de deux joueurs : nous reviendrons sur ce point à la fin de l'article.
2. Des exemples de jeux à somme nulle se retrouvent dans « Existe-t-il une stratégie gagnante? », *Accromath* 12.2, 2017.



proposée par le professeur Anatol Rapoport de l'université de Toronto. Elle consistait en

- Coopérer au premier coup;
- Ensuite, à chaque coup, jouer ce que l'adversaire a joué au coup précédent.

Regardons les ingrédients de la stratégie *COPYCAT*.

- Au premier coup, on coopère, donc on ne provoque pas de conflit et on invite à la coopération. Donc, tant que le partenaire coopère, on coopère.
- Dès que le partenaire fait défection, on riposte immédiatement en faisant défection : on fait comprendre qu'on ne se laissera pas faire.
- Cependant, on pardonne après avoir répondu à une provocation dès que le partenaire coopère.
- La stratégie est prévisible, ce qui permet au partenaire de s'adapter au mode d'action proposé.
- La stratégie ne cherche pas à faire mieux que le partenaire : elle invite à un *partenariat gagnant-gagnant*.

Il n'y a pas besoin d'affinités ou d'amitiés pour que la coopération s'installe.

Revenons sur les traités de désarmement ou les traités de libre-échange. Les partenaires n'ont pas besoin d'être des alliés pour que la coopération s'installe. La coopération s'impose comme la solution maximisant les bénéfices pour chacune des parties.

Un autre exemple bien connu est celui où la collusion entre compagnies concurrentes est utilisée pour maintenir les prix hauts.

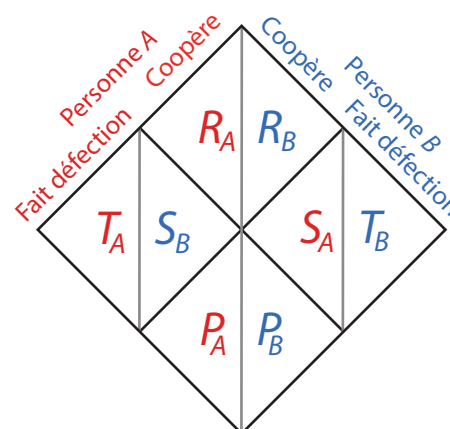
La guerre des tranchées de la première guerre mondiale a été le théâtre d'une coopération qui s'est établie. Les petits bataillons se faisant face dans les tranchées avaient le choix d'attaquer le bataillon en face (faire défection) ou de le ménager (coopérer). Plusieurs de ces bataillons avaient adopté la tactique de *VIVRE ET LAISSER VIVRE*, consistant à ménager l'ennemi en évitant de le bombarder, y compris lors de la récupération de corps, en bombardant à heure fixe ou sur des cibles

fixes lorsqu'obligés d'attaquer par les supérieurs de l'armée. Deux bataillons anglais et allemand ont même fraternisé lors de la trêve de Noël de 1914. La stratégie *VIVRE ET LAISSER VIVRE* était encore plus coopérative que *COPYCAT* : on permettait souvent deux défections avant de riposter. Cette stratégie s'est imposée parce que les petits bataillons se faisaient face pour de longues périodes de temps, et parce que le front était essentiellement figé.

De nombreux exemples de coopération sont observés dans la nature. On n'a qu'à penser aux insectes vivant en colonies, comme les abeilles, les guêpes et les fourmis. Les labres nettoyeurs sont de petits poissons qui pénètrent dans la bouche ou les branchies de plus gros poissons pour y manger les parasites. Pour prévenir le petit poisson qu'il faut sortir, le gros poisson ferme légèrement sa bouche et secoue un peu son corps. Il prend le temps de prévenir même lorsqu'il est lui-même en danger : c'est sa manière de coopérer. Ceci se passe dans des habitats limités comme des coraux et pas en pleine mer : les partenaires apprennent à se connaître et à se faire confiance.

Les antilopes impalas adultes se toilettent mutuellement en s'enlevant des parasites sur la tête et dans le cou. Ce toilettage comprend souvent de six à 12 échanges réciproques. Celui entre adultes mâles se produit même entre individus sans lien de parenté.

Remarquons que dans certains de ces exemples les deux partenaires ne sont pas identiques, et donc les coûts-bénéfices ne sont pas les mêmes pour les deux. On se retrouve alors avec un tableau



La personne *A* a intérêt à faire défection si

$$T_A > R_A > P_A > S_A,$$

et la personne *B* a intérêt à faire défection si

$$T_B > R_B > P_B > S_B,$$

et on ajoute les deux conditions favorisant l'établissement de la coopération, soit

$$2R_A > S_A + T_A, \quad 2R_B > S_B + T_B.$$

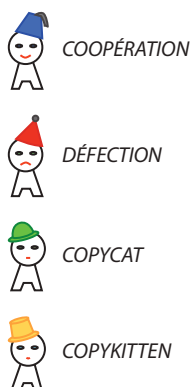
Les épinoches sont de petits poissons avec des épines dorsales les protégeant de nombreux prédateurs, mais pas du brochet. Lorsqu'un brochet rode, des épinoches s'approchent pour voir s'il semble dangereux ou s'il est plutôt assagi, par exemple parce que rassasié. Dans le premier cas, les épinoches doivent lancer un sauve-qui-peut. Mais un sauve-qui-peut est aussi dangereux parce que d'autres brochets ou prédateurs peuvent roder autour du groupe d'épinoches. Les épinoches s'approchent donc souvent à deux avec de petits sauts pour tester le brochet. S'approcher à deux augmente leur chance de s'en sortir si le brochet décide d'attaquer parce que le brochet est dérouté par la présence de deux proies, et le fait de devoir choisir entre les deux peut induire un délai de réaction. La coopération se produit quand les deux épinoches s'approchent simultanément. Une épinoche fait défection quand elle reste plus loin du brochet que l'autre. Les biologistes considèrent chacun des petits sauts comme une ronde du dilemme du prisonnier itéré.

À l'échelle microscopique, le corps humain est un amalgame de cellules qui coopèrent pour assurer le bon fonctionnement du corps: ceci inclut la réparation des cellules ou la destruction (apoptose) des cellules en fin de vie utile. Les cellules cancéreuses peuvent être vues comme des cellules faisant défection. Souvent créées par des mutations, elles peuvent par exemple se diviser sans contrôle, alors qu'elles ne le devraient pas, ou encore refuser de se suicider ou de se réparer lorsque requis. Le mathématicien Martin Nowak a étudié le développement des cellules cancéreuses sous l'angle du dilemme du prisonnier.

Les forces et les vulnérabilités des différentes stratégies

Dans les expériences conduites par Axelrod, les stratégies qui se sont classées au sommet sont toutes des stratégies *altruistes*, c'est-à-dire qui commençaient par coopérer. Et les stratégies agressives commençant par une défection se sont toutes mal classées. Axelrod a ensuite organisé un deuxième tournoi, cette fois-ci avec 62 compétiteurs, plus *ALÉATOIRE*. Les compétiteurs étaient tous au courant des résultats de la première ronde et du succès des stratégies altruistes. Des stratégies très sophistiquées ont été proposées. Mais, pourquoi changer une formule gagnante? Anatol Rapoport est revenu avec *COPYCAT* et, encore une fois, il a remporté le tournoi.

Cependant, un défaut de l'expérience d'Axelrod est que les stratégies programmées par ses experts sont déterministes. Or, dans la nature, on ne peut exclure des événements aléatoires ou encore des mutations. Prenons le cas de la stratégie *COPYCAT*. Supposons que deux partenaires aient choisi cette stratégie. Alors, normalement, ils coopéreront toujours. Mais si, pour une raison inconnue, un des partenaires fait défection, alors ils entreront dans un cycle infini où ils feront défection et coopéreront en alternance, à moins d'une nouvelle déviation de la stratégie. Des stratégies ont été proposées pour éviter un tel cercle vicieux. Une variante



appelée *COPYKITTEN* a été proposée par Robert May : elle consiste à pardonner la première défection et à sévir seulement à la deuxième défection. Cette stratégie a des pour et des contre. Parmi les pour, elle est altruiste et permet de sortir d'un cycle infini généré par deux partenaires utilisant *COPYCAT* lorsqu'il y eu une erreur. Parmi les contre, le partenaire peut facilement la deviner et l'exploiter en introduisant des défections isolées qui ne seront pas punies et qui généreront un meilleur gain que de coopérer systématiquement.

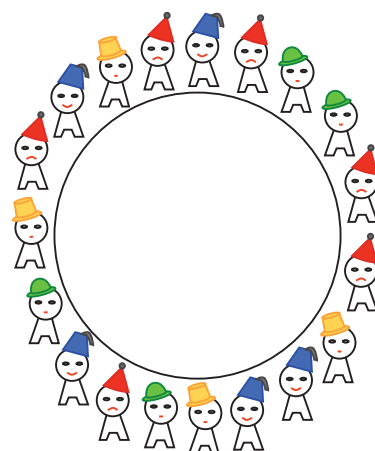
L'évolution de la coopération

Cette évolution a été étudiée par Martin Nowak et Karl Sigmund via des simulations informatiques dans un contexte où il y a de l'aléatoire.

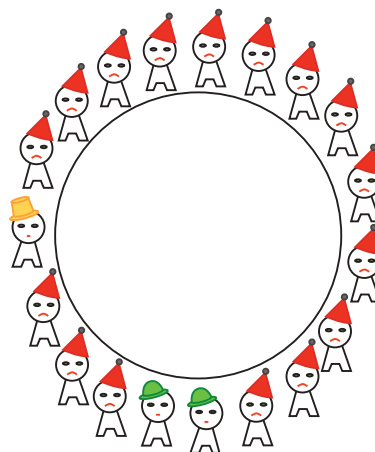
Prenons une population employant diverses stratégies. Voici quelques exemples :

- *COPYCAT* : Œil pour œil, dent pour dent;
- *COOPÉRATION* : Coopérer toujours;
- *DÉFECTION* : Faire toujours défection;
- *ALÉATOIRE* : Jouer au hasard;
- *COPYKITTEN* : Coopération au départ, pardonner les défections isolées, faire défection après deux défections consécutives et recommencer à coopérer chaque fois que le partenaire revient à la coopération;
- *RANCUNE* : Coopérer jusqu'à ce que le partenaire fasse défection. Ensuite défection continue.
- Ou encore une des stratégies précédentes mais en y introduisant un peu d'aléatoire.

Martin Nowak et Karl Sigmund ont créé sur ordinateur une population fictive en attribuant aux individus des stratégies différentes, lesquelles contenaient toutes des possibilités d'erreurs ou au moins un peu d'aléatoire et ont organisé des tournois entre des paires de partenaires. Après un certain nombre de rondes, ils éliminaient les perdants, alors que ceux qui gagnaient se multipliaient, ici encore avec un peu d'aléatoire. Voici le genre d'évolution qu'ils ont observée. Nous nous limiterons à quatre types de stratégies (voir marge à gauche) :



- Dans un premier temps, l'évolution a semblé chaotique, en ce sens qu'aucune règle, ni organisation n'a semblé émerger.
- Puis les *DÉFECTION* se sont multipliés jusqu'à presque envahir la population, puisqu'ils sont gagnants dans l'interaction avec n'importe quel partenaire.

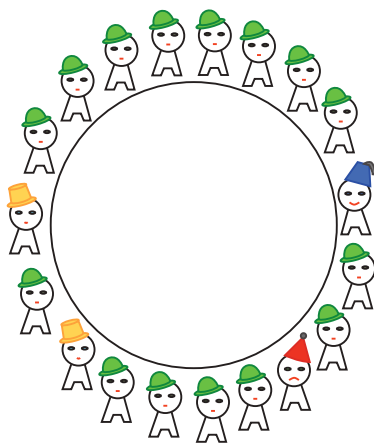


- Le gain est substantiel quand un *DÉFECTION* se mesure à un partenaire qui coopère, mais il est faible lorsque deux partenaires font défection. Si la population contient beaucoup de *DÉFECTION*, alors le gain moyen des *DÉFECTION* diminue sensiblement. Les quelques *COPYCAT* peuvent alors réussir à reprendre du poil de la bête et à se multiplier en exploitant le gain qu'ils font en affrontant d'autres *COPYCAT*, et la coopération commence à se bâtir.
- Les *COPYCAT* envahissent la population.
- Mais une population comprenant trop de *COOPÉRATION* est vulnérable aux *DÉFECTION* qui les exploitent systématiquement. Et le cycle recommence...

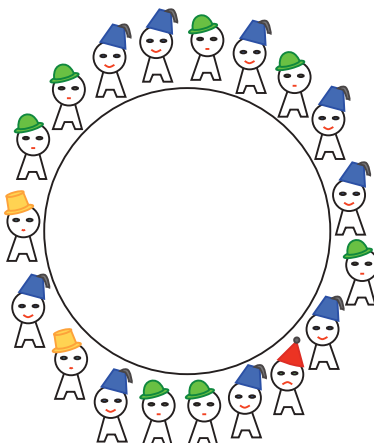
Ces travaux datent du début des années 2000. Sont-ils prémonitoires? Après des années de libre-échange on voit réapparaître le protectionnisme, et l'Organisation mondiale du commerce voit son rôle diminuer. Au niveau politique, il en est de même du multilatéralisme. Et les COP récentes sur le climat deviennent moins productives que celles de 2015 qui avait débouché sur l'accord de Paris.

Passer de deux partenaires à n partenaires

Nous n'avons abordé que la modélisation à deux partenaires, et pourtant beaucoup des exemples donnés ci-dessus impliquent plus de deux partenaires... Le type de gain et sa structure (par exemple si le gain est linéaire ou non linéaire) déterminent le genre de régimes qui s'installent, dont l'évolution vers la coopération, ou encore la coexistence de plusieurs stratégies. La motivation derrière ces travaux est de justifier a posteriori l'observation expérimentale que la coopération peut s'installer même quand une approche égoцентриque peut paraître plus séduisante a priori. Dans les applications en économie ou en politique comme, par exemple, les COP climatiques, l'objectif est de rechercher des conditions qui vont favoriser la coopération, en ayant à l'esprit que de telles conditions peuvent exister.



- Ceci permet alors aux quelques *COOPÉRATION* de se multiplier. (Même si les *COOPÉRATION* avaient complètement disparu, ils peuvent réapparaître à cause de l'aléatoire et, en présence de *COPYCAT*, un *COOPÉRATION* peut prospérer.)



Les nombres décimaux sont si communs de nos jours qu'on ignore parfois qu'ils sont le fruit d'une longue épopée à travers l'histoire de l'humanité. Retour sur l'origine des nombres.

L'o-dix-ée vers l'ouest

Jérôme Fortier
Université McGill

Dix doigts ne suffisent pas

L'évolution a conféré dix doigts à l'espèce humaine, ainsi que la faculté de s'en servir pour compter, c'est à dire de représenter une petite quantité d'objets et d'effectuer naturellement des opérations simples comme des comparaisons et des additions.

Au néolithique, les sociétés s'organisent autour de l'agriculture et du commerce, et la complexité des problèmes mathématiques (comme tenir un inventaire, mesurer la taille d'un champ ou établir la valeur d'une marchandise) dépasse vite la capacité de nos dix doigts. Il faut donc développer des outils pour pouvoir compter plus loin.

L'écriture, apparue indépendamment dans plusieurs civilisations à cette étape de leur développement, s'impose comme un outil idéal pour représenter de grands nombres et effectuer des calculs complexes.

Si un doigt représente seulement une unité, alors les doigts nous limitent à compter jusqu'à dix¹. Mais si on se représente le tout comme une *dizaine*, qu'on dénote par un nouveau symbole, on peut compter ces dizaines avec nos doigts et ainsi de suite.

Cette idée de regroupement se retrouve, d'une façon ou d'une autre, dans tous les systèmes d'écriture numérique connus de l'histoire ancienne. On la retrouve gravée dans la pierre de temples égyptiens vieux de deux à cinq millénaires, sous forme de *hiéroglyphes*. Par exemple le nombre 2026 s'y écrit



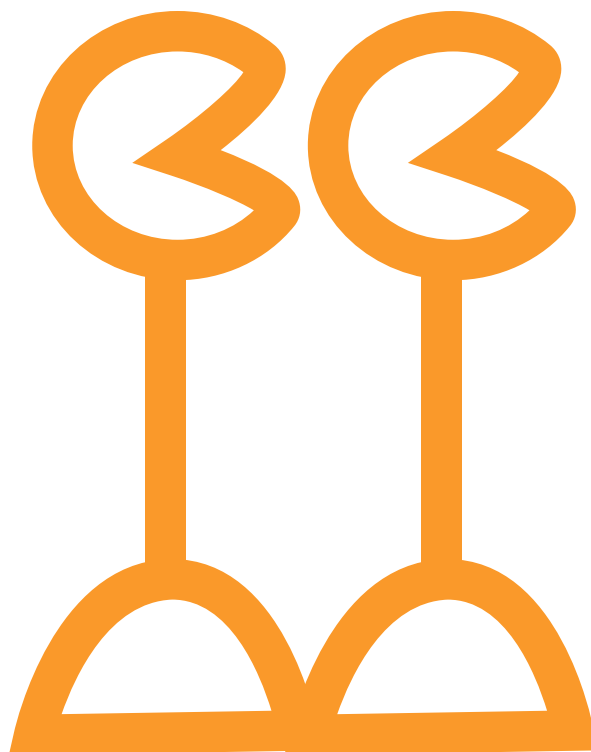
1. L'utilisation des dix doigts comme base pour représenter les nombres est assez commune dans l'humanité, pas universelle : certaines sociétés se sont basées sur d'autres quantités. Voir En savoir plus dans Number Words and Number Symbols, A Cultural History of Numbers. pour un portrait global.

I	L'unité est représentée par le bâton.
∩	La dizaine par l'anse de panier.
ρ	La centaine par le rouleau de papyrus.
⌋	Le millier par la fleur de lotus.
∪	Dix mille par le doigt désignant les étoiles.
↵	Cent mille par le têtard.
⌋	Le million par un dieu agenouillé soutenant le monde.

Tableau 1

Hiéroglyphes égyptiens, dès 2650 av. J-C.

Les limites d'un système basé uniquement sur la notion de regroupement s'imposent vite : les nombres peuvent être très longs à lire et à écrire, et puisqu'il faut inventer un nouveau symbole pour chaque nouvelle puissance de dix, on ne peut pas gérer de très grands nombres. La solution à ce problème, soit le système décimal *positionnel*, trouve ses véritables origines beaucoup plus à l'est.



Au pays du soleil levant

En Chine, les plus anciennes traces d’écriture sont gravées sur des morceaux d’os ou d’écailles de tortue (l’écriture *ossécaille*). On y retrouve notamment les chiffres de 1 à 9, qu’on peut combiner à d’autres symboles pour représenter les dizaines, centaines, etc. Par exemple, le nombre 356 s’écrit 𠄎 𠄎 𠄎.

1	—	7	⊥
2	=	8	) (
3	≡	9	⌘
4	≡	10	
5	⊗	100	⊗
6	⌞	1000	⌞

Tableau 2

Écriture ossécaille. Chine, dynastie Shang (1570 à 1046 av. J.-C.)

Vers le cinquième siècle av. J.-C., les mathématiciens chinois avaient développé des méthodes de calcul avec de petites baguettes disposées en rangées et en colonnes sur une surface (des tableaux de calcul). Comme il n’était pas possible, dans ce contexte, d’introduire un nouveau symbole pour chaque nouvelle puissance de dix, ils utilisèrent plutôt les colonnes du tableau pour cela, en alternant entre deux séries de dispositions de baguettes pour représenter les chiffres de 1 à 9.

	Unités, centaines	Dizaines, milliers
1	—	
2	=	
3	≡	
4	≡	
5	≡	
6	⊥	⊥
7	⊥	⊥
8	≡	⊥
9	⊥	⊥

Tableau 3 – Des baguettes chinoises

Par exemple, le nombre 27 603 s’écrit = ⊥ ⊥ ≡: (notons l’espace vide pour représenter le zéro). Ainsi, on pouvait, d’un tour de baguettes, effectuer rapidement des calculs complexes, allant des simples additions et soustractions aux racines carrées et cubiques.

Vers l’an zéro de notre ère, on utilisait même des baguettes de différentes couleurs pour dénoter les nombres négatifs. Le concept de nombre négatif était complètement absent des mathématiques occidentales à ce moment-là.

L’innovation indienne

Au tournant du VII^e siècle, les Indiens délaissèrent tous les symboles utilisés jusque là pour écrire les nombres, à l’exception des chiffres de 1 à 9, et adoptèrent ainsi le système décimal positionnel à l’écrit. Certains historiens expliquent ce changement par l’influence des Chinois, avec qui les Indiens marchandaient.

On attribue au mathématicien indien Brahmagupta l’invention du nombre zéro, à l’équilibre entre les entiers positifs (avoirs) et négatifs (dettes). On trouve d’ailleurs, dans un temple près de Gwalior en Inde centrale, l’un des premiers usages d’un point au lieu de l’espace vide pour représenter le zéro. Ce point devint graduellement un cercle avec l’évolution de l’écriture.

	Brahmi III ^e siècle av. J.C.	Temple de Gwalior IX ^e siècle	Sanskrit-Devanagari dès le XI ^e siècle
0		.	०
1	—	𑀓	१
2	=	𑀔	२
3	≡	𑀕	३
4	⊥	𑀖	४
5	⊥	𑀗	५
6	≡	𑀘	६
7	⊥	𑀙	७
8	≡	𑀚	८
9	⊥	𑀛	९

Tableau 4 – Évolution des chiffres indiens



Brahmagupta 598-668



Al-Khwarizmi
783-850

La conquête arabe

Du VII^e au VIII^e siècle, l'empire arabo-musulman est en pleine expansion, et s'étendra, à son apogée, du Portugal jusqu'en Inde (Voir carte en bas de page).

À Bagdad, la capitale impériale, le calife fit construire la *Maison de la Sagesse*, une bibliothèque où étaient rassemblés les plus grands savants et des documents des quatre coins de l'empire. Le savant d'origine perse, al-Khwarizmi², y traduisit les travaux de mathématiciens indiens dans la langue et la calligraphie arabe. Il propagea ainsi l'usage du système décimal positionnel à tout l'empire.

	Arabe orientale depuis le IX ^e siècle	Arabe occidentale Ghubarie vers le X ^e siècle
0	•	0
1	١	1
2	٢	2
3	٣	3
4	٤	4
5	٥	5
6	٦	6
7	٧	7
8	٨	8
9	٩	9

Tableau 5 – Les chiffres arabes

2. Voir dans En savoir plus sur les travaux d'al-Khwarizmi.



Figure 1 – L'empire arabo-musulman

D'autres savants traduisirent les travaux des géomètres de l'ancienne civilisation grecque en langue arabe, et ce mélange d'idées et de cultures harmonisa la science mathématique en un tout cohérent. Mais ils ne se contentèrent pas de traduire les mathématiques : ils les poussèrent plus loin. Par exemple, le mathématicien al-Samaw'al [1125-1174] appliqua, au système décimal, les méthodes de Diophante d'Alexandrie [III^e siècle] pour développer l'arithmétique des *nombres à virgule* à un degré arbitraire de précision. Le système décimal n'était donc plus seulement utile pour représenter les nombres entiers, mais bien n'importe quelle quantité réelle.

L'entrée en Europe

Les croisades opposèrent les armées musulmanes et chrétiennes pendant des siècles au moyen âge. Ces dernières réussirent à arracher l'Espagne aux musulmans et, avec elle, certains fragments de connaissance mathématique. Gerbert d'Aurillac³ se servit des chiffres de 1 à 9 pour concevoir des abaquas. Le zéro, qui n'a aucun équivalent dans les chiffres romains, prit plus de temps à s'imposer chez les intellectuels de l'époque.

C'est un fils de marchand, Fibonacci⁴, qui en établit l'usage, deux siècles plus tard. Ce dernier avait reçu une éducation mathématique dans le monde arabe au cours des voyages de son père, et publia un traité de mathématiques, *Liber Abaci*⁵, où le système décimal était appliqué à résoudre une panoplie de problèmes concrets.

Au XV^e siècle, avec l'avènement de la presse de Gutenberg, l'écriture même des dix chiffres s'est cristallisée pour devenir la norme.

Gerbert XI ^e siècle	Fibonacci XIII ^e siècle	Gutenberg XV ^e siècle
	○	0
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5
6	6	6
7	7	7
8	8	8
9	9	9

Tableau 6 – Les chiffres européens

Cap vers le nouveau monde

Comme beaucoup d'autres éléments de la culture européenne, l'imposition du système décimal en Amérique s'est faite par la force de la colonisation, et souvent au détriment de la culture locale.

Par exemple, les conquistadors espagnols, lorsqu'ils envahirent l'actuel Mexique, balayèrent du même coup le fait que les Mayas, qui y vivaient avant eux, utilisaient eux-mêmes un système positionnel, basé sur le nombre vingt plutôt que dix, et incluant le zéro. C'est un héritage que l'on redécouvre à peine, depuis moins d'un siècle.

Ainsi, même un élément de notre quotidien aussi banal que les chiffres porte en lui toute l'histoire de l'humanité.



Gerbert d'Aurillac
940-1003



Fibonacci
vers 1175-1250

Autres écritures positionnelles

Dans l'écriture babylonienne, la valeur d'un paquet dépend de deux choses : le nombre de fois que les symboles 𐎶 pour 1 et 𐎵 pour 10 sont répétés dans le paquet et la puissance de 60 correspondant à la position du paquet dans le nombre. Chaque paquet a donc une valeur interne et une valeur de position. Ainsi, pour représenter le nombre $46\,084 = 12 \times 60^2 + 48 \times 60 + 4$, on écrit 𐎶𐎶 𐎵𐎵𐎵𐎵 𐎶.

En écriture maya, les symboles sont 0 pour le zéro • pour le 1 et — pour le 5. Les nombres sont écrits par paquets superposés selon leur puissance de 20. Ainsi, pour écrire $7\,613 = 19 \times 20^2 + 0 \times 20^1 + 13 \times 20^0$, on a

$$19 \times 20^2 = 19 \times 400 = 7600 \quad \begin{array}{c} \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \text{—} \end{array}$$

$$0 \times 20^1 = 0 \quad \begin{array}{c} \text{0} \end{array}$$

$$13 \times 20^0 = 13 \times 1 = 13 \quad \begin{array}{c} \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \text{—} \end{array}$$

3. Gerbert d'Aurillac est devenu le pape Sylvestre II, l'unique pape mathématicien.

4. Léonard de Pise, de son vrai nom.

5. C'est aussi dans ce traité de 1202 qu'on retrouve la célèbre suite de Fibonacci : 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34...

Du carré naturel au carré magique parfait : le secret des diagonales brisées

Dans un carré magique, la diagonale brisée brise-t-elle la magie ?

Kenichi Takemura
Chercheur indépendant¹

Introduction

Connaissez-vous les carrés magiques ? Voici un exemple : on écrit les nombres de 1 à 16, chacun une seule fois, dans un quadrillage 4×4, de sorte que la somme de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale soit toujours la même, à savoir 34. C'est un carré étonnant, et il est loin d'être unique : il existe en tout 880 carrés magiques d'ordre 4.

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

Figure 1 : Un exemple de carré magique d'ordre 4

Vérifiez par vous-même que toutes les sommes valent bien 34 ! Ce nombre 34 s'appelle la *constante magique* ; c'est le cœur battant de tout carré magique d'ordre 4.

Somme : 34

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

Figure 2 : La somme de chaque ligne, colonne et diagonale est toujours 34

Considérons maintenant une disposition radicalement différente : la plus simple qui soit.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Figure 3 : Le carré naturel d'ordre 4

Décevant, n'est-ce pas ? Les nombres sont simplement écrits dans l'ordre, de gauche à droite et de haut en bas. Appelons cela le *carré naturel d'ordre 4*. « Ce n'est qu'une liste ordonnée, ça n'a rien d'intéressant », pourrait-on penser. Pourtant, attendez un instant !

Cette disposition apparemment banale cache un secret que même les carrés magiques pourraient envier. De quoi s'agit-il ?

Qu'est-ce qu'une diagonale brisée ?

Concentrons-nous sur les lignes diagonales. Il existe un concept peu connu : celui de *diagonale brisée*, qui généralise la notion habituelle de diagonale.

1. Kenichi Takemura est un chercheur indépendant basé à Tokyo, au Japon. Ses travaux portent sur les soaisu (nombres d'affection mutuelle), une généralisation du problème de Prouhet-Tarry-Escott, ainsi que sur les symétries cachées dans les carrés magiques et les arrangements magiques naturels. Il partage activement la beauté des mathématiques via son site web (www.kazunosekai.com), son blog et sa chaîne YouTube (<https://www.youtube.com/channel/UCCN6pN9ISzSU-xHad7oA-zbg>).

Diagonales brisées

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Figure 4: Les diagonales brisées du carré naturel d'ordre 4

Examinons concrètement les 4 diagonales brisées « descendantes vers la droite » (↘) du carré naturel d'ordre 4. Dans un carré ordinaire, on ne considère que les 2 grandes diagonales passant par le centre; mais les diagonales brisées suivent la règle suivante: « lorsqu'on atteint un bord, on réapparaît du côté opposé ». Elles regroupent ainsi tous les alignements parallèles aux diagonales:

- $L_1 = \{1, 6, 11, 16\}$ (diagonale principale);
- $L_2 = \{2, 7, 12, 13\}$ (commence en 2, puis saute à 13 en atteignant le bord droit);
- $L_3 = \{3, 8, 9, 14\}$ (commence en 3, puis saute à 9 en atteignant le bord droit);
- $L_4 = \{4, 5, 10, 15\}$ (commence en 4, puis effectue des sauts vers le bas et vers la droite).

Il existe également 4 diagonales brisées montantes (↗), soit 8 diagonales brisées au total. Et voici ce qu'il y a de remarquable: dans le carré naturel d'ordre 4, la somme des 4 nombres sur *chacune* de ces 8 diagonales brisées est toujours exactement la constante magique 34!



Somme : 34

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Figure 5: Sur chaque diagonale brisée du carré naturel d'ordre 4, la somme des 4 nombres vaut 34.

Est-ce une coïncidence? Quel secret se cache derrière ce phénomène? Avant de lever le voile, prenez un moment pour y réfléchir.

À la conquête du carré naturel d'ordre n

Jusqu'ici, nous avons étudié le cas 4×4 . Or, la vraie beauté des mathématiques réside dans la *généralité*: le résultat vaut-il pour *toute* taille de carré ? Élargissons donc notre regard au carré $n \times n$, c'est-à-dire d'ordre n .

Dans le carré naturel d'ordre n , les nombres 1, 2, 3, ... sont disposés dans l'ordre, de gauche à droite et de haut en bas. Chaque case est entièrement déterminée par deux informations: son numéro de ligne et son numéro de colonne. La structure est on ne peut plus simple ! Pour faciliter les calculs, nous numérotions lignes et colonnes à partir de 0 (autrement dit, la case en haut à gauche est la case « ligne 0, colonne 0 »).

Définissons à présent les diagonales brisées pour un ordre n quelconque. Puisqu'il y a deux directions diagonales, il y a deux types de règles.

Définition générale des diagonales brisées

1. Direction principale (descendante $\searrow$) : ce sont les alignements où les numéros de ligne et de colonne augmentent au même rythme. Ils se caractérisent par la propriété : la *différence* entre le numéro de ligne et celui de colonne est constante modulo n (c'est-à-dire à un multiple de n près)
2. Direction secondaire (montante $\nearrow$) : ce sont les alignements où le numéro de ligne augmente tandis que celui de colonne diminue. Ils se caractérisent par la propriété : la somme des numéros de ligne et de colonne est constante modulo n .

Notre objectif est de démontrer que la somme de chacune de ces $2n$ diagonales brisées est toujours égale à la *constante magique* du carré magique d'ordre n (somme d'une ligne, d'une colonne, ou d'une diagonale) :

$$M_n = \frac{n(n^2 + 1)}{2}.$$

Somme : 65

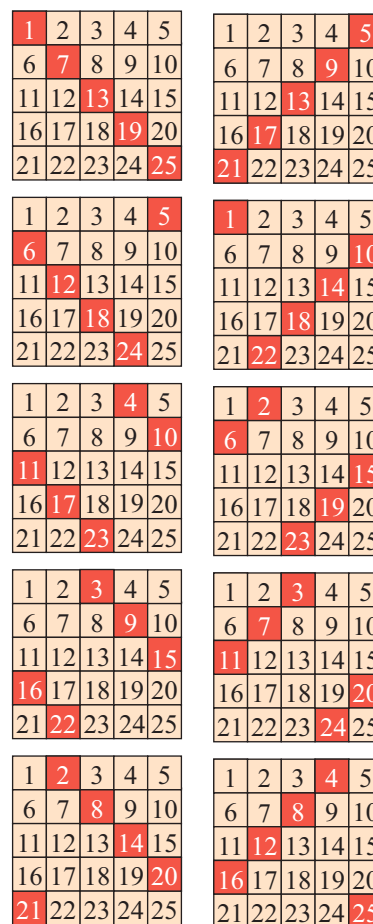


Figure 6: Les 10 diagonales brisées du carré naturel d'ordre 5 ont toutes pour somme 65

Pourquoi les sommes coïncident-elles ?

Théorème 1

La somme de chacune des diagonales brisées du carré naturel d'ordre n est égale à la constante magique M_n .

En un mot, le secret est le suivant : sur chaque diagonale brisée, les numéros de ligne et les numéros de colonne prennent chacun exactement une fois toutes les valeurs de 0 à $n - 1$.

Prenons par exemple, pour $n = 4$, la diagonale brisée descendante $\{2, 7, 12, 13\}$. Les cases occupées sont (0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0) : les numéros de ligne $\{0, 1, 2, 3\}$ comme les

numéros de colonne $\{1, 2, 3, 0\}$ contiennent bien chacune des valeurs de 0 à 3, une fois et une seule. C'est précisément le mécanisme du « saut vers le bord opposé » qui garantit cette propriété.

La valeur de chaque case est déterminée par la combinaison « numéro de ligne $\times n$ » + « numéro de colonne » + « 1 » ; la somme sur une diagonale brisée s'écrit donc :

(somme des numéros de ligne) $\times n$ + (somme des numéros de colonne) + n .

La somme des numéros de ligne comme celle des numéros de colonne valent toutes deux

$$0 + 1 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2};$$

la somme sur chaque diagonale brisée est donc :

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)}{2} \times n + \frac{n(n-1)}{2} + n \\ = \frac{n(n^2+1)}{2} = M_n. \end{aligned}$$

La constante magique apparaît !

Ce simple raisonnement suffit à établir, pour tout entier n , que la somme de chaque diagonale brisée du carré naturel d'ordre n est égale à M_n . Voilà toute la puissance des mathématiques² !

Pour aller plus loin

Le carré magique présenté en introduction est en réalité bien plus qu'un carré magique ordinaire !

Somme : 34

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

Figure 7: Un carré magique d'ordre 4 parfait : les 8 diagonales brisées ont toutes pour somme 34

Pour aller plus loin pour les amateurs de mathématiques

Notons $a_{ij} = ni + j + 1$ la valeur de la case ligne i , colonne j du carré naturel d'ordre n (avec $i, j = 0, 1, \dots, n-1$). La somme d'une diagonale brisée descendante ($i - j \equiv k \pmod{n}$) vaut :

$$S_k = \sum_{j=0}^{n-1} [n \times ((j+k) \bmod n) + j + 1].$$

Lorsque j parcourt $0, 1, \dots, n-1$, la quantité $(j+k) \bmod n$ prend exactement une fois chacune des valeurs $0, 1, \dots, n-1$, d'où :

$$\begin{aligned} S_k &= n \times \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + n \\ &= \frac{n(n^2+1)}{2} = M_n. \end{aligned}$$

Le cas des diagonales montantes ($i + j \equiv k \pmod{n}$) est analogue.

En effet, non seulement la somme de chaque ligne, colonne et grande diagonale vaut 34, mais la somme de chacune des diagonales brisées est elle aussi égale à 34 !

Un carré magique jouissant de cette propriété supplémentaire est appelé *carré magique parfait*. Nous l'appellerons *carré magique pandiagonal* : il possède le plus haut degré de symétrie parmi tous les carrés magiques.

Autres propriétés prodigieuses du carré magique parfait d'ordre 4

Le carré magique parfait d'ordre 4 présenté ici possède d'autres caractéristiques fascinantes au-delà des diagonales brisées. L'une d'elles est que la somme des quatre nombres contenus dans n'importe quel « bloc 2×2 » est également toujours égale à 34 (la constante magique). Parmi les 880 carrés magiques d'ordre 4 existants, 48 sont parfaits.

2. Le lecteur observateur aura peut-être noté que, dans le carré naturel d'ordre 4, on pourrait remplacer la paire $\{6, 11\}$ par $\{7, 10\}$ dans une diagonale brisée sans changer la somme. Cela n'est pas surprenant : ce qui compte, c'est que chaque ligne et chaque colonne soit représentée exactement une fois. C'est là, précisément, l'essence même de la démonstration du théorème 1.

Somme : 34

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

Figure 8 : La propriété de somme constante des blocs 2x2 dans un carré magique parfait d'ordre 4 (la somme des 4 nombres vaut toujours 34)

Cette propriété peut être étendue. En juxtaposant quatre copies du carré magique parfait pour former une grille 8x8, on constate que les 16 blocs 2x2 – y compris ceux qui franchissent les bords – ont tous pour somme 34. Cela reflète la structure d'un tore (surface en forme de beignet) : « quand on atteint un bord, on réapparaît du côté opposé ».

Somme : 34

1	8	10	15	1	8	10	15
12	13	3	6	12	13	3	6
7	2	16	9	7	2	16	9
14	11	5	4	14	11	5	4
1	8	10	15	1	8	10	15
12	13	3	6	12	13	3	6
7	2	16	9	7	2	16	9
14	11	5	4	14	11	5	4

■ Bloc intérieur
■ Bord vertical
■ Bord horizontal
■ Double bord

La mystérieuse structure commune

En réalité, il existe une structure commune inattendue entre le carré naturel et le carré magique parfait, bien que cela ne soit pas évident à première vue. Dans ces deux carrés, la somme des « quatre nombres aux coins » ainsi que la somme des quatre nombres du « bloc central (2 x 2) » sont toutes deux égales à 34, la constante magique.

Somme : 34

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

Figure 9 : La somme des quatre nombres aux coins est de 34 pour le carré naturel comme pour le carré magique parfait

Somme : 34

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

Figure 10 : La somme des quatre nombres du bloc central est de 34 pour le carré naturel comme pour le carré magique parfait.

Grâce à cette propriété, on s'aperçoit que les deux carrés possèdent une « structure de division égale en deux parties » : en séparant les « 8 nombres situés sur les deux diagonales » des « 8 autres nombres », la somme totale du carré (136) est répartie exactement par moitié (68 chacune).

Somme : 34

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

Figure 11 : Structure de division égale de la somme totale partagée par le carré naturel et le carré magique parfait

Cette caractéristique structurelle est une propriété universelle que l'on retrouve dans chacun des 48 types de « carrés magiques parfaits d'ordre 4 » parmi les 880 carrés magiques existants. Le carré naturel, qui semble n'être qu'une simple suite ordonnée de nombres, est peut-être, contre toute attente, un proche parent des carrés magiques. La relation entre ces deux carrés mériterait d'être explorée plus en profondeur.

La constante magique et les nombres triangulaires centrés

La constante magique M_n peut être définie comme la valeur moyenne des entiers de 1 à n^2 :

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n^2} k = \frac{n(n^2 + 1)}{2}.$$

Observons comment M_n croît lorsque n augmente (accroissement $C_n = M_n - M_{n-1}$):

- $M_1 = 1$
- $M_2 = 5$ (+4)
- $M_3 = 15$ (+10)
- $M_4 = 34$ (+19)

Les accroissements successifs 1, 4, 10, 19, 31, ... sont précisément les *nombres triangulaires centrés*. Un nombre triangulaire centré représente un point central entouré de trois triangles de points; son expression est :

$$C_n = 3T_{n-1} + 1 = \frac{3n^2 - 3n + 2}{2}.$$

où $T_{n-1} = n(n-1)/2$ désigne le $(n-1)$ -ième nombre triangulaire. On vérifie: $C_1 = 1$, $C_2 = 4$, $C_3 = 10$, $C_4 = 19$. Exact ! Autrement dit, M_n s'obtient en empilant, couche par couche, les nombres triangulaires centrés du rang 1 au rang n : par exemple, pour le carré d'ordre 4,

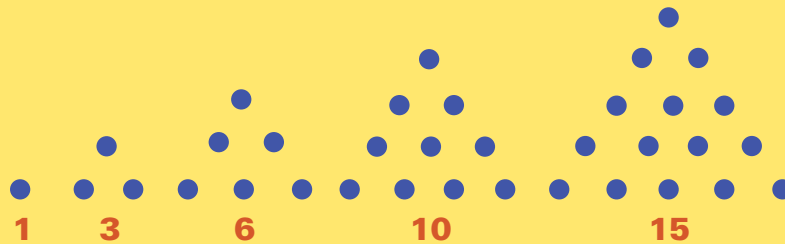
$$1 + 4 + 10 + 19 = 34.$$

Mais pourquoi les accroissements sont-ils exactement des nombres triangulaires centrés ? On peut le vérifier mécaniquement en calculant la différence $M_n - M_{n-1}$ à partir de la formule polynomiale de M_n . Puisque M_n est un polynôme de degré 3 en n , il est naturel que son accroissement C_n soit un polynôme de degré 2, donc une suite de type triangulaire.

Mais y a-t-il, au-delà du calcul algébrique, une raison géométrique profonde pour laquelle des triangles surgissent ainsi dans le monde des carrés ? Nous vous invitons à y réfléchir ! Le monde des carrés (le carré naturel) et le monde des triangles (les nombres triangulaires) semblent se rejoindre de façon étonnamment belle. N'est-ce pas fascinant ?

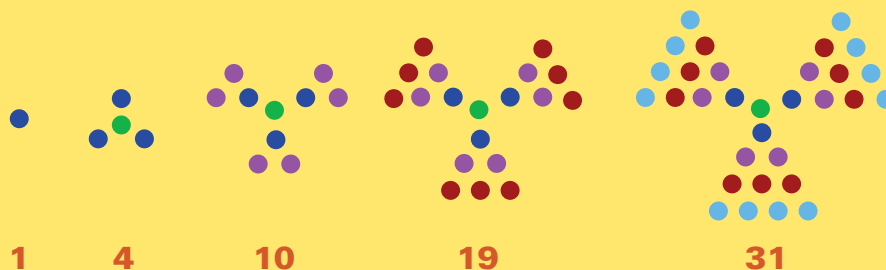
Nombres triangulaires

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$



Nombres triangulaires centrés

$$C_n = 3T_{n-1} + 1 = 3 \frac{(n-1)n}{2} + 1 = \frac{3n^2 - 3n + 2}{2}$$



*Le Lotto 6/49 fait rêver, intrigue et souvent déçoit.
Si certains billets valent des millions, la vaste majorité n'offrent
aucun retour. Entre promesse de richesse et lois des probabilités,
quelles sont les chances exactes de gagner
— et combien vaut réellement un billet joué ?*

LE LOTTO 6/49

Christian Genest
Université McGill

Samuel Valiquette
Université de Sherbrooke

Inauguré le 12 juin 1982, le Lotto 6/49 est une loterie pancanadienne administrée par la Société de la loterie interprovinciale (SLI), dont le siège social est situé à Toronto. Cette loterie fut la première au pays à permettre la sélection des numéros figurant sur le billet. De ce fait, elle a vite gagné en popularité et jouit encore aujourd'hui d'un grand engouement.

Pour la modique somme de 3 \$, toute personne ayant l'âge légal requis (18 ans au Québec, 19 ans dans quelques autres provinces ou territoires) peut acheter une participation pour le tirage du mercredi ou du samedi. Un billet est composé de six numéros distincts entre 1 et 49, d'où le nom de la loterie. La sélection peut être effectuée manuellement ou de façon automatique.

Structure des lots

Lors du tirage, la SLI choisit aléatoirement six numéros distincts dans l'ensemble $\{1, \dots, 49\}$. Ces six numéros constituent la « combinaison gagnante ». Puis, un « numéro complémentaire » est sélectionné parmi les 43 numéros restants. La personne détenant un billet sur lequel figure la combinaison gagnante remporte le gros lot, d'une valeur de 5 millions de dollars. Si plusieurs billets se qualifient, la somme est partagée équitablement entre leurs propriétaires.

Divers autres lots sont offerts, selon le nombre de numéros qu'un billet a en commun avec la combinaison gagnante ou avec le numéro complémentaire. La structure des lots est décrite plus précisément au tableau 1. Dans ce tableau, la configuration 5/6 désigne un billet dont cinq des six numéros font partie de la combinaison gagnante, tandis que la configuration 5/6+ indique qu'en plus de ces cinq numéros, le sixième corres-

pond au numéro complémentaire. Les autres configurations énumérées dans le tableau s'interprètent de façon analogue.

Tel qu'indiqué au tableau 1, les lots correspondant aux configurations 3/6, 2/6+ et 2/6 sont fixés à l'avance. Dans les autres cas, l'expression « Part de... » signifie que le montant est divisé entre l'ensemble des personnes détenant des billets répondant à la configuration en question. Les gains correspondants varient donc d'un tirage à l'autre et dépendent d'une « cagnotte », dont la valeur est déterminée en fonction du volume des ventes.

Tableau 1 Structure des lots du 6/49	
Configuration	Lot
6/6	Part de 5 000 000 \$
5/6+	Part de 32,15% de la cagnotte
5/6	Part de 13,5% de la cagnotte
4/6	Part de 54,35% de la cagnotte
3/6	10 \$
2/6+	5 \$
2/6	Participation gratuite

Pour chaque billet vendu, une somme de 3 \$ est perçue par la SLI, qui retient 1,44 \$ pour le financement des différents lots et verse le reste à l'État. De cette retenue, un montant de 0,89 \$ est alloué au gros lot ainsi qu'au tirage de « la boule d'or », dont il ne sera pas question dans cet article. Le reste, soit 0,55 \$, est versé à un « fonds de lots », duquel on commence par soustraire les sommes à payer pour les configurations 3/6, 2/6+ et 2/6, c'est-à-dire :

- le nombre de billets gagnants pour la configuration 3/6, multiplié par 10 \$;
- le nombre de billets gagnants pour la configuration 2/6+, multiplié par 5 \$;
- le nombre de billets gagnants pour la configuration 2/6, multiplié par 1,44 \$, ce qui correspond aux participations gratuites.

Le solde constitue la cagnotte, qui est répartie entre les lots correspondants aux configurations 5/6+, 5/6 et 4/6, selon les pourcentages précisés au tableau 1. Au final, les lots associés à ces trois configurations constituent donc des variables aléatoires qui dépendent du volume des ventes et du nombre de billets primés dans chacune des catégories, à l'exception du gros lot.

Questions d'intérêt

Au vu des modalités du Lotto 6/49, deux questions importantes se posent, tant pour la clientèle que pour la SLI, qui gère la loterie :

- Quelles sont les probabilités d'obtenir les divers lots ?
- Quelle est l'espérance de gain associée à l'achat d'une participation ?

Ces deux questions seront examinées ci-dessous. Comme on le verra, les calculs requis sont suffisamment simples pour être accessibles à un jeune public et se prêter à une discussion en classe.

La probabilité de gagner le gros lot

La probabilité la plus facile à calculer est celle de remporter le gros lot. Pour ce faire, on suppose que tous les éléments de l'ensemble $\{1, \dots, 49\}$ ont la même probabilité d'être sélectionnés. Le réalisme de ce postulat, adopté dans l'ensemble des calculs, sera discuté à la fin de l'article.

Pour remporter le gros lot, il faut sélectionner au hasard le bon sous-ensemble de six numéros parmi les entiers 1 à 49. Le nombre de façons de choisir successivement six numéros est donné par le produit $49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44 = 10\,068\,347\,520$. Toutefois, comme l'ordre de sélection n'a pas d'importance, il convient de diviser ce nombre par celui des permutations possibles des six numéros sélectionnés, soit $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$. Le nombre de sous-ensembles ou « combinaisons » possibles est donc $10\,068\,347\,520 / 720 = 13\,983\,816$, de sorte que

$$\Pr(\text{gagner le lot 6/6}) = \frac{1}{13\,983\,816} \approx 7,15 \times 10^{-8}.$$

Cette probabilité est infime, comme on peut l'illustrer de différentes manières. Voici deux exemples, qui semblent appropriés pour des situations d'apprentissage et d'évaluation en classe.

- Lorsqu'une pièce de monnaie de 2 \$ est lancée, la probabilité d'obtenir « pile » est de $\frac{1}{2}$. Si la pièce est lancée deux fois de manière indépendante, la probabilité d'obtenir pile deux fois est alors $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$. À combien de lancers de pile consécutifs une probabilité de $7,15 \times 10^{-8}$ correspond-elle? Autrement dit, pour quel entier n a-t-on à peu près $2^n = 13\,983\,816$? Réponse : entre $n=23$ et $n=24$, puisque $2^{23} = 8\,388\,608$ et $2^{24} = 16\,777\,216$. [Pour le public averti : $\log_2(13\,983\,816) \approx 23,74$]



- Le diamètre d'une pièce canadienne de 2\$ est de 28 mm. Supposons que des pièces de 2\$ soient alignées à la queue leu leu le long d'une route. Quelle doit être la longueur de cette chaîne de pièces pour que la probabilité de choisir la bonne soit la même que celle de remporter le gros lot du Lotto 6/49 ? Réponse : environ 391,55 km, soit un peu moins que la distance Québec / Baie-Comeau !

Une fois que l'on prend conscience du caractère extrêmement improbable de cet événement, on est tenté de se demander pourquoi, malgré tout, le gros lot est si souvent remporté. La raison est simple : des billets sont achetés en très grand nombre pour chacun des tirages !

Par ailleurs, il existe une différence fondamentale entre la probabilité qu'une personne donnée remporte le gros lot et celle que le gros lot soit remporté par quelqu'un. Pour mieux illustrer cette distinction, supposons un instant que, plutôt que de laisser aux gens le choix des combinaisons, la SLI imprime trois séries complètes de billets, soit 41 951 448 au total. Ce nombre correspond à peu près à la population actuelle du Canada. Si chaque personne résidant au pays détenait un billet, indépendamment de son âge ou de toute autre considération, le gros lot serait forcément remporté et partagé en trois. [Les personnes détentrices de la combinaison 1, 2, 3, 4, 5, 6 auraient sans doute l'impression de n'avoir pratiquement aucune chance de gagner, non ?]

Bien sûr, la certitude d'avoir exactement trois bénéficiaires du gros lot s'estompe quand on laisse la sélection des numéros au libre arbitre. Toutefois, le raisonnement demeure valable en moyenne. Autrement dit, on s'attendrait à ce qu'environ trois billets se partagent le gros lot, bien que la probabilité qu'un billet spécifique remporte le gros lot reste la même qu'avant.

La probabilité de gagner d'autres lots

Pour calculer la probabilité des autres lots du Lotto 6/49, il faut avoir recours aux concepts mathématiques de factorielle et de coefficient binomial. Pour tout entier n , on appelle « la factorielle de n » le produit $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$. Par exemple,

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720,$$

comme on l'a déjà calculé plus haut. Le nombre de façons de choisir k objets parmi n sans tenir compte de l'ordre est alors donné par le coefficient binomial

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

En particulier, le coefficient $C_{49}^6 = 13\,983\,816$ donne le nombre de façons de former un sous-ensemble de taille 6 à partir de l'ensemble $\{1, \dots, 49\}$; c'est ce que l'on appelle, en jargon probabiliste, le « nombre de cas possibles ». Par ailleurs, le coefficient $C_6^6 = 1$ représente la seule façon de piger les six numéros de la combinaison gagnante ; c'est le « nombre de cas favorables ». Le rapport de ces deux entiers donne la probabilité de gagner le gros lot, soit

$$\Pr(\text{gagner le lot 6/6}) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{C_6^6}{C_{49}^6} \\ &= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44} \\ &= \frac{1}{13\,983\,816}. \end{aligned}$$

Les probabilités de gain associées aux différents lots du 6/49 sont rapportées au tableau 2. De toute évidence, le nombre de cas possibles est toujours le même, soit C_{49}^6 , puisqu'un billet est composé de six numéros. Seul le nombre de cas favorables varie. Pour remporter le lot correspondant à la configuration 2/6+, par exemple, il faut choisir exactement deux des six numéros de la combinaison gagnante, piger ensuite le numéro complémentaire et compléter la sélection au moyen de trois numéros pris parmi les 42 numéros restants. On trouve ainsi

$\Pr(\text{gagner le lot } 2/6+) =$

$$= \frac{C_6^2 C_1^1 C_{42}^3}{C_{49}^6}$$

$$= \frac{172\,200}{13\,983\,816} \approx 1,2 \times 10^{-2}.$$

Au total, la probabilité de gagner quelque chose, ne fût-ce qu'une participation gratuite, s'élève à $2\,111\,774/13\,983\,816$, soit environ 15,1 %. En effet, il est justifié de cumuler ici tous les cas favorables, parce que les sept différentes façons de remporter un lot sont mutuellement exclusives. Le nombre de tirages moyen pour un gain quelconque est donc de l'ordre de $1/0,151 \approx 6,62$, soit un peu plus d'une fois par mois pour les gens qui achètent un billet par tirage. C'est suffisant, peut-on supposer, pour entretenir ou stimuler l'intérêt de la clientèle...

Tableau 2 Probabilités de gain des divers lots du 6/49		
Configuration	Probabilité	Nombre de cas favorables
6/6	$p_6 = 1/C_{49}^6$	1
5/6+	$p_{5+} = C_6^5 C_1^1 / C_{49}^6$	6
5/6	$p_5 = C_6^5 C_{42}^1 / C_{49}^6$	252
4/6	$p_4 = C_6^4 C_{43}^2 / C_{49}^6$	13 545
3/6	$p_3 = C_6^3 C_{43}^3 / C_{49}^6$	246 820
2/6+	$p_{2+} = C_6^2 C_1^1 C_{42}^3 / C_{49}^6$	172 200
2/6	$p_2 = C_6^2 C_{42}^4 / C_{49}^6$	1 678 950

Espérance de gain

La seconde question qui se pose est celle du gain moyen. Elle serait rapidement expédiée s'il n'y avait qu'une seule façon de gagner : la configuration 6/6. En effet, puisqu'une participation coûte 3 \$ et que le gros lot s'élève à 5 millions de dollars, l'espérance du gain serait alors égale à

$$-3 \$ + p_6 \times 5\,000\,000 \$ \approx -2,64 \$,$$

où $p_6 = 1/13\,983\,816$, tel qu'indiqué au tableau 2. Ce calcul suppose évidemment qu'il n'y ait qu'une seule participation gagnante, comme on le fera systématiquement dans la suite. Par conséquent, l'achat d'un billet représente en moyenne un débours net de 2,64 \$. On peut le voir comme un don à l'État, en échange du rêve d'une vie transformée dans l'éventualité où l'on remporterait le

gros lot. Cette pratique n'est pas forcément néfaste à court terme, dans la mesure où l'on peut se le permettre sans développer une dépendance au jeu.

Cependant, le calcul du gain moyen – ou plutôt de la perte moyenne – est rendu plus compliqué par la structure de lots plus complexe du Lotto 6/49 déjà mentionnée, et surtout par le fait que la configuration 2/6 donne droit à une participation gratuite, ce qui engendre une récursion. En effet, si on dénote par la lettre grecque μ le lot moyen, on a alors

$$\mu = 5\,000\,000 p_6 + \mu_{5+} p_{5+} + \mu_5 p_5 + \mu_4 p_4 + 10 p_3 + 5 p_{2+} + \mu p_2. \quad (1)$$

Dans cette équation, les constantes μ_{5+} , μ_5 et μ_4 représentent les lots moyens associés aux configurations 5/6+, 5/6 et 4/6. Comme elles dépendent du volume des ventes, ces constantes varient d'un tirage à l'autre. Toutefois, le site d'Atlantic Lottery, partenaire de la SLI, permet de les estimer de la façon suivante :

$$\mu_{5+} = 104\,177 \$, \mu_5 = 1\,042 \$, \mu_4 = 78 \$.$$

Par simple substitution dans l'équation (1), on peut isoler la valeur de μ , qui est à peu près égale à 0,83 \$. Par conséquent, la perte moyenne s'élève à environ $3 \$ - 0,83 \$ = 2,17 \$$, en supposant toujours qu'il n'y ait qu'une seule participation gagnante par configuration autre que 2/6.

Un calcul plus précis est difficile à effectuer sans données détaillées, car il devrait tenir compte de la possibilité de doublons et des fluctuations du volume des ventes, qui sont susceptibles de varier selon la saison et la taille des lots. En toute justice, il faudrait aussi intégrer au calcul les modalités de la « boule d'or », mais celles-ci sont trop complexes pour être traitées ici.

Retour sur le postulat d'équiprobabilité

Pour que les calculs présentés ci-haut soient valables, il faut bien entendu que toutes les combinaisons soient équiprobables. Autrement dit, tous les numéros entre 1 et 49 doivent avoir la même probabilité d'être sélectionnés lors du tirage. Au vu de la figure 1, il semble bien que ce soit le cas : l'histogramme qui y est présenté indique la fréquence historique d'apparition des numéros entre 1 et 49, en date du 31 décembre 2025. Ceci représente un échantillon de taille 4 377, puisque les tirages du mercredi n'ont commencé qu'en septembre 1985.

L'histogramme de la figure 1 met certes en évidence de légères variations dans la fréquence d'apparition des 49 numéros ; à titre d'exemple, en date du 31 décembre 2025, c'est le 45 qui avait été pigé le plus souvent et, à l'inverse, le 14 qui avait été tiré le moins souvent. C'est pour cette raison que l'un et l'autre sont souvent présentés sur Internet comme les « plus chanceux » : l'un parce

qu'il est souvent sélectionné, l'autre parce que l'on estime qu'il devrait bientôt l'être...

De telles croyances relèvent toutefois de la pure superstition, car les écarts observés entre les fréquences d'apparition des différents numéros ne sont pas statistiquement significatifs, comme divers tests d'adéquation permettent de le vérifier. À ce sujet, on pourra se reporter à un article de Genest, Lockhart et Stephens (2002) rédigé en anglais.

Il en va de même de la croyance selon laquelle les participations achetées le mercredi ou le vendredi seraient plus susceptibles d'être gagnantes. On constate en effet que, parmi les billets gagnants, nombreux sont ceux qui ont été achetés ces jours-là. Toutefois, cette observation s'explique par un biais d'échantillonnage : les jours où davantage de billets sont vendus sont forcément ceux où l'on observe le plus de billets gagnants.

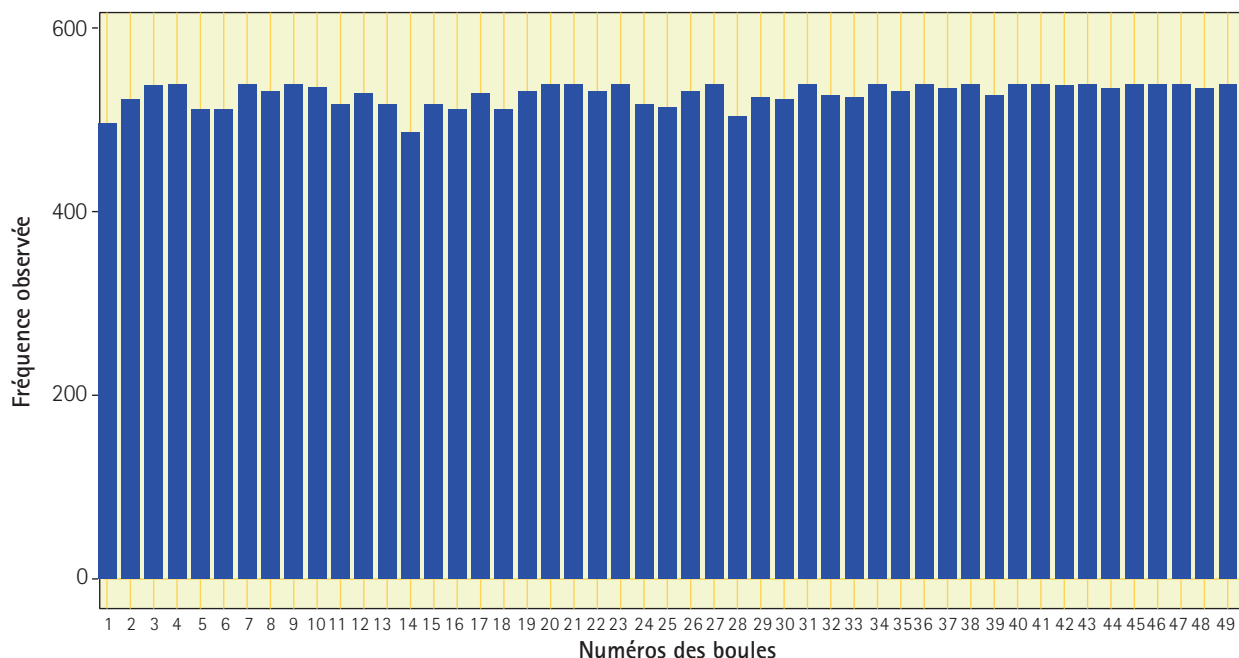


Figure 1.
Fréquence observée de sélection des 49 numéros du Lotto 6/49 lors des 4 377 tirages réalisés entre le 12 juin 1982 et le 31 décembre 2025.

Une stratégie payante ?

Dans la « Rubrique des paradoxes » parue à l'automne 2023 dans les pages d'*Accromath*, Jean-Paul Delahaye proposait l'énigme suivante : existe-t-il une — ou plusieurs — combinaisons plus favorables que d'autres pour les personnes qui achètent des billets de loterie ?

La réponse, révélée dans sa rubrique suivante, est on ne peut plus simple : il faut s'assurer de sélectionner une combinaison que personne d'autre ne choisira. On s'assure ainsi qu'en cas de gain, le lot ne sera pas partagé. Cela dit, cet objectif est plus facile à formuler qu'à atteindre, puisqu'il dépend des préférences de la clientèle en matière de choix de numéros, à propos desquelles on sait peu de choses, du moins au Canada.

Rempporter le gros lot rend-il heureux ?

Pas nécessairement, si l'on se fie aux tribulations d'une famille montréalaise qui, le 2 avril 1986, a remporté un gros lot de 7 650 267 \$ au Lotto 6/49 (le gros lot n'est plafonné à 5 millions que depuis le 14 septembre 2022). Après qu'un certain William Murphy eut retrouvé et restitué à Jean-Guy Lavigueur son portefeuille perdu, dans lequel se trouvait le billet gagnant, ce dernier partagea le gros lot avec le bon samaritain ainsi qu'avec trois de ses enfants et le frère de son épouse décédée, tous codétenteurs du billet. La seule membre de la famille n'ayant pas participé à l'achat, Louise — alors mineure — a par la suite intenté des poursuites dans l'espoir d'obtenir une part du butin. De nombreux déboires s'ensuivirent, parmi lesquels un suicide, comme le rapporte Yve Lavigueur (2007) dans un livre. Cette saga a aussi fait l'objet d'une mini-série en six épisodes, réalisée par Sylvain Archambault et diffusée sur les ondes de Radio-Canada en 2008.

Conclusion

Que retenir de cet article ? Qu'en gros, jouer au Lotto 6/49 revient à déposer une pièce de 2 \$ au bord d'une route en espérant qu'elle sera l'heureuse élue parmi toutes celles disposées à la queue leu leu par des millions de personnes sur près de 400 km... À défaut de quoi, la pièce est perdue. C'est un pari risqué, mais les pertes sont limitées à condition de contrôler son ardeur au jeu. Par ailleurs, on peut se consoler en pensant que les « profits » de Loto-Québec et de ses partenaires de la SLI sont réinvestis par l'État dans les programmes sociaux. Au final, cette loterie est donc une forme de taxe volontaire, assortie d'un espoir de gain qui fait rêver.

Quand tout le monde remporte le gros lot...

Dans le film « Bruce le tout-puissant », sorti en 2003, un journaliste de Buffalo (Jim Carrey) se voit confier par Dieu (Morgan Freeman) la charge de gouverner l'univers pendant une semaine. Appelé à examiner toutes les prières formulées par les mortels, qu'il reçoit sous forme de courriels, Bruce devient exaspéré par la tâche et, un soir, les exauce toutes sans se pencher sur leur contenu. À son réveil, le lendemain matin, il découvre que des milliers de gens ont remporté le gros lot à la loterie, empochant ainsi la coquette somme de... 17 \$ chacun. Sans parler de toutes les équipes sportives professionnelles qui ont fait match nul, de façon à contenter tout le monde !

Dans notre exemple (égalité des puissances 1, 2 et 3, entre deux groupes de 4 nombres), on parle de 4-4 *soaisu*♥♥♥. La force 3 du *soaisu* est ici symbolisée par les trois «♥» : plus la force est grande, plus les groupes partagent des propriétés communes.

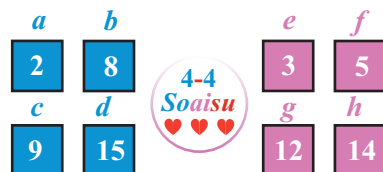


Figure 1 – 4-4 *soaisu*♥♥♥

Existe-t-il d'autres *soaisu* ?

Maintenant que nous avons trouvé un exemple de 4-4 *soaisu*♥♥♥, une question naturelle se pose :

Laquelle de ces trois possibilités est la bonne ?

- A. Il n'existe qu'un seul 4-4 *soaisu*♥♥♥ soit celui que l'on vient de trouver.
- B. Il en existe plusieurs (mais en nombre fini).
- C. Il en existe une infinité.

Avant d'aller plus loin, quelle réponse choisiriez-vous A, B ou C et, pourquoi ?

L'objectif de cet article est non seulement de répondre clairement à cette question, mais aussi de révéler une symétrie d'une beauté surprenante, cachée au cœur des nombres naturels que nous croyions si bien connaître. Notre outil ? Un simple carré de nombres, bien connu de tous.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Figure 2 – Le carré naturel d'ordre 4

Le carré naturel d'ordre 4 est tout simplement la grille 4 × 4 dans laquelle on place les nombres de 1 à 16 dans l'ordre. Dans cette grille, les huit nombres formant notre 4-4 *soaisu*♥♥♥ occupent une position remarquable, que nous appellerons la position *soaisu* dans le carré naturel d'ordre 4.

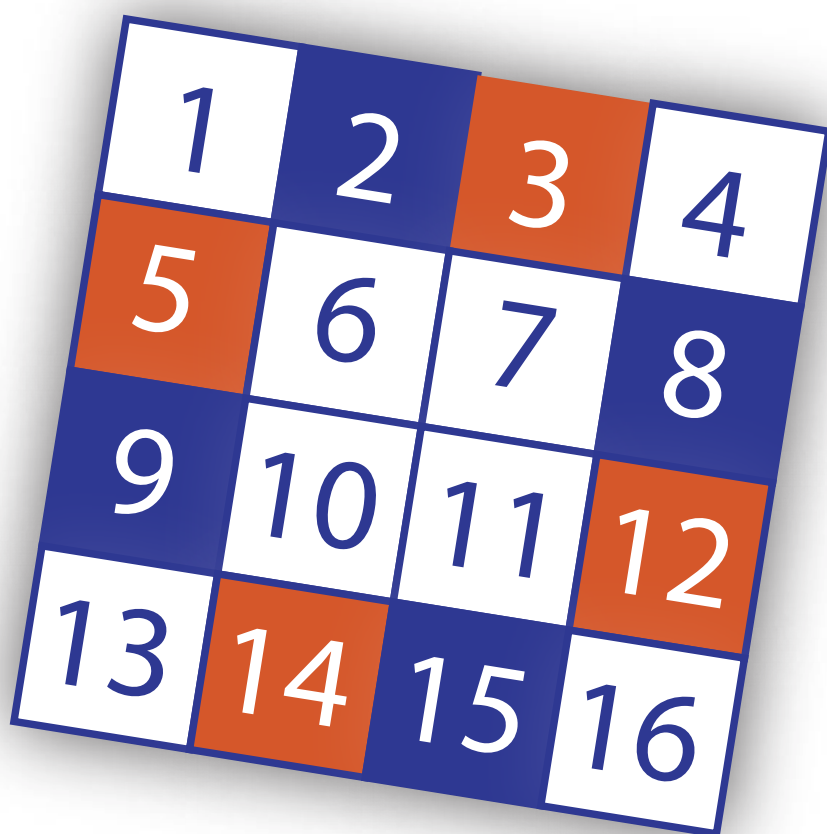


1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Figure 3 – La position du 4-4 *soaisu*♥♥♥ dans le carré naturel d'ordre 4

Ce qui est fascinant ici, c'est la *symétrie géométrique* de cette disposition. Les 4 cases bleues et les 4 cases roses sont arrangées de façon très ordonnée. En fait, cette formation possède des propriétés remarquables vis-à-vis du groupe diédral D_4 c'est-à-dire le groupe des huit transformations géométriques qui envoient le carré sur le carré. Ces transformations sont des rotations autour du centre du carré et des symétries par rapport à des droites :

- **Rotation centrale :**
Si l'on fait pivoter la grille de 90° autour de son centre, les cases bleues restent bleues et les cases roses restent roses : *chaque groupe conserve exactement sa configuration*.
- **Symétrie horizontale ou verticale :**
Si l'on retourne la grille de gauche à droite ou de haut en bas, les cases bleues prennent la place des roses, et inversement : *les deux groupes s'échangent*.



Les nombres que nous croyons si familiers
semblent entretenir des liens secrets à notre insu.
En vérité, le monde des nombres regorge de soaisu.

La symétrie cachée des nombres naturels

Kenichi Takemura
Chercheur indépendant

Voici un défi mathématique ! Soient a, b, c, d, e, f, g, h huit nombres naturels tous différents les uns des autres. Est-il possible que ces huit nombres vérifient simultanément les trois égalités suivantes

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= e + f + g + h \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &= e^2 + f^2 + g^2 + h^2 \\ a^3 + b^3 + c^3 + d^3 &= e^3 + f^3 + g^3 + h^3 \end{aligned}$$

En d'autres termes : la somme des 4 nombres de gauche égale à celle des 4 nombres de droite, et cette égalité parfaite se répète pour leurs carrés, puis pour leurs cubes, le tout en même temps ! Prenez un moment, pour y réfléchir. ...

Difficile de savoir par où commencer, n'est-ce pas ? Mais nous vivons à l'ère de l'intelligence artificielle. Même sans connaissances en programmation, il suffit de soumettre ce problème à un outil d'IA avec les bonnes instructions pour obtenir, par exemple, la solution suivante

$$\begin{aligned} 2 + 8 + 15 + 9 &= 3 + 12 + 14 + 5 = 34 \\ 2^2 + 8^2 + 15^2 + 9^2 &= 3^2 + 12^2 + 14^2 + 5^2 = 374 \\ 2^3 + 8^3 + 15^3 + 9^3 &= 3^3 + 12^3 + 14^3 + 5^3 = 4624. \end{aligned}$$

Impressionnant, non?! Les sommes des puissances 1, 2 et 3 des quatre nombres de chaque groupe coïncident parfaitement. Ce type de problème est connu sous le nom de problème de Prouhet-Tarry-Escott (ou problème PTE¹). Lorsque, comme dans notre exemple, le degré k atteint $p-1$ pour des ensembles de taille p , on parle de solution idéale. La question de savoir si une telle solution idéale existe pour tout p est, à ce jour, un problème ouvert c'est-à-dire un problème que personne dans le monde mathématique n'a encore réussi à résoudre !

Définition et notation

Le nom « problème de Prouhet-Tarry-Escott » n'est pas très parlant au premier abord. Nous allons donc introduire un nouveau terme, plus évocateur : les *soaisu* (prononcé « soai-sou », où « sou » se prononce comme le « su » de sushi).

Définition : soaisu

Soient deux ensembles S_1 et S_2 , chacun contenant p entiers. Si,

- la somme des éléments de S_1 est égale à la somme des éléments de S_2 ,
 - la somme des carrés des éléments de S_1 égale la somme des carrés des éléments de S_2 ,
 - ...
 - la somme des éléments de S_1 à la puissance k égale la somme des éléments de S_2 à la puissance k ,
- alors on dit que S_1 et S_2 forment un *soaisu* p - p de force k .

Le mot japonais (soai) signifie « s'aimer mutuellement », une belle métaphore pour des nombres qui partagent leurs sommes de puissances !

1. Le nom de ce problème rend hommage à trois mathématiciens : Eugène Prouhet, qui en a été le premier chercheur au milieu du XIX^e siècle (vers 1851) ; Gaston Tarry et Edward B. Escott, qui ont chacun de leur côté construit des solutions au début du XX^e siècle. Ce problème remonte cependant à une correspondance entre Christian Goldbach et Leonhard Euler datant de 1750-1751.

Dans notre exemple (égalité des puissances 1, 2 et 3, entre deux groupes de 4 nombres), on parle de 4-4 *soaisu*♥♥♥. La force 3 du *soaisu* est ici symbolisée par les trois «♥» : plus la force est grande, plus les groupes partagent des propriétés communes.

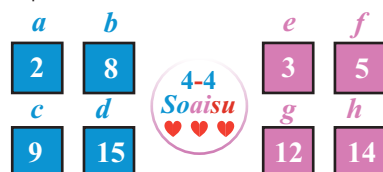


Figure 1 – 4-4 *soaisu*♥♥♥

Existe-t-il d'autres *soaisu* ?

Maintenant que nous avons trouvé un exemple de 4-4 *soaisu*♥♥♥, une question naturelle se pose :

Laquelle de ces trois possibilités est la bonne ?

A. Il n'existe qu'un seul 4-4 *soaisu*♥♥♥ soit celui que l'on vient de trouver.

B. Il en existe plusieurs (mais en nombre fini).

C. Il en existe une infinité.

Avant d'aller plus loin, quelle réponse choisiriez-vous A, B ou C et, pourquoi ?

L'objectif de cet article est non seulement de répondre clairement à cette question, mais aussi de révéler une symétrie d'une beauté surprenante, cachée au cœur des nombres naturels que nous croyions si bien connaître. Notre outil ? Un simple carré de nombres, bien connu de tous.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Figure 2 – Le carré naturel d'ordre 4

Le carré naturel d'ordre 4 est tout simplement la grille 4 × 4 dans laquelle on place les nombres de 1 à 16 dans l'ordre. Dans cette grille, les huit nombres formant notre 4-4 *soaisu*♥♥♥ occupent une position remarquable, que nous appellerons la position *soaisu* dans le carré naturel d'ordre 4.



1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Figure 3 – La position du 4-4 *soaisu*♥♥♥ dans le carré naturel d'ordre 4

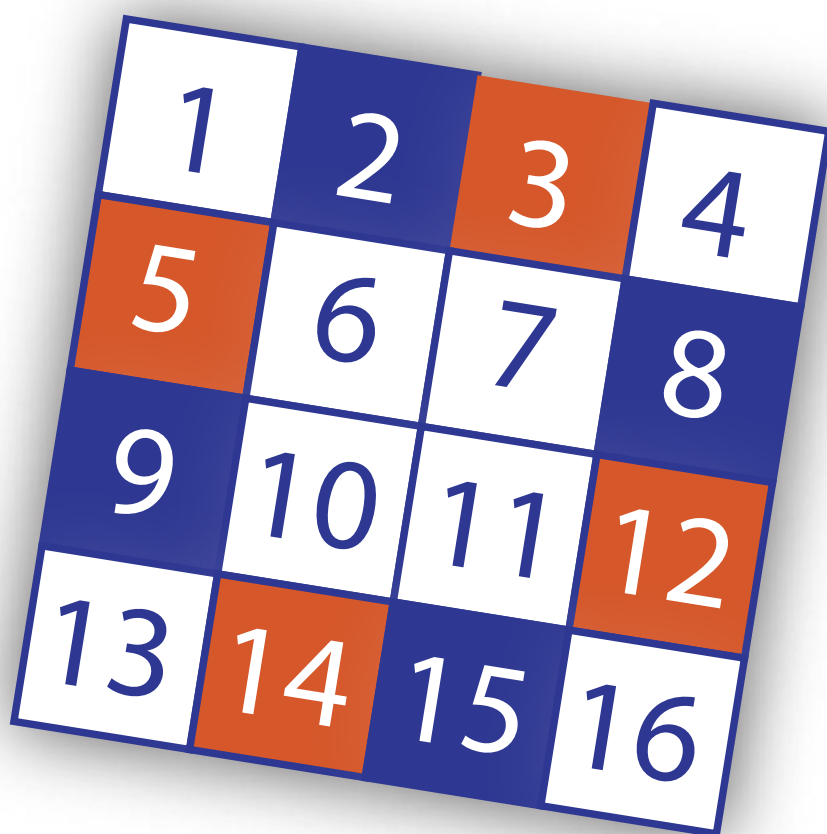
Ce qui est fascinant ici, c'est la *symétrie géométrique* de cette disposition. Les 4 cases bleues et les 4 cases roses sont arrangées de façon très ordonnée. En fait, cette formation possède des propriétés remarquables vis-à-vis du groupe diédral D_4 c'est-à-dire le groupe des huit transformations géométriques qui envoient le carré sur le carré. Ces transformations sont des rotations autour du centre du carré et des symétries par rapport à des droites :

– Rotation centrale :

Si l'on fait pivoter la grille de 90° autour de son centre, les cases bleues restent bleues et les cases roses restent roses : *chaque groupe conserve exactement sa configuration*.

– Symétrie horizontale ou verticale :

Si l'on retourne la grille de gauche à droite ou de haut en bas, les cases bleues prennent la place des roses, et inversement : *les deux groupes s'échangent*.



– Symétrie par rapport aux diagonales :

Si l'on retourne la grille selon l'une ou l'autre de ses diagonales, les cases bleues prennent également la place des roses, et inversement : *les deux groupes s'échangent*.

En d'autres termes, les nombres bleus et roses se comportent, sur le « canevas » du carré naturel d'ordre 4, comme des jumeaux : *invariants par rotation, mais interchangeables par symétrie*.

C'est cette relation géométrique magnifique qui est la clé du mystère des soaisu. Et cette structure est si robuste qu'elle ne dépend pas des nombres 1 à 16 eux-mêmes. Voyons ce qui se passe si l'on ajoute 1 à chaque case.



2	3	4	5
6	7	8	9
10	11	12	13
14	15	16	17

Figure 4

On ajoute 1 à chaque nombre de la grille

Les quatre nombres bleus et les quatre nombres roses forment encore un 4-4 soaisu ♥♥♥! Vérifions-le :

Puissance 1 :

$$3 + 9 + 10 + 16 = 38$$

$$4 + 6 + 13 + 15 = 38$$

Puissance 2

$$3^2 + 9^2 + 10^2 + 16^2$$

$$= 9 + 81 + 100 + 256 = 446$$

$$4^2 + 6^2 + 13^2 + 15^2$$

$$= 16 + 36 + 169 + 225 = 446$$

Puissance 3

$$3^3 + 9^3 + 10^3 + 16^3$$

$$= 27 + 729 + 1000 + 4096 = 5852$$

$$4^3 + 6^3 + 13^3 + 15^3$$

$$= 64 + 216 + 2197 + 3375 = 5852$$

Osons aller plus loin : que se passe-t-il si l'on ajoute un nombre quelconque n à chaque case de la grille ?



$1+n$	$2+n$	$3+n$	$4+n$
$5+n$	$6+n$	$7+n$	$8+n$
$9+n$	$10+n$	$11+n$	$12+n$
$13+n$	$14+n$	$15+n$	$16+n$

Figure 5

On ajoute n à chaque nombre de la grille

Calculons les sommes des puissances pour les quatre nombres de chaque groupe.

Puissance 1 :

$$(2 + n) + (8 + n) + (15 + n) + (9 + n) = 4n + 34$$

$$(3 + n) + (12 + n) + (14 + n) + (5 + n) = 4n + 34$$

Puissance 2 :

$$(2 + n)^2 + (8 + n)^2 + (15 + n)^2 + (9 + n)^2 = 4n^2 + 68n + 374$$

$$(3 + n)^2 + (12 + n)^2 + (14 + n)^2 + (5 + n)^2 = 4n^2 + 68n + 374$$

Puissance 3 :

$$(2 + n)^3 + (8 + n)^3 + (15 + n)^3 + (9 + n)^3 = 4n^3 + 102n^2 + 1122n + 4624$$

$$(3 + n)^3 + (12 + n)^3 + (14 + n)^3 + (5 + n)^3 = 4n^3 + 102n^2 + 1122n + 4624$$

Les deux groupes donnent toujours le même résultat. C'est la puissance de l'algèbre !

Pourquoi la force est-elle préservée par translation ?

Les vérifications directes des pages précédentes sont convaincantes, mais elles ne couvrent que les puissances 1, 2 et 3. Existe-t-il une méthode qui permettrait de voir, d'un seul coup d'œil, pourquoi l'égalité est toujours préservée ?

La réponse est « Oui » et l'outil pour s'en convaincre s'appelle le *théorème du binôme*.

Théorème : invariance par translation

Si deux ensembles B et R forment un 4-4 soaisu♡♡♡, alors les ensembles obtenus en ajoutant un même entier n à chaque élément forment également un 4-4 soaisu♡♡♡.

Plus généralement, cette propriété reste valide pour tout soaisup-p de force k quelconque.

Conclusion

Dès qu'il existe un seul 4-4 soaisu♡♡♡, on peut en engendrer une infinité d'autres en ajoutant à chacun des huit nombres un même entier n quelconque. Il existe donc une infinité de 4-4 soaisu♡♡♡. (La réponse est C!)

Remarquons que n ne doit pas nécessairement être un entier naturel : le résultat reste valide pour tout nombre réel, voire complexe.

Démonstration du théorème

Notons $B = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ (bleu) et $R = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ (rose) deux ensembles formant un 4-4 soaisu♡♡♡.

L'outil clé : le théorème du binôme.

Pour tous nombres a, n et tout entier naturel k ,

$$(a+n)^k = a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}n + \binom{k}{2}a^{k-2}n^2 + \cdots + n^k,$$

où les coefficients $\binom{k}{j}$ sont des entiers qui ne dépendent que de k et de j , et non des valeurs a_i ou b_i . Par exemple, $\binom{3}{1} = 3$ et $\binom{3}{2} = 3$.

Notation : dans la suite, nous écrivons $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ sous la forme abrégée $\sum_{i=1}^4 a_i$ (le symbole $\sum$ désigne une somme).

Étape 1 puissance 1 :

$$(a_1+n)+(a_2+n)+(a_3+n)+(a_4+n) = (a_1+a_2+a_3+a_4)+4n \\ = (b_1+b_2+b_3+b_4)+4n$$

Étape 2 puissance 2 :

D'après le théorème du binôme,

$$(a+n)^2 = a^2+2an+n^2, \text{ donc :}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 (a_i+n)^2 &= \sum_{i=1}^4 a_i^2 + 2n \sum_{i=1}^4 a_i + 4n^2 \\ &= \sum_{i=1}^4 (b_i+n)^2 \end{aligned}$$

Étape 3 puissance 3 :

De même, $(a+n)^3 = a^3 + 3a^2n + 3an^2 + n^3$, donc :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 (a_i+n)^3 &= \sum_{i=1}^4 a_i^3 + 3n \sum_{i=1}^4 a_i^2 + 3n^2 \sum_{i=1}^4 a_i + 4n^3 \\ &= \sum_{i=1}^4 (b_i+n)^3 \end{aligned}$$

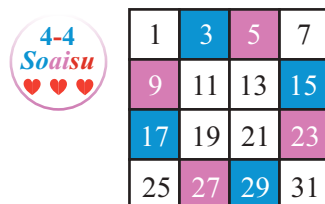
Pourquoi cela fonctionne-t-il toujours ? À chaque étape, les coefficients $\binom{k}{j}$ sont identiques pour B et pour R , ils se factorisent, et l'on retrouve les sommes de puissances inférieures, déjà égales par hypothèse. C'est ce mécanisme qui garantit la préservation de la force, quelle que soit la puissance considérée.

La belle structure symétrique des *soaisu*

La disposition des cases du 4-4 *soaisu* dans le carré naturel d'ordre 4 est encore plus robuste et généreuse qu'on pourrait le croire.

Jusqu'ici, nous n'avons travaillé qu'avec des entiers naturels consécutifs, mais la magie opère bien au-delà. Il suffit que les 16 nombres placés dans la grille 4×4 soient 16 termes consécutifs d'une suite arithmétique (c'est-à-dire 16 nombres régulièrement espacés) pour que la relation *soaisu* (égalité des sommes de puissances 1, 2 et 3) soit parfaitement préservée.

Considérons par exemple la transformation $f(x) = dx + c$, où d est la raison de la suite et c une constante. Multiplier tous les nombres par d et ajouter c ne brise pas la propriété *soaisu* : le facteur d^k se factorise de chaque côté de l'égalité, qui reste donc vérifiée.



1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

Figure 6 – La propriété *soaisu* est préservée même avec les nombres impairs (raison $d = 2$)

Puissance k	Somme (bleu)	Somme (rose)	Égalité
1	64	64	Oui
2	1 364	1 364	Oui
3	32 704	32 704	Oui
4	841 508	818 468	Non

Tableau 1 Comparaison des sommes de puissances pour le 4-4 *soaisu* avec la suite arithmétique des nombres impairs

Au-delà des entiers naturels consécutifs, il suffit donc d'une structure « régulièrement espacée » pour que les *soaisu* y élisent domicile. La forêt des suites arithmétiques recèle encore bien des symétries cachées, que le lecteur curieux pourra explorer à son gré.

Pour finir, voici une dernière surprise. En contemplant l'intégralité du « canevas » que forment les nombres 1 à 16, on découvre une harmonie encore plus étonnante. Regardez la figure 7 : elle montre une partition de la grille en deux groupes très symétriques les 8 nombres sur les diagonales (en rose) et les 8 autres (en bleu).

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Figure 7 – La disposition du 8-8 *soaisu* dans le carré naturel d'ordre 4

Ces deux groupes forment un 8-8 *soaisu*, comme on le constate dans le tableau suivant.

Puissance k	Somme (bleu)	Somme (rose)	Égalité
1	68	68	Oui
2	748	748	Oui
3	9 248	9 248	Oui
4	122 692	121 156	Non

Tableau 2 – Comparaison des sommes de puissances pour le 8-8 *soaisu* (groupes diagonaux)

Les nombres de 1 à 16, les tout premiers que l'on apprend à l'école primaire, cachent une « partition parfaite », d'une beauté saisissante. Alors, la prochaine fois que tu verras une grille de nombres, regarde-la avec d'autres yeux : peut-être qu'une harmonie secrète s'y dissimule, attendant d'être découverte !

Et la notion de *soaisu* ne s'arrête pas à deux ensembles. Elle s'étend naturellement à trois groupes ou davantage, une piste fascinante, dont voici un avant-goût.

Dans le carré naturel d'ordre 6 (les nombres de 1 à 36 disposés en grille 6×6), on peut colorer les cases de trois couleurs de façon à obtenir un 12-12-12 *soaisu*♥♥♥ :

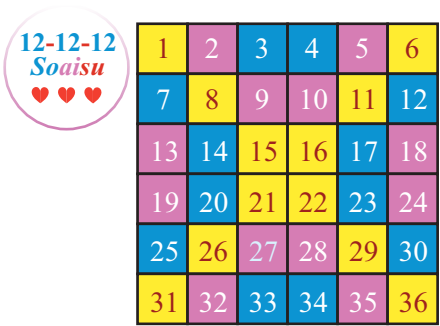


Figure 8

Les trois groupes de 12 nombres jaune, rose et bleu vérifient les égalités suivantes.

Puissance k	Somme (jaune)	Somme (bleu)	Somme (rose)	Égalité
1	222	222	222	Oui
2	5 402	5 402	5 402	Oui
3	147 852	147 852	147 852	Oui
4	4 332 326	4 308 134	4 308 134	Non

Tableau 3 - Comparaison des sommes de puissances pour le 12-12-12 *soaisu* (carré naturel d'ordre 6)

Que les nombres de 1 à 36 puissent se partager aussi harmonieusement en trois groupes – voilà qui témoigne de la profondeur des symétries cachées dans les nombres naturels. Et une question surgit naturellement : ces *soaisu* à trois ensembles résistent-ils, eux aussi, aux translations et aux suites arithmétiques ? À toi de vérifier !

Pour finir, voici peut-être la surprise la plus étonnante. On pourrait croire que la partition de la figure 8 est unique. Or il n'en est rien : les façons de colorier le carré naturel d'ordre 6 en trois groupes de 12 de manière à former un 12-12-12 *soaisu*♥♥♥ sont, contre toute intuition, fort nombreuses.

En voici trois exemples (figure 9) aux symétries bien différentes – et ce n'est là qu'un aperçu. Le nombre total de telles partitions reste, à ce jour, une question ouverte.

Dans la vaste forêt des nombres naturels, d'innombrables *soaisu* attendent encore d'être découverts...

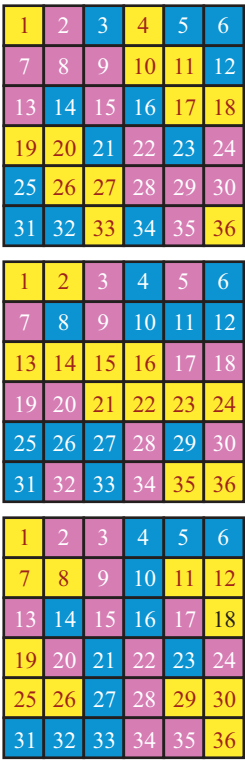


Figure 9

Trois exemples distincts de 12-12-12 *soaisu*♥♥♥ dans le carré naturel d'ordre 6. Pour chaque partition, les sommes des puissances $k = 1, 2, 3$ des douze nombres de chaque couleur coïncident parfaitement ($k=1 : 222$; $k=2 : 5402$; $k=3 : 147852$), tandis que les sommes des puissances $k = 4$ diffèrent.

*Comment établir le classement des équipes d'une ligue
à partir du résultat des parties jouées dans la saison ?
L'algèbre linéaire peut nous aider.*

Classement des équipes sportives : l'algèbre linéaire à la rescousse

Paul Guertin
Collège André-Grasset



Wesley Colley

À la fin d'une saison, une ligue sportive souhaite établir un classement des équipes de la ligue à partir du résultat des parties jouées durant la saison. On cherche donc une méthode qui permet, à partir d'une liste de toutes les parties et de leur pointage final, de donner un rang à chaque équipe (le rang 1 correspondant à la meilleure équipe).

Il est important de noter qu'on ne suppose pas que chaque équipe a joué une seule fois contre chaque autre équipe : les deux équipes peuvent s'être rencontrées plus d'une fois, ou ne jamais avoir joué l'une contre l'autre. On ne suppose pas non plus que toutes les équipes ont joué le même nombre de parties.

Dans un premier temps, on va supposer que les parties nulles ne se produisent pas : chaque partie se solde par la victoire d'une équipe et la défaite de son adversaire. Cette condition sera levée un peu plus tard.

La première idée qui peut nous venir est de classer les équipes selon leur nombre de victoires : une équipe qui a gagné plus de parties est considérée supérieure à une équipe qui en a gagné moins. Pour tenir compte du fait que les équipes n'ont pas forcément toutes joué le même nombre de parties, on peut utiliser plutôt la proportion de victoires, c'est-à-dire le nombre de victoires d'une équipe divisé par le nombre de parties jouées par celle-ci.

Cependant, cette première idée ne paraît pas entièrement équitable. Un premier défaut est qu'elle semble favoriser les équipes qui ont joué moins de parties. Pour prendre un exemple extrême, si une équipe A a joué une seule partie et l'a gagnée, elle sera classée meilleure qu'une équipe B qui a joué 100 parties et en a gagné 99.

Un deuxième défaut est qu'elle ne tient pas compte de la force des adversaires et donc qu'elle avantage les équipes qui ont joué contre des équipes faibles. Une équipe qui a gagné 15 parties sur 20 en jouant contre des adversaires faibles sera classée meilleure qu'une équipe qui a gagné 14 parties sur 20 contre des adversaires forts. Mais comment savoir si une équipe est forte ou faible avant d'avoir établi le classement, ce qui est précisément ce que nous tentons de faire ? Il semble que nous soyons en train de faire un raisonnement circulaire.

Le mathématicien Wesley Colley de l'université Princeton s'est penché sur ce problème en 2002, dans le but d'établir un classement pour une ligue de football universitaire aux États-Unis, et a proposé la première méthode que nous allons présenter. Cette méthode utilise des notions de probabilité bayésienne et d'algèbre linéaire pour obtenir un classement des équipes.

Dans un deuxième temps, nous verrons une autre méthode, due à Kenneth Massey, qui fait aussi appel à l'algèbre linéaire, spécifiquement à la méthode des moindres carrés, pour résoudre un système d'équations linéaires incompatibles.

La méthode de Colley

Soit n le nombre d'équipes dans la ligue. Numérotions les équipes de 1 à n . Nous allons noter v_i le nombre de victoires de l'équipe i et p_i le nombre de parties jouées par cette équipe. Le nombre de défaites de l'équipe i est donc $d_i = p_i - v_i$.

La force f_i d'une équipe dépend de sa proportion de victoires, donc on serait tenté de la définir comme étant égale à v_i/p_i . Cependant, nous allons plutôt définir

$$f_i = \frac{v_i + 1}{p_i + 2}. \quad (1)$$

Les nombres 1 et 2 dans cette formule ne sont pas arbitraires mais découlent de la règle de succession de Laplace. Avec cette définition, une équipe qui n'a joué aucune partie a une force de $1/2$, une équipe qui a joué une seule partie et l'a gagnée a une force de $2/3$ et une équipe qui a gagné 99 de ses 100 parties a une force de $100/102 \approx 0,98$. La force f_i d'une équipe est donc un nombre entre 0 et 1 correspondant à la probabilité qu'elle gagne sa prochaine partie, étant donné ses résultats jusqu'à maintenant.

Si on établissait le classement des équipes en les triant selon les valeurs des f_i , cela ne tiendrait pas compte de la force de leurs adversaires. Au lieu de cela, Colley fait un tour de passe-passe algébrique en manipulant l'équation (1) qui définit la force d'une équipe. On la réécrit d'abord sous la forme

$$f_i(p_i + 2) = v_i + 1,$$

et on réécrit le membre de droite sous une forme plus compliquée en ajoutant et en retranchant la même quantité.

$$f_i(p_i + 2) = \frac{v_i + d_i}{2} + \frac{v_i - d_i}{2} + 1.$$

Dans cette équation, $v_i + d_i$ est simplement le nombre de parties totales jouées par l'équipe i , donc on peut écrire

$$f_i(p_i + 2) = \frac{p_i}{2} + \frac{v_i - d_i}{2} + 1.$$

Si on ne savait rien sur la force des adversaires, on prendrait leur force égale à $1/2$ et on aurait

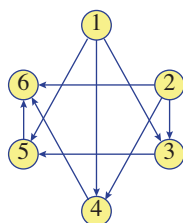
$$f_i(p_i + 2) = \sum_{k=1}^{p_i} \frac{1}{2} + \frac{v_i - d_i}{2} + 1.$$

chaque terme de la somme correspondant à une partie jouée par l'équipe i . Mais pour tenir compte de la force des adversaires, on remplace le terme constant $1/2$ dans la somme par la force de chaque adversaire telle que calculée par la formule (1). Si on note $a_1, a_2, \dots, a_{p_i}$ les numéros des équipes que l'équipe i a affrontées, on obtient

$$f_i(p_i + 2) = \sum_{k=1}^{p_i} f_{a_k} + \frac{v_i - d_i}{2} + 1.$$

Chacune des n équipes donne lieu à une telle équation. On obtient donc un système de n équations en n inconnues f_1 à f_n . Comme chaque équation est linéaire en les f_i , on peut utiliser l'algèbre linéaire pour résoudre le système, déterminer la valeur des f_i et obtenir le classement cherché (l'équipe dont le f_i est maximal finissant au premier rang).





Un exemple

Considérons une ligue avec six équipes numérotées de 1 à 6. Le tableau ci-dessous donne les neuf parties qui ont été jouées et le résultat de chacune.

Numéro de la partie	Gagnant	Perdant
1	1	3
2	1	4
3	1	5
4	2	3
5	2	4
6	2	6
7	3	5
8	4	6
9	5	6

On voit que chaque équipe a joué trois parties :

- l'équipe 1 a gagné ses trois parties contre les équipes 3, 4 et 5;
- l'équipe 2 a gagné ses trois parties contre les équipes 3, 4 et 6;
- l'équipe 3 a perdu contre 1 et 2 et gagné contre 5;
- l'équipe 4 a perdu contre 1 et 2 et gagné contre 6;
- l'équipe 5 a perdu contre 1 et 3 et gagné contre 6;
- l'équipe 6 a perdu ses trois parties contre 2, 4 et 5.

On peut aussi représenter cette situation au moyen d'un graphe orienté. Les sommets représentent les six équipes et il y a un arc du sommet X au sommet Y si l'équipe X a gagné sa partie contre l'équipe Y .

Équipe	v_i	d_i	$\frac{v_i - d_i}{2} + 1$
1	3	0	$\frac{3-0}{2} + 1 = 2,5$
2	3	0	$\frac{3-0}{2} + 1 = 2,5$
3	1	2	$\frac{1-2}{2} + 1 = 0,5$
4	1	2	$\frac{1-2}{2} + 1 = 0,5$
5	1	2	$\frac{1-2}{2} + 1 = 0,5$
6	0	3	$\frac{0-3}{2} + 1 = -0,5$

Le système d'équations linéaires que nous allons établir comporte six équations, chacune de la forme

$$f_i(p_i + 2) = \sum_{k=1}^{p_i} f_{a_k} + \frac{v_i - d_i}{2} + 1.$$

Comme chaque équipe a joué trois parties, le membre de gauche est simplement $5f_i$ pour chaque équipe. On peut aussi calculer la valeur de l'expression $\frac{v_i - d_i}{2} + 1$ pour chaque équipe.

Le système de Colley est donc donné par

$$\begin{cases} 5f_1 = f_3 + f_4 + f_5 + 2,5 \\ 5f_2 = f_3 + f_4 + f_6 + 2,5 \\ 5f_3 = f_1 + f_2 + f_5 + 0,5 \\ 5f_4 = f_1 + f_2 + f_6 + 0,5 \\ 5f_5 = f_1 + f_3 + f_6 + 0,5 \\ 5f_6 = f_2 + f_4 + f_5 - 0,5 \end{cases}$$

qu'on peut écrire sous forme matricielle $A\vec{x} + \vec{b}$ avec $\vec{x}$ le vecteur des forces:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 5 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 2,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

La résolution de ce système donne, à trois décimales :

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,761 \\ 0,725 \\ 0,475 \\ 0,439 \\ 0,389 \\ 0,211 \end{pmatrix}$$

L'équipe 1 finit donc en tête, suivie de l'équipe 2. Même si ces deux équipes ont le même nombre de victoires et de défaites, l'équipe 1 est favorisée parce qu'elle a battu l'équipe 5 qui a battu l'équipe 6, tandis que l'équipe 2 a battu l'équipe 6. De même, parmi les trois équipes qui ont une victoire et deux défaites, l'équipe 3 est considérée supérieure à 4 et 5 parce qu'elle a obtenu des victoires contre des adversaires plus forts.

Existence et unicité de la solution

On peut se demander si le système linéaire engendré par la méthode de Colley possède toujours une solution unique. La réponse est oui, en vertu d'un théorème d'algèbre linéaire appelé théorème de Levy-Desplanques. Ce théorème dit que si une matrice carrée est telle que sur chaque ligne, la valeur absolue de l'entrée située sur la diagonale principale est strictement supérieure à la somme des valeurs absolues des autres entrées sur la ligne, alors cette matrice est inversible.

Dans un système linéaire de Colley, l'entrée de la diagonale sur la ligne i est $2+p_i$ tandis qu'il y a p_i autres entrées non nulles sur la même ligne, chacune valant ± 1 . La somme des valeurs absolues des entrées d'une ligne, en excluant la diagonale, est donc égale à p_i qui est inférieur à $2+p_i$. L'hypothèse du théorème est donc vérifiée, ce qui implique que la matrice A est inversible. L'équation matricielle $A\vec{x} + \vec{b}$ possède donc toujours une solution unique.

La méthode de Massey

La méthode de Colley présentée à la section précédente ne tient pas compte de la marge de victoire des parties. Une victoire par la marque de 3 à 2 a le même poids qu'une victoire écrasante de 10 à 1. On peut raisonnablement penser que la marge de victoire (c'est-à-dire l'écart entre le pointage de l'équipe gagnante et le pointage de l'équipe perdante) nous donne de l'information qui peut être utile pour évaluer la force d'une équipe, et que la méthode de Colley n'est pas parfaite puisqu'elle n'utilise pas cette information.

Une méthode différente, due à Kenneth Massey, établit un classement des équipes en utilisant la marge de victoire pour chaque partie. Un avantage de cette méthode est qu'elle est applicable même si une partie peut être nulle (la marge de victoire sera alors de zéro). La méthode de Massey, comme la méthode de Colley, utilise l'algèbre linéaire pour résoudre un système d'équations mais là s'arrête la ressemblance.

L'idée est la suivante : on considère que lorsque deux équipes jouent une partie, la marge de victoire représente la différence de force entre les deux équipes. Par exemple, si les équipes i et j jouent une partie et que l'équipe i gagne par k points, alors il est naturel de considérer que $f_i - f_j = k$, où f_i représente la force de l'équipe i et f_j celle de l'équipe j .

Chaque partie nous donne une équation qui relie les forces des deux équipes impliquées. On obtient donc un système d'équations linéaires, chaque équation impliquant seulement deux variables. Ce système peut être écrit sous la forme matricielle $A\vec{x} = \vec{b}$.

Cependant, le système contient autant d'équations qu'il y a de parties, et autant d'inconnues qu'il y a d'équipes. Comme le nombre de parties sera le plus souvent supérieur au nombre d'équipes, le système sera surdéterminé : il contiendra plus d'équations que d'inconnues. Il sera donc possible, et en fait, très probable, qu'il n'ait aucune solution. La méthode de Massey consiste à utiliser la méthode des moindres carrés pour normaliser le système sous la forme

$$A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}$$

et trouver la valeur des forces d'équipes qui est aussi près que possible d'une solution. Ce sont ces forces qui seront utilisées pour établir le classement des équipes.

Un dernier détail est que le système normal ainsi construit n'a pas une solution unique mais une infinité de solutions. Massey impose donc une condition supplémentaire (la somme des forces des équipes doit sommer à zéro) pour obtenir une solution unique. Cela se fait simplement en ajoutant une équation linéaire au système normal et ne complique pas le calcul.



Kenneth Massey

Un exemple

Par exemple, considérons quatre équipes, numérotées de 1 à 4, qui jouent chacune une fois contre chaque autre équipe. Les résultats des six parties sont donnés ci-dessous.

Partie	Equipes	Résultat		Marge de la victoire
		Équipe gagnante	Pointage	
1	1 vs 2	1	$\frac{5}{2}$	3
2	3 vs 1	3	$\frac{4}{3}$	1
3	1 vs 4	1	$\frac{3}{2}$	1
4	2 vs 3	2	$\frac{4}{3}$	1
5	4 vs 2	4	$\frac{3}{1}$	2
6	3 vs 4	3	$\frac{3}{2}$	1

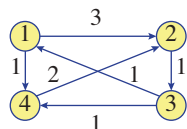
On peut aussi représenter cette situation au moyen d'un graphe orienté pondéré. Les sommets représentent les équipes et il y a un arc du sommet X au sommet Y si l'équipe X a gagné sa partie contre l'équipe Y . Chaque arc est pondéré par la marge de victoire.

Si on note f_i la force de l'équipe i , on obtient les six équations linéaires

$$\begin{aligned} f_1 - f_2 &= 3, & f_2 - f_3 &= 1, \\ f_3 - f_1 &= 1, & f_4 - f_2 &= 2, \\ f_1 - f_4 &= 1, & f_3 - f_4 &= 1. \end{aligned}$$

qui donnent lieu à l'équation matricielle $A\vec{x} + \vec{b}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Il est facile de voir que ce système surdéterminé ne possède pas de solution. En effet, si on additionne la deuxième et la troisième équation, on obtient $f_3 - f_4 = 2$, ce qui contredit la dernière équation $f_3 - f_4 = 1$.

Utilisons la méthode des moindres carrés : au lieu de chercher un vecteur $\vec{x}$ tel que $A\vec{x}$ est égal au vecteur $\vec{b}$, cherchons un vecteur $\vec{x}$ ayant la propriété que $A\vec{x}$ est le plus près possible de $\vec{b}$. Autrement dit, cherchons le vecteur $\vec{x}$ qui minimise la norme euclidienne $\|A\vec{x} - \vec{b}\|$. Comme une norme n'est jamais négative, minimiser la norme revient à minimiser son carré. La fonction à minimiser est donc

$$\|A\vec{x} - \vec{b}\|^2 = (A\vec{x} - \vec{b})^T (A\vec{x} - \vec{b}),$$

dont le gradient est $2A^T(A\vec{x} - \vec{b})$. Ce qui donne l'équation normale

$$A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}$$

qu'il suffira ensuite de résoudre. Pour cela, nous allons multiplier l'équation à gauche par A^T .

$$\begin{aligned} A^T A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$A^T \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'équation normale est donc

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ce système possède une infinité de solutions car la matrice $A^T A$ n'est pas inversible : la somme de toutes les lignes donne la ligne nulle. Cela est dû au fait que toutes les équations originales impliquant les forces des équipes sont de la forme $f_i - f_j = k$ et qu'ajouter une même constante à toutes les forces ne change aucune équation.

Pour s'assurer qu'il y a une solution unique, on peut simplement enlever la première équation (ce qui ne change pas les solutions du système puisque cette équation est linéairement dépendante des autres) et ajouter une nouvelle équation disant que la somme des forces est nulle : $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 0$. Autrement dit, on remplace la première ligne de la matrice par une ligne de 1 et on remplace le premier coefficient du vecteur de droite par un 0.

Le système normal modifié est alors

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et la solution est :

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -1 \\ 1/4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, selon la méthode de Massey, l'équipe 1 est la plus forte, suivie des équipes 3, 4 et 2 dans cet ordre.

Existence et unicité de la solution

La théorie spectrale des graphes nous apprend que la matrice $A^T A$ obtenue par la méthode de Massey (connue sous le nom de matrice laplacienne du graphe des parties) est de rang $n - c$, où n est le nombre de sommets du graphe des parties (donc le nombre d'équipes) et c est le nombre de composantes connexes de ce graphe (vu comme un graphe non orienté). Puisqu'on remplace une de ses lignes par une ligne de 1, linéairement indépendante des autres lignes, la matrice résultante sera de plein rang, donc inversible, à condition que le graphe des parties soit connexe, c'est-à-dire qu'il existe une chaîne de parties reliant n'importe quelle paire d'équipes. Il y aura donc une solution unique à l'équation normale. La condition d'avoir un graphe de parties connexe sera satisfaite dans tous les cas raisonnables, puisqu'on ne peut pas imaginer classer deux équipes qui n'ont pas de chaîne de parties qui les relient.

Finalement, il reste à montrer que c'est bien un minimum. Pour cela, il suffit de montrer que la matrice hessienne H des dérivées secondes est semi-définie positive, c'est-à-dire que $\vec{v}^T H \vec{v} \geq 0$ pour tout vecteur $\vec{v}$ non nul. On peut montrer que $H = 2A^T A$, donc pour tout $\vec{v} \neq \vec{0}$,

$$\begin{aligned} \vec{v}^T H \vec{v} &= \vec{v}^T (2A^T A) \vec{v} \\ &= 2(\vec{v}^T A^T)(A \vec{v}) \\ &= 2(A \vec{v})^T (A \vec{v}) \\ &= 2\|A \vec{v}\|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait montrer. Donc le point où le gradient s'annule, c'est-à-dire la solution de $A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}$, est bien un minimum.

Le vote par téléphone

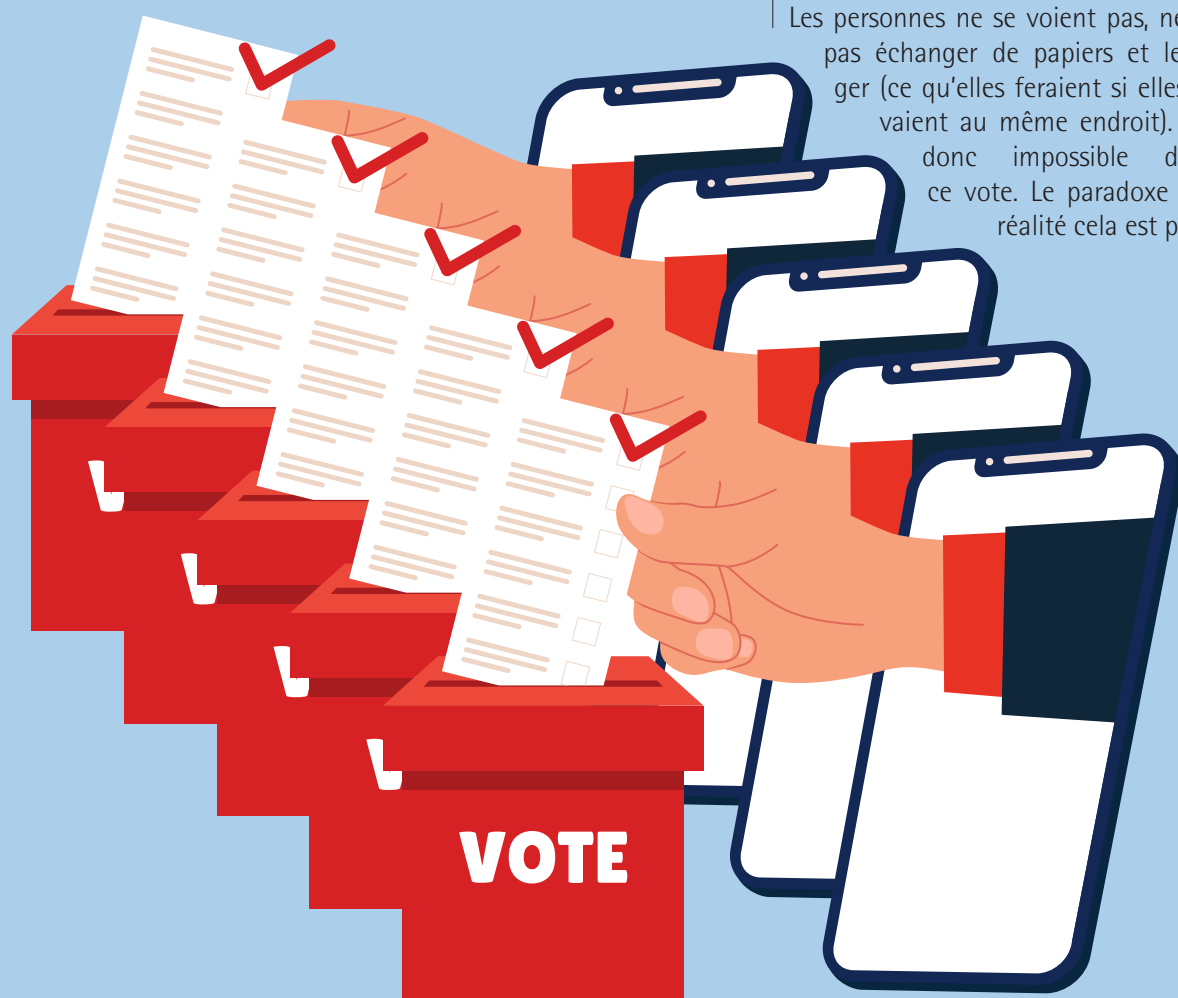
Rubrique des Paradoxes

Jean-Paul Delahaye
Université de Lille

Cinq personnes, dans cinq pays différents, doivent voter pour ou contre une certaine motion. Il leur est impossible de se déplacer et, donc, elles doivent se débrouiller par téléphone (ou par courrier électronique). Elles ne veulent faire intervenir aucun tiers, ni aucun calcul compliqué demandant l'usage d'un ordinateur (ou d'un smartphone ou d'une tablette), et souhaitent absolument que les votes restent confidentiels, comme lors d'un vote à bulletins secrets avec une urne si cela avait été possible.

Comment doivent-elles s'y prendre ? On fera l'hypothèse que les cinq personnes savent, lorsqu'un message leur parvient, qui l'a envoyé (aucun anonymat n'est donc possible dans les communications).

Les personnes ne se voient pas, ne peuvent pas échanger de papiers et les mélanger (ce qu'elles feraient si elles se trouvaient au même endroit). Il semble donc impossible d'organiser ce vote. Le paradoxe est qu'en réalité cela est possible !



Solution du paradoxe précédent

Un carré vraiment magique

Tout le monde connaît les carrés magiques ! En voici un.

8	1	6	= 15
3	5	7	= 15
4	9	2	= 15
= 15 = 15 = 15			↙ ↘

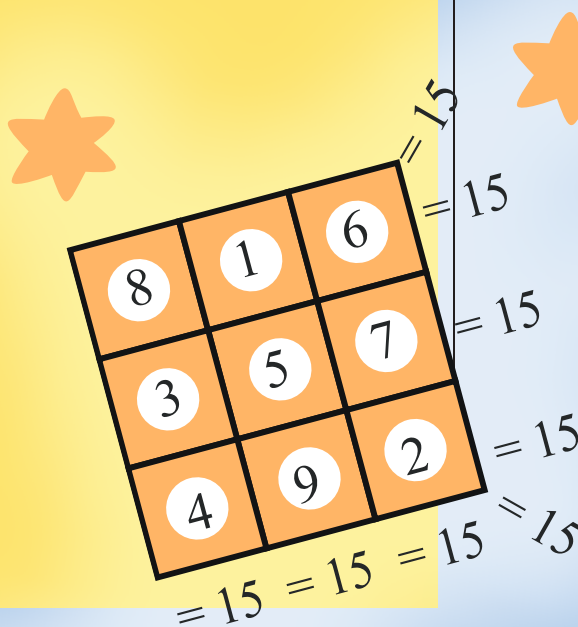
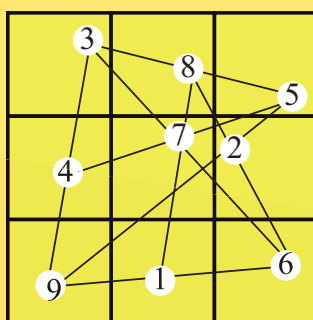
Neuf nombres sont inscrits sur des pions qui sont rangés dans un carré composé de neuf cases. Il y a un pion par case. Les pions forment huit alignements de trois pions : trois alignements horizontaux, trois alignements verticaux et deux alignements en diagonale. Chacun de ces alignements donne un total de 15 :

$$\begin{aligned} 8 + 1 + 6 &= 15 \\ 3 + 5 + 7 &= 15 \\ 4 + 9 + 2 &= 15 \\ 8 + 3 + 4 &= 15 \\ 1 + 5 + 9 &= 15 \\ 6 + 7 + 2 &= 15 \\ 8 + 5 + 2 &= 15 \\ 4 + 5 + 6 &= 15 \end{aligned}$$

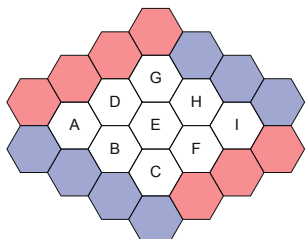
Le problème posé est : comment déplacer les pions pour que :

- il y ait toujours un pion dans chacune des neuf cases du tableau ;
- et que les huit alignements obtenus de trois pions donnent cette fois, chacun, un total de 16 ?

Cela semble impossible, car il ne va pas y avoir assez de points sur les pions pour passer de 15 à 16. Aussi paradoxal que cela paraisse, le problème possède une solution !



Section problèmes



Jeu de Hex

1. Dans le jeu de Hex 3x3, BLEU a une stratégie gagnante. Pour cela, BLEU doit bien jouer son premier coup. Déterminer quels sont les premiers coups possibles de la stratégie gagnante.

À propos de la diagonale du carré

1. En prenant appui sur l'incommensurabilité de la diagonale et du côté du carré, montrer que le réel $\sqrt{2}$ est irrationnel.
2. Dans le passage des *Premiers analytiques* (I.23), Aristote écrit que si on suppose la diagonale et le côté du carré commensurables, alors « un nombre impair se trouve égal à un nombre pair ».

Donner une démonstration de cette affirmation en restant le plus près possible des mathématiques de l'époque d'Aristote.

(En particulier, ne pas faire intervenir le réel $\sqrt{2}$ en tant que tel.)

3. Étant donné la figure ci-contre (voir la description dans le texte, p. 5), on veut que montrer que $A'B \cong A'D'$.

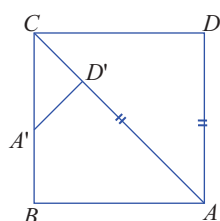


Figure pour les problèmes 3 et 4
(Diagonale du carré)

- a) Démontrer ce résultat en considérant le segment BD' .
- b) Reprendre le problème en vous appuyant cette fois sur le segment AA' .
- c) Reprendre à nouveau le problème par *pliage* : plier le coin inférieur gauche du carré de manière à superposer le côté AB sur la diagonale AC .

4. Soit c' , la longueur du côté CD' du carré $A'B'CD'$.

- a) Montrer que $c' < c/2$, où c est la longueur du côté du carré initial.

Tuyau : Considérer l'hypoténuse du triangle rectangle $A'CD'$.

- b) En conclure que les carrés « à la Chrystal » deviennent arbitrairement petits.



Figure pour le problème 1
(Symétrie cachée)

Carré naturel et carré magique parfait

1. Nous avons utilisé la formule

$$0 + 1 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Démontrer ce résultat comme le jeune Gauss l'aurait fait instantanément.

Indice : Écrivez la même somme dans l'ordre inverse et additionnez les deux lignes !

Le Lotto 6/49

1. Supposons que l'on imprime et vende n séries complètes de billets Lotto 6/49, soit 13 983 816 x n billets au total.
 - a) Calculer les lots pour les configurations 6/6, 5/6+, 5/6 et 4/6.
 - b) Pour quelle valeur entière de n est-il préférable de gagner le lot 5/6+ plutôt que le 6/6.

La symétrie cachée des nombres naturels

1. Les ensembles $A = \{4, 6, 15, 17, 23\}$

et $B = \{3, 9, 11, 20, 22\}$ forment un 5-5 soaisu ♥♥♥♥ de force 4, c'est-à-dire que pour tout entier $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ on a

$$\sum_{i=1}^5 a_i^k = \sum_{i=1}^5 b_i^k.$$

(l'égalité n'est pas vérifiée pour $k=5$).

Montrer qu'en ajoutant un même entier n à chaque élément, les deux nouveaux ensembles $A' = \{a_i + n\}$ et $B' = \{b_i + n\}$ forment également un 5-5 soaisu ♥♥♥♥ de force 4, c'est-à-dire que pour tout $k \in \{1, 2, 3, 4\}$,

$$\sum_{i=1}^5 (a_i + n)^k = \sum_{i=1}^5 (b_i + n)^k.$$

Indication : Développez $(a_i + n)^k$ à l'aide du théorème du binôme, summez sur $i = 1, \dots, 5$, et observez que chaque coefficient binomial

$$\binom{k}{j}$$

est le même pour A et pour B .

Pour en savoir plus!

Accro-flashes

À propos de la diagonale du carré

- Certains éléments de ce texte ont déjà été présentés sommairement dans *Accromath* : Marie Beaulieu et Bernard R. Hodgson, « Pourquoi redémontrer un résultat déjà établi? Le cas Archimède. » *Accromath*, vol. 13, hiver-printemps 2018, pp. 20-25. Voir le problème #3 (p. 32) — et sa solution.
- La construction géométrique ici en jeu se trouve (mais sans mention du nom de Chrystal) au chapitre 4 de Hans Rademacher et Otto Toeplitz, *Plaisir des mathématiques*. Paris : Dunod, 1967. (Version anglaise : *The Enjoyment of Mathematics: Selections from Mathematics for the Amateur*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1957.)
- La démonstration de George Chrystal, ainsi que la référence à son manuel d'algèbre, sont mentionnées par Thomas L. Heath dans son édition commentée des *Éléments* d'Euclide : *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, vol. 3: Livres X à XIII. 2^e éd. Réimpression (1956). New York: Dover (pp. 19-20). Heath examine alors la notion d'incommensurabilité, telle que présentée dans les premières propositions du Livre X d'Euclide.

Applications des mathématiques

L'évolution de la coopération

- Robert Axelrod, *The Evolution of Cooperation*.
- Nicky Case, Le jeu « L'Évolution de la confiance » <https://ayowel.github.io/trust/>
- Martin Nowak et Roger Highfield, *SuperCooperators*.
- Frédéric-Morneau-Guérin et Élodie Tremblay, « Regard mathématique sur le jeu de Hex », *Bulletin AMQ*, mai 2025, pages 22-39.

Le Lotto 6/49

- J.-P. Delahaye (2023). « Gagner au loto ». *Accromath*, 18 (2), 46.
- J.-P. Delahaye (2024). « Un monde mathématique immobile ». *Accromath*, 19 (1), 42.
- C. Genest & S. Valiquette (2026). « Les mathématiques du Lotto 6/49 ». *Bulletin AMQ*, sous presse.
- C. Genest, R.A. Lockhart & M.A. Stephens (2002). « Chi-square and the lottery ». *Journal of the Royal Statistical Society, Series D (The Statistician)*, 51, 243-257.
- Y. Lavigne (2007). *Les Lavigneur: leur véritable histoire*. Éditions Saint-Martin, Montréal.

Histoire des mathématiques

L'O-dix-ée vers l'ouest

- André Ross. « Algorithmes au cours de l'histoire ». *Accromath*, 14(2), 2019. <https://accromath.uqam.ca/2019/10/algorithmes-au-cours-de-lhistoire/>
- Bernard R. Hodgson. « Balades algébriques du temps jadis ». *Accromath*, 20(1), 2025. <https://accromath.uqam.ca/2025/02/balades-algebriques-du-temps-jadis/>
- Karl Menninger. *Number Words and Number Symbols, A Cultural History of Numbers*. Dover, 1992.

Propriétés des nombres

Du carré naturel au carré magique parfait : le secret des diagonales brisées

- OEIS Foundation Inc., *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, Entry A006003 : $a(n) = n(n^2 + 1)/2$. <https://oeis.org/A006003>.
- OEIS Foundation Inc., *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, Entry A005448 : Centered triangular numbers. <https://oeis.org/A005448>.
- W. S. Andrews, *Magic Squares and Cubes*, 2^e éd., Dover Publications, 1960.
- E. Deza et M. M. Deza, *Figurate Numbers*, World Scientific, 2012, p. 139 et 293.
- Weisstein, Eric W. « Panmagic Square. » *MathWorld* — A Wolfram Web Resource. <https://mathworld.wolfram.com/PanmagicSquare.html>

La symétrie cachée des nombres naturels

- K. Takemura, « The Magic of a 12-12-12 Split : Discovering Soaisu. » *Math Horizons*, vol. 33, n° 3, p. 21–23, 2026.
- S. Raghavendran et V. Narayanan, « The Prouhet–Tarry–Escott Problem : A Review. » *Mathematics*, vol. 7, n° 3, p. 227, 2019.

Accromath est une publication de l'Institut des sciences mathématiques (ISM) et du Centre de recherches mathématiques (CRM). La revue s'adresse surtout aux étudiantes et étudiants d'école secondaire et de cégep ainsi qu'à leurs enseignantes et enseignants.



L'Institut des sciences mathématiques est une institution unique dédiée à la promotion et à la coordination de l'enseignement et de la recherche en sciences mathématiques au Québec. En réunissant huit départements de mathématiques des universités québécoises (Concordia, Université Laval, McGill, Université de Montréal, UQAM, UQTR, Université de Sherbrooke, Bishop's), l'Institut rassemble un grand bassin d'expertises en recherche et en enseignement des mathématiques. L'Institut anime de nombreuses activités scientifiques, dont des séminaires de recherche et des colloques à l'intention des professeurs et des étudiants avancés, ainsi que des conférences de vulgarisation données dans les cégeps. Il offre également plusieurs programmes de bourses d'excellence.

L'ISM est financé par le Ministère de l'Enseignement supérieur et par ses huit universités membres.



Le Centre de recherches mathématiques est un centre national pour la recherche fondamentale en mathématiques et ses applications. Les scientifiques du CRM comptent plus d'une centaine de membres réguliers et de stagiaires postdoctoraux. Lieu privilégié de rencontre, le Centre est l'hôte chaque année de nombreux visiteurs et d'ateliers de recherche internationaux.

Les activités scientifiques du CRM comportent deux volets principaux : les projets de recherche qu'entreprennent ses laboratoires, et les activités thématiques organisées à l'échelle internationale. Ces dernières, ouvertes à tous les domaines, impliquent des chercheurs du CRM et d'autres universités. Afin d'assurer une meilleure diffusion des résultats de recherches de ses collaborateurs, le CRM a lancé en 1989 un programme de publications en collaboration avec l'American Mathematical Society et avec Springer.

Le CRM est principalement financé par le CRSNG (Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada), le FQRNT (Fonds québécois de recherche sur la nature et les technologies), l'Université de Montréal, et par six autres universités au Québec et en Ontario.

Accromath bénéficie de l'appui du programme En avant math! du CRM.

