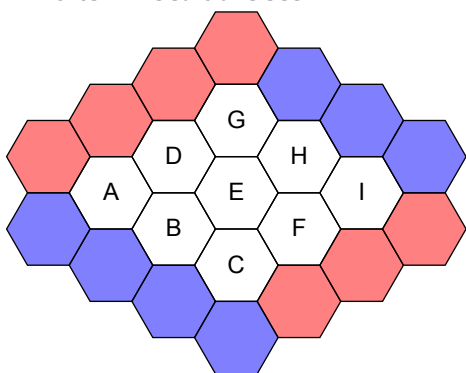


Été-automne 2026

Solutions

Jeu de Hex

1. Jouer dans le centre en E est un premier coup gagnant pour BLEU en trois coups. En effet, pour rejoindre chaque bord il a deux possibilités. Si à son premier coup ROUGE a bloqué une des possibilités vers le bord droit, par exemple H, à son deuxième coup, BLEU rejoint le bord concerné par la possibilité restante, soit G. Même chose pour le bord gauche à rejoindre. BLEU n'a pas besoin de bloquer ROUGE puisque ROUGE n'aura joué que deux coups au moment où BLEU termine sa traversée.



Ce n'est pas le seul premier coup gagnant. Si BLEU commence dans un des deux coins C ou G, il va aussi gagner. Supposons que BLEU commence en C. BLEU a quatre possibilités de gagner en trois coups, soit $\{C, F, I\}$, $\{C, F, H\}$, et $\{C, E, H\}$, et $\{C, E, G\}$. Quel que soit le premier coup joué par ROUGE parmi $\{F, I, E, H\}$, il restera au moins deux possibilités pour BLEU de gagner en trois coups. À son deuxième coup, BLEU doit jouer un deuxième coup compatible avec ces deux possibilités.

Par contre, tous les autres premiers coups pour B ne sont pas gagnants.

Si BLEU commence par le milieu d'un bord bleu, par exemple en B, et si ROUGE joue son premier coup au milieu en E, alors ROUGE va gagner à

condition de ne pas commettre d'erreur. En effet, la seule possibilité pour BLEU de gagner en trois coups est $\{B, D, G\}$. ROUGE bloque cette possibilité à son second coup en jouant D ou G et a alors deux possibilités de gagner à son troisième coup en jouant C ou F.

Si BLEU commence en A ou I il va aussi perdre. En effet, s'il commence en A, sa seule possibilité de gain en trois coups est $\{A, D, G\}$. ROUGE joue son premier coup au centre en E et joue D ou G à son deuxième coup. ROUGE peut alors terminer en trois coups en jouant C ou F au troisième coup.

Le dernier cas est celui où BLEU joue son premier coup au milieu d'un côté rouge, soit en D ou F. Supposons que ce soit en D. BLEU n'a alors que deux manières de gagner en trois coups, soit $\{D, A, G\}$ et $\{D, B, G\}$. ROUGE bloque les deux possibilités en jouant en G. Ceci lui offre quatre possibilités de gagner en trois coups, soit $\{G, H, I\}$, $\{G, H, F\}$, $\{G, E, F\}$ et $\{G, E, C\}$. En deux coups, BLEU ne peut ni gagner, ni bloquer les quatre possibilités que ROUGE a de gagner en trois coups. Donc, ROUGE gagne.

En résumé, les seuls premiers coups admissibles de la stratégie gagnante de BLEU sont G, E ou C.

À propos de la diagonale du carré

1. Afin d'établir l'irrationalité de $\sqrt{2}$, considérons un carré de côté 1 et donc (par Pythagore) de diagonale $\sqrt{2}$.

La diagonale et le côté de ce carré étant incommensurables, il n'existe pas (par définition de ce terme!) de segment étalon (disons de longueur e) tel que $\sqrt{2} = m \times e$ et $1 = n \times e$, avec m et n des naturels.

Autrement dit, considérant le rapport $\sqrt{2}/1$ des longueurs de la diagonale et du côté du carré unité, il n'est pas possible d'écrire ce rapport sous la forme

$$\frac{m \times e}{n \times e} = \frac{m}{n},$$

avec m et n des naturels.

Bref, on ne pourra jamais représenter $\sqrt{2}$ comme un rapport m/n de deux entiers naturels. Le réel $\sqrt{2}$ n'est donc pas un nombre rationnel.

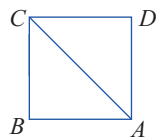
Note 1 :

Nous convenons ici, pour simplifier les notations, de représenter le rapport de deux grandeurs (ou nombres) a et b sous la forme d'une fraction a/b , plutôt qu'en utilisant l'écriture classique d'un rapport $a : b$.

Cette remarque vaut pour les exercices qui suivent.

2. On vise ici à rester le plus près possible des connaissances mathématiques de l'époque d'Aristote — connaissances magnifiquement rassemblées par Euclide dans son traité fondamental *Les Éléments*. Mais on va se permettre l'emploi de quelques notations (algébriques) plus modernes, et donc non en usage à l'époque d'Aristote.

Soit le carré $ABCD$ de diagonale AC de longueur d et de côté AB de longueur c .



De l'hypothèse voulant que la diagonale et le côté du carré sont commensurables, il suit qu'un certain segment (disons de longueur e) est une mesure commune de la diagonale et du côté du carré. Il existe donc, par hypothèse, des entiers naturels m et n tels que $d = m \times e$ et $c = n \times e$.

Outre le carré de côté AB (et d'aire c^2), introduisons aussi le carré de côté AC (et d'aire d^2) et considérons le rapport de l'aire du second carré à l'aire du premier. Ce rapport est donc de la forme

$$\frac{d^2}{c^2} = \frac{m^2}{n^2}. \quad (*)$$

On supposera ici que m et n sont premiers entre eux (définition 13 du Livre VII des *Éléments* d'Euclide), et donc que le rapport de naturels m/n est irréductible. (Autrement dit, ce dernier rapport est exprimé à l'aide des naturels les plus petits possibles.)

En vertu du théorème de Pythagore — fait mathématique bien connu à l'époque d'Aristote et présenté par Euclide à la proposition 47 du Livre I de ses *Éléments* —, on sait que $c^2 + c^2 = d^2$, et donc que

$$d^2 = 2c^2. \quad (**)$$

Il s'ensuit donc, par l'égalité de rapports (*), que

$$m^2 = 2n^2$$

et donc que le naturel m^2 est pair. Et on en tire (n'est-ce pas?) que m lui-même doit être pair. (Fait bien connu à l'époque d'Aristote!) Mais alors, comme le rapport m/n est irréductible, n doit être impair (car sinon m et n seraient tous deux divisibles par 2).

En posant $m = 2u$, on a alors

$$2n^2 = m^2 = 4u^2,$$

de sorte que $n^2 = 2u^2$. On en conclut que n^2 doit être pair, et donc n aussi. Mais on vient d'observer que n est impair. Contradiction!

Note 2 :

Cet argument est inspiré de celui présenté par Thomas Heath dans *Mathematics in Aristotle*, Oxford University Press, 1949, pp. 22-23. Heath s'intéresse alors justement au passage I.23 des *Prémières Analytiques* d'Aristote.

On aura noté ici une grande similitude avec la preuve (usuelle et bien connue) de l'irrationalité du réel $\sqrt{2}$, qui se déroule en supposant que $\sqrt{2}$ est rationnel et donc qu'il est de la forme

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b},$$

avec a et b des entiers naturels. En supposant la fraction a/b irréductible, un raisonnement similaire à celui qui précède peut être appliqué.

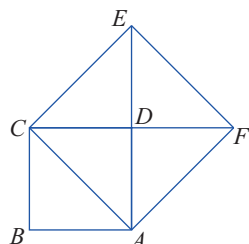
Il convient sans doute de souligner la différence entre les deux cadres argumentatifs : dans ce dernier cas, on s'intéresse à la longueur $\sqrt{2}$ de la diagonale d'un carré de côté 1 et on démontre que ce

1. La démonstration la plus simple de ce fait consiste à établir plutôt l'implication contraposée : si un naturel est impair, alors son carré est impair.

nombre (réel) est un irrationnel. Chez Aristote, on s'intéresse plutôt au fait que la diagonale de *tout* carré n'est pas commensurable avec le côté.

Note 3 :

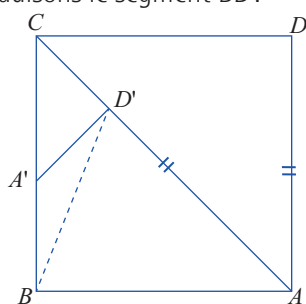
Le fait que le carré sur la diagonale a une aire double de celle du carré initial — c'est-à-dire $d^2 = 2c^2$, voir (**) — peut être vu comme découlant directement de la figure suivante.



On y voit immédiatement que l'aire du carré $ACEF$ est le double de l'aire du carré $ABCD$. On peut ainsi laisser en paix ce bon Pythagore... (même s'il se cache évidemment sous cette figure).

Cette figure est intimement liée à un célèbre passage tiré du *Ménon*, dialogue de Platon (- 428 — -347) dans lequel le grand philosophe grec nous présente son maître Socrate (-470 — -399), alors qu'il discute avec un esclave la question: comment doubler l'aire d'un carré? À noter qu'Aristote fut l'élève de Platon. L'héritage de la lignée Socrate — Platon — Aristote exerça une influence déterminante sur la façon dont les Grecs de l'Antiquité ont appréhendé les mathématiques.

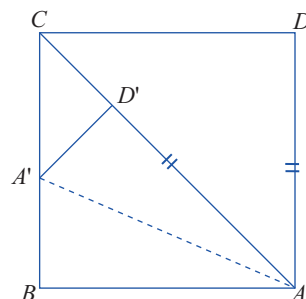
3. a) Introduisons le segment BD' .



Comme le segment AD' est congruent au côté du carré, le triangle BAD' est isocèle par construction même. Mais il en est alors de même du triangle $BA'D'$: en effet, deux des angles de ce dernier triangle sont

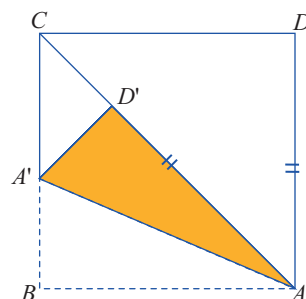
congruents, car ils sont les compléments de deux angles eux-mêmes congruents. (On utilise ici le fait que la figure de base est un carré et que le segment $A'D'$ est perpendiculaire à la diagonale AC .) On a ainsi établi que $A'B \cong A'D'$, tel que demandé.

b) Voici la figure obtenue en traçant le segment AA' .



On est maintenant en présence des triangles rectangles ABA' et $AD'A'$. Ces deux triangles ont la même hypoténuse AA' et deux cathètes congruents (par construction) : $AB \cong AD'$. Les triangles ABA' et $AD'A'$ sont donc congruents, en vertu du cas de congruence *cathète-hypoténuse* de triangles rectangles. On en conclut que les deux autres cathètes sont aussi congruents : $A'B \cong A'D'$.

c) Voici une figure représentant le pliage suggéré.



On superpose donc, par pliage, le côté AB sur la diagonale AC .

Le point B se retrouve ainsi placé en un point D' sur AC de telle sorte que le segment AD' est congruent au côté du carré.

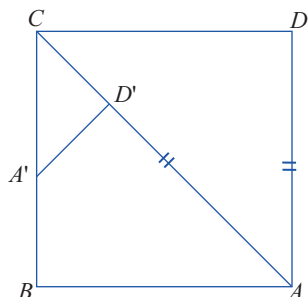
Le pli lui-même détermine un nouveau segment AA' avec A' sur le côté BC , le « coin » ABA' (de sommet B) du carré $ABCD$ étant maintenant ancré au point D' sur la diagonale.

Par construction même (c'est-à-dire en vertu du pliage), l'angle $AD'A'$ est droit (car il provient du coin ABA' du carré) : on est donc en présence d'un triangle rectangle (d'hypoténuse AA'). On a de plus la congruence $A'B \equiv A'D'$ (par la superposition elle-même).

Note 4 :

À noter que par l'une ou l'autre des trois méthodes de ce problème, on a ainsi obtenu la congruence $A'B \equiv CD'$. Autrement dit, le chemin allant de C à B , en passant par D' et A' , est composé trois segments de même longueur.

4. a) Considérons la première étape de la construction géométrique de Chrystal. À partir du carré $ABCD$ (de diagonale de longueur d et de côté de longueur c), nous déterminons un point D' sur la diagonale AC tel que le segment AD' est de longueur c , puis nous traçons $A'D'$ perpendiculaire à AC , avec A' à l'intersection avec le côté BC .



Le segment CD' est donc (par construction) de longueur $c' = d - c$.

Nous nous concentrons sur le triangle $A'CD'$. On a vu dans le texte (et il s'agit là d'un résultat élémentaire) qu'il est non seulement rectangle (par construction même) mais aussi isocèle. Le segment $A'D'$ est donc également de longueur c' . Et on vient de montrer (voir le problème #3) que $A'B \equiv A'D'$, de sorte que le segment $A'B$ est lui aussi de longueur c' . Ce dernier segment joue un rôle crucial dans ce qui suit.

Portant notre attention, dans le carré initial, sur le côté BC (de longueur c), le problème posé — montrer que la longueur c' (maintenant vue comme celle du segment $A'B$) est inférieure à $c/2$ — peut être interprété

comme revenant à vérifier que le segment $A'B$ est plus court que le segment $A'C$. Mais ceci est clair, car $A'C$ est l'hypoténuse du triangle rectangle $A'CD'$, dont les deux cathètes sont justement de longueur c' . Et il est bien connu que dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le plus long des trois côtés. (Ou encore, si l'on préfère, que dans un triangle, au plus grand angle est opposé le plus long des côtés — résultat qu'Euclide démontre au Livre I, proposition 19, de ses *Éléments*).

Comme le côté BC a été partagé en deux segments dont l'un (de longueur c') est plus court que l'autre, on a donc ainsi montré que $c' < c/2$.

Note 5 :

On pourrait reprendre le tout avec quelques notations algébriques. Le côté BC (de longueur c) est partagé en deux segments $A'B$ et $A'C$. Or la longueur de $A'B$ est $c' = d - c$, tandis que la longueur de $A'C$ est supérieure à c' (car c' est l'hypoténuse du triangle $A'CD'$ de cathètes c' « rectangle isocèle »). Il s'ensuit donc que

$$c > c' + c' = 2c', \text{ c'est-à-dire } c' < c/2.$$

Note 6 :

On peut aussi raisonner, dans un cadre numérique, en considérant la longueur d de la diagonale du carré de côté c . On sait (par Pythagore) que $d = \sqrt{2}c$. On a alors que

$$c' = d - c = \sqrt{2}c - c = (\sqrt{2} - 1)c.$$

Il s'agit donc maintenant de gérer le réel $\sqrt{2} - 1$. Or de l'inégalité (arbitraire mais astucieuse en l'occurrence)

$$2 < \frac{9}{4},$$

il découle que

$$\sqrt{2} < \frac{3}{2},$$

et donc

$$\sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2}.$$

L'inégalité $c' < c/2$ suit alors immédiatement.

Cette dernière démonstration fonctionne très bien ! Mais il a semblé préférable ici de mettre l'accent sur la première approche, purement géométrique et davantage dans l'esprit des mathématiques de l'époque de la Grèce antique.

- b) Il s'agit de montrer que la construction de Chrystal produit des carrés dont les côtés non seulement rapetissent, mais deviennent de fait arbitrairement petits, c'est-à-dire *aussi petits que l'on veut*. Cette condition, il faut le rappeler, joue un rôle crucial dans le raisonnement proposé par Chrystal (voir la note 7 ci-bas).

On notera à cet égard que ce n'est pas parce que des carrés ont des côtés de plus en plus petits qu'ils deviennent pour autant *arbitrairement petits*, c'est-à-dire aussi petits qu'on le souhaite, et donc que la longueur des côtés se rapproche de 0 d'aussi près que désiré. Par exemple, la famille des carrés dont les côtés ont pour longueurs successives $2,4 > 2,34 > 2,334 > 2,3334 > 2,33334 > \dots$ est composée effectivement des carrés qui rapetissent indéfiniment, mais ces carrés tendent vers le carré dont le côté est de longueur $2\frac{1}{3}$, et non pas vers un carré d'une petitesse arbitraire.

Il nous faut donc, dans le cas de la figure de Chrystal, travailler un peu plus. Le rythme de décroissance joue un rôle clé dans ce contexte et c'est ici que le paramètre $1/2$ de la partie a) intervient.

On sait déjà (voir l'encadré dans le texte, p. 6) que la construction de Chrystal mène à des carrés dont les côtés vont en diminuant :

$$c > c' > c'' > c''' > \dots$$

Or le résultat de la partie a) se généralise ici, de sorte que chacune de ces longueurs (à partir de c') est moindre que la moitié de celle qui précède. Cette suite de longueurs a donc un rythme de décroissance marquée, ce qui va permettre de montrer que les longueurs en jeu deviennent arbitrairement petites.

Il y aurait diverses manières d'aborder cette question, dont l'idée d'introduire la « somme infinie »

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Il s'agit là d'un exemple de *série géométrique* et la somme S s'interprète comme la limite, pour n devenant aussi grand que désiré, des sommes finies

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n}.$$

Avec les outils de base sur les limites introduits dans un premier cours de calcul au cégep, on peut montrer que cette limite existe bel et bien, de sorte que $S = 1$.

L'interprétation de cette valeur de S , pour la question qui nous intéresse, est que si on part du côté de longueur c du carré initial, et qu'on lui enlève sa moitié, puis encore la moitié de ce qui reste, et ainsi de suite, le total de ce qu'on enlève s'approche d'aussi près que l'on veut de la longueur c totale. Autrement dit, quelle que soit une infime partie de c à laquelle on pense, on va finir par se retrouver avec un bout de côté plus court que cette longueur donnée.

Et cela demeure bien sûr encore vrai si, à chaque étape, on enlève plus de la moitié de ce qui reste, comme tel est le cas dans la construction de Chrystal.

Note 7 :

Il peut être utile ici de rappeler ici la façon dont ce dernier résultat intervient dans le raisonnement de Chrystal.

Si on suppose que le carré initial est tel que sa diagonale et son côté ont une mesure commune de longueur e , alors tous les carrés produits par la construction de Chrystal ont ce même segment étalon (de longueur e) comme mesure commune de leur diagonale et leur côté. Mais les carrés à la Chrystal rapetissent sans limite, et deviennent donc éventuellement avec un côté inférieur à e , ce qui est bien sûr en contradiction avec le fait que ce même segment de longueur e mesure ce côté.

Note 8 :

J'ai utilisé ici la méthode (moderne) des séries géométriques pour justifier que la construction de Chrystal produit des carrés arbitrairement petits, en conséquence du fait que chaque étape « bouffe » plus de la moitié du côté du carré où on est rendu. Mais ce phénomène de décroissance — que j'ai qualifiée de « vigoureuse » dans l'article (voir p. 6) — était accessible aux mathématiciens grecs de l'Antiquité (et ce, sans l'emploi des séries géométriques). La proposition 1 du Livre X des *Éléments* d'Euclide se lit en effet comme suit :

Deux grandeurs inégales étant proposées, si de la plus grande est retranchée une grandeur plus grande que sa moitié, puis du reste une grandeur plus grande que sa moitié, et que ceci soit toujours poursuivi, une certaine grandeur restera, laquelle sera plus petite que la plus petite grandeur proposée.²

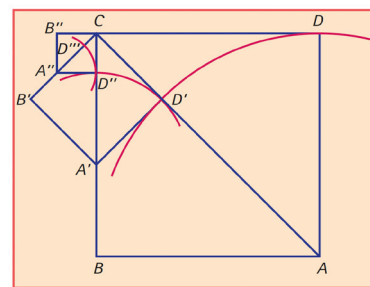
Cette proposition, qui se retrouve mise en action notamment dans divers travaux d'Euclide et d'Archimède, serait utilisable telle quelle dans l'approche de Chrystal.

Cette observation à propos de la proposition X.1 d'Euclide vient renforcer l'idée que la construction géométrique présentée par Chrystal dans son traité de 1886, ainsi que son raisonnement menant à l'incommensurabilité de la diagonale et du côté du carré, reposent sur une démarche faisant intervenir des contenus mathématiques tout à fait familiers à l'époque d'Aristote et d'Euclide. Mais pour autant que je sache, cette preuve de Chrystal ne semble pas avoir été connue à l'époque. C'est aussi ce qu'affirment Hans Rademacher et Otto Toeplitz – voir l'encadré *À propos de la construction de Chrystal* à la p. 5 de l'article.

Note 9 :

En lien avec cette dernière remarque à propos des connaissances sur lesquelles la démonstration de Chrystal prend appui, il peut être intéressant de noter que la construction des carrés à la Chrystal peut s'effectuer par règle et compas.

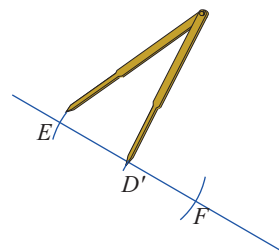
En effet, traçant d'abord un arc de cercle de centre A et de rayon AD , on obtient le point D' à l'intersection avec la diagonale AC . Élevant alors – à la règle et au compas – la perpendiculaire à la diagonale passant par D' , on obtient le point A' à l'intersection avec le côté BC . On trace ensuite un nouvel arc de cercle de centre A' et de rayon $A'D'$, ce qui produit le point D'' sur $A'C$, puis la perpendiculaire en D'' , qui donne le point A'' . On pourrait poursuivre de même, règle et compas, pour les points D''' , A''' , etc.



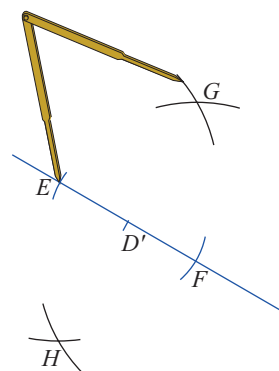
Malgré une certaine subtilité dans le raisonnement de Chrystal, on demeure donc ici dans un cadre géométrique somme toute assez élémentaire et bien connu des mathématiciens grecs de l'Antiquité. Mais cette preuve ne semble pourtant pas avoir été connue d'eux.

Note 10 : (en guise de rappel)

Pour élever une perpendiculaire en un point D' d'une droite, on détermine d'abord sur celle-ci, à l'aide du compas, deux points E et F équidistants de ce point, en prenant une ouverture arbitraire du compas.

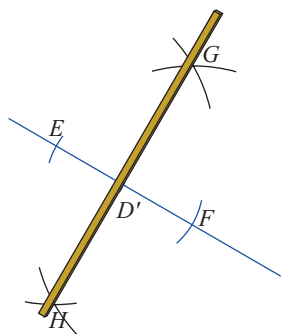


Puis, en ouvrant le compas avec un écart supérieur à ED' et en prenant successivement les points E et F comme centres, on trace des arcs de cercle qui se coupent en G et H .



On obtient la perpendiculaire cherchée en joignant le point G et H à l'aide d'une règle non graduée.

2. Bernard Vitrac, Euclide d'Alexandrie, Les Éléments, volume 3. PUF, 1998, p. 87.



(La vérification de ladite perpendicularité est laissée aux soins du lecteur. Cette construction revient à déterminer un segment EF dont D' est le point milieu, puis à tracer la médiatrice de EF .)

Carré naturel et carré magique parfait

En additionnant la somme des 100 premiers entiers dans l'ordre et dans l'ordre inverse, on obtient

$$1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$$

$$100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1$$

$$101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101$$

Soit 100×101 et en divisant par 2, on obtient

$$\frac{100 \times 101}{2} = 5\,050.$$

Cette relation se généralise facilement, en effet

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n$$

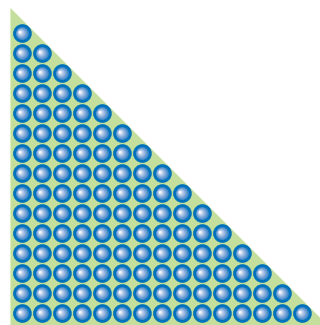
$$n + (n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1$$

$$(n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1)$$

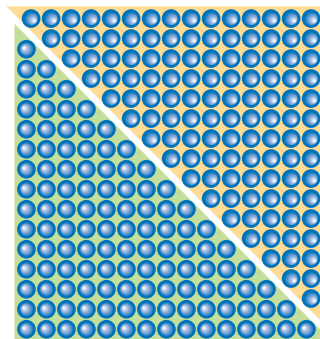
On a donc $n(n+1)$ et en divisant par 2, on obtient que la somme des n premiers entiers est

$$\frac{100 \times 101}{2} = 5\,050.$$

On peut interpréter la démarche de Gauss à l'aide de la représentation géométrique des nombres utilisée par les Pythagoriciens. Prenons la représentation du nombre triangulaire ayant quinze points sur le côté.



On écrit le nombre en ordre inverse pour obtenir le nombre oblong.



Dans ce rectangle, il y a seize lignes et 15 colonnes. En effet, en prenant $n = 15$, on a $n + 1 = 16$ et $n(n+1) = 240$. Il reste à diviser par 2 pour obtenir 120.

Le Lotto 6/49

Rappelons les différents lots ainsi que la manière dont la cagnotte est calculée. Les différents lots sont présentés au Tableau 1, et le fonds de cagnottes est établi à partir du fonds de lots. Le fonds de lots est donné par le nombre de billets multiplié par 0.55 \$, c'est-à-dire

Fonds de lots est égal à

$$13983816n \times 0.55\$ = 7\,691\,098.80n\$.$$

Configuration	Lot	Nombre de cas favorables
6/6	Part de 5 000 000 \$	n
5/6+	Part de 32,15 % de la cagnotte	$6n$
5/6	Part de 13,5 % de la cagnotte	$252n$
4/6	Part de 54,35 % de la cagnotte	$13\,545n$
3/6	10 \$	$246\,820n$
2/6+	5 \$	$172\,200n$
2/6	Participation gratuite	$1\,678\,950n$

Tableau 1: Structure des lots du Lotto 6/49 et nombre

de cas favorables

Pour établir le fonds de cagnotte, il faut soustraire du Fonds de lots les montants versés pour les configurations 3/6, 2/6+ et 2/6. On rappelle que la somme réputée payable pour les participations gratuites (2/6) est de 1.44 \$. Afin de calculer les montants payés, il faut multiplier les prix par le nombre de cas favorables, ce qui correspond à n fois le nombre de cas favorables pour chaque configuration (voir Tableau 1). Ainsi, on obtient

Fonds de cagnottes égale à

$$\begin{aligned} & (7691098.80\$ - 1678950 \times 1,44\$ - 172200 \times 5\$ \\ & \quad - 246820 \times 10\$)n \\ & = (7\,691\,098,80\$ - 5746888\$)n \\ & = 1944210,80n\$. \end{aligned}$$

Afin d'obtenir les lots qui nous intéressent, il faut diviser le montant total par le nombre de cas favorables. Pour la configuration 6/6, le lot est directement donné par

$$\text{Lot } 6/6 = 5\,000\,000\$/n.$$

Pour obtenir les lots des configurations 5/6+, 5/6 et 4/6, il faut d'abord calculer les proportions de la cagnotte. On obtient

Cagnotte 5/6+ égale à

$$1\,944\,210,80n \times 0.3215\$ = 625\,063,77n\$,$$

Cagnotte 5/6 égale à

$$1\,944\,210,80n \times 0.135\$ = 262\,468,46n\$,$$

Cagnotte 4/6 égale à

$$1\,944\,210,80n \times 0.5435\$ = 1\,056\,678,57n\$.$$

Il suffit ensuite de diviser ces montants par le nombre de cas favorables, ce qui donne

$$\text{Lot } 5/6+ = 625\,063,77n\$/6n = 104\,177,30\$,$$

$$\text{Lot } 5/6 = 262\,468,46n\$/252n = 1\,041,54\$,$$

$$\text{Lot } 4/6 = 1\,056\,678,57n\$/13545n = 78,01\$.$$

Remarquons que ces derniers lots ne dépendent pas de n , contrairement au lot 6/6. Il existe donc une valeur de n pour laquelle une personne gagne davantage avec le lot 5/6+ qu'avec le 6/6. Cette valeur correspond à la solution de l'inéquation

$$\begin{aligned} & 104\,177,30\$ > 5\,000\,000\$/n \Leftrightarrow \\ & n > 5\,000\,000/104\,177,30 = 47,9951. \end{aligned}$$

Ainsi, pour $n = 48$ séries complètes de billets, la configuration 5/6+ offre un lot plus élevé que celle du 6/6.

Fait amusant :

Le nombre total de billets pour $n = 48$ est de 671 223 168, ce qui correspond approximativement à la population de l'Amérique latine et des Caraïbes. Pour $n = 588$, on obtient approximativement la population mondiale et le gros lot devient 8 503,40 \$ pour chaque gagnant.

La symétrie cachée des nombres naturels



Posons $A = \{a_1, \dots, a_5\}$ et $B = \{b_1, \dots, b_5\}$. L'hypothèse que A et B forment un 5-5 *soaisu* ♥♥♥♥ de force 4 signifie :

$$\sum_{i=1}^5 a_i^k = \sum_{i=1}^5 b_i^k \quad \text{pour } k \in \{1, 2, 3, 4\}. \quad (1)$$

C'est cette hypothèse, et uniquement celle-ci, que nous utiliserons dans la démonstration.

Étape 1 : Développement par le théorème du binôme.

Pour un $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ fixé, le théorème du binôme donne :

$$(a_i + n)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_i^{k-j} n^j. \quad (2)$$

Étape 2 : Sommation sur $i = 1, \dots, 5$.

En sommant (2) pour $i = 1, \dots, 5$ et en faisant sortir de la somme les facteurs $\binom{k}{j}$ et n^j qui ne dépendent pas de i , on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 (a_i + n)^k &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} n^j \sum_{i=1}^5 a_i^{k-j} \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^5 a_i^k}_{(1)} + \binom{k}{1} n \underbrace{\sum_{i=1}^5 a_i^{k-1}}_{(11)} + \dots \\ &\quad + \binom{k}{k-1} n^{k-1} \underbrace{\sum_{i=1}^5 a_i}_{(111)} + 5n^k. \quad (3) \end{aligned}$$

Étape 3 : Substitution grâce à l'hypothèse.

Chaque somme de puissances $\sum_{i=1}^5 a_i^{k-j}$ apparaissant dans (3) a pour exposant

$$k-j \in \{1, 2, \dots, K\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\},$$

donc l'hypothèse (1) s'applique et l'on peut rem-

placer $\sum_{i=1}^5 a_i^{k-j}$ par $\sum_{i=1}^5 b_i^{k-j}$.

Le terme constant $5n^k$ est indépendant du choix de l'ensemble, d'où :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 (a_i + n)^k &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} n^j \sum_{i=1}^5 b_i^{k-j} \\ &= \sum_{i=1}^5 (b_i + n)^k. \end{aligned} \quad (4)$$

Conclusion

Pour tout $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, on a bien

$$\sum_{i=1}^5 (a_i + n)^k = \sum_{i=1}^5 (b_i + n)^k. \quad (5)$$

Autrement dit, ajouter un même entier n à chaque élément préserve la propriété de 5-5 *soaisu* ♥♥♥♥ de force 4.

Vérification numérique ($n = 7$).

Puissance k	$\sum (a_i + 7)^k$	$\sum (b_i + 7)^k$	Égalité
1	100	100	Oui
2	2 250	2 250	Oui
3	55 000	55 000	Oui
4	1 419 234	1 419 234	Oui
5	37 948 600	37 898 200	Non

L'échec pour $k = 5$ confirme que la force est exactement 4, et que le théorème ne peut pas s'appliquer au-delà.

Remarque. La démonstration ci-dessus s'applique, sans aucune modification de fond, à tout p - p *soaisu* de force k_0 quelconque -c'est-à-dire vérifiant l'égalité des sommes de puissances pour $k = 1, \dots, k_0$ -, quel que soit le nombre d'éléments p . Il suffit de remplacer 5 par p et 4 par k_0 dans chaque étape de la preuve.