

Hiver-printemps 2026

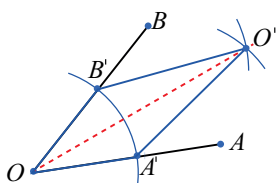
Solutions

Une trisection par zigonnage

1) Bissection de l'angle

Étant donné un angle AOB de sommet O , les étapes pour construire à la règle et au compas sa bissectrice sont donc les suivantes (tel qu'indiqué sommairement par Juliette à la p. 6 du texte) :

- i) pointe sèche du compas au sommet O , tracer un arc de cercle quelconque, déterminant ainsi deux points A' et B' sur les côtés OA et OB de l'angle (à noter qu'on a donc ainsi, par construction même, la congruence $OA' \cong OB'$);
- ii) avec une ouverture de compas « pas trop petite » (en pratique, au moins la moitié de la distance entre les points A' et B'), tracer un arc de cercle de centre A' à l'intérieur de l'angle AOB ;
- iii) en gardant la même ouverture de compas qu'à l'étape (ii), tracer un arc de cercle de centre B' à l'intérieur de l'angle AOB et croisant l'arc obtenu en (ii) en un point O' (à noter qu'on a maintenant que $A'O' \cong B'O'$);
- iv) tracer la droite OO' : c'est la bissectrice recherchée!



La justification du fait qu'on a bien construit la bissectrice de l'angle AOB repose tout simplement sur le cas de congruence CCC : en effet, les deux triangles $OB'O'$ et $OA'O'$ sont congruents en vertu des deux remarques formulées aux points (i) et (iii) ci-haut, conjuguées avec le fait que OO' est un côté commun à ces deux triangles. Les deux angles $\angle AOO'$ et $\angle BOO'$ – ou si l'on préfère $\angle A'O'O'$ et $\angle B'O'O'$ – sont donc congruents, étant des angles homologues dans des triangles congruents.

Note 1 : Le fait d'avoir conservé la même ouverture de compas lors des étapes (ii) et (iii) joue bien sûr un rôle crucial ici.

Note 2 : Dans la figure qui précède, on a pris aux étapes (ii) et (iii) une ouverture de compas un peu plus grande qu'en (i), obtenant ainsi un quadrilatère $OA'O'B'$ en forme de *cerf-volant*. Si on avait pris la même ouverture de compas qu'en (i), on aurait alors obtenu un *losange*. Dans les deux cas, la congruence des angles $\angle A'O'O'$ et $\angle B'O'O'$ découle du même raisonnement.

2) Trisection de l'angle

Étant donné l'angle AOB de sommet O , il convient sans doute ici de reprendre pas à pas les étapes de la construction, selon la méthode d'Archimède, de la fameuse¹ droite BD (voir la description de Roméo à la p. 7 du texte). Nous travaillons donc avec le compas et une baguette.²

- i) Pointe sèche du compas au sommet O , tracer un cercle de rayon OA – nous posons $r = m(OA)$;
- ii) considérant le diamètre AA' , le prolonger au-delà de son extrémité A' ;
- iii) inscrire sur la baguette deux marques (appelons-les X et Y) telles que la distance les séparant est égale à r – nous convenons ici, en lien avec la figure qui suit, que la marque X est à la gauche et la marque Y à la droite, sur cette baguette;
- iv) placer ensuite la baguette de sorte qu'elle passe par le point B et que la marque Y soit sur l'arc de cercle BA' ;³

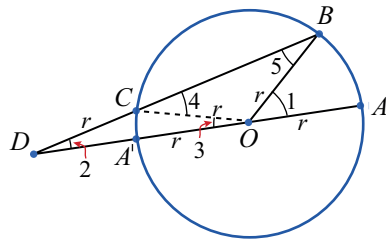
1. Les adeptes des constructions à la règle et au compas au sens classique parleraient peut-être de la fameuse droite BD ...

2. Tel qu'exprimé dans le texte, cette baguette peut être vue comme étant tout simplement la règle non graduée, mais manipulée ici d'une drôle de manière...

3. On s'intéresse ici au « petit » arc de cercle BA' , celui qui ne contient pas le point A .

- v) déplacer enfin la baguette en la faisant glisser de manière à ce que :
- elle passe toujours par le point B ,
 - la marque Y se déplace le long de l'arc BA' ,
 - et la marque X finit par tomber sur le prolongement de AA' ;
- à la suite de cette étape (un brin rocambolesque...), la marque Y est rendue en C et la marque X est en D , et ce, de telle sorte que les trois points B , C et D sont alignés.

Notre baguette correspond alors au segment BD ci-dessous, avec le point D sur le prolongement du diamètre du cercle et le point C sur le cercle – le segment CD étant de longueur r .



Nous allons maintenant montrer que la mesure de l'angle $\angle ADB$ (alias $\angle 2$) vaut le tiers de celle de l'angle $\angle AOB$ donné (alias $\angle 1$).

- Observons tout d'abord que le triangle DCO est isocèle, car les côtés CD et CO sont congruents, puisque $m(CD) = m(CO) = r$. Il s'ensuit donc que

$$m\angle 2 = m\angle 3.$$

- Comme l'angle $\angle 4$ est un angle extérieur de ce même triangle, on a alors

$$m\angle 4 = m\angle 2 + m\angle 3 = 2 \times m\angle 2.$$

- Considérant maintenant le triangle COB , on voit qu'il est lui aussi isocèle (car OC et OB sont des rayons du cercle), de sorte que

$$m\angle 5 = m\angle 4 = 2 \times m\angle 2.$$

- Portant enfin notre attention sur le « grand » triangle DOB , on voit que notre angle de départ AOB (l'angle $\angle 1$) en est un angle extérieur. On en conclut donc que

$$\begin{aligned} m\angle 1 &= m\angle 2 + m\angle 5 \\ &= m\angle 2 + 2 \times m\angle 2 \\ &= 3 \times m\angle 2, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que l'angle $\angle 2$ vaut le tiers de l'angle $\angle 1$, tel que demandé. Nous avons donc bel et bien trisécté l'angle AOB .

Note 3 : On aura remarqué que dès l'étape (iii), on ne respecte pas les règles usuelles d'une construction à la règle et au compas, car il est interdit, dans le cas classique, de faire des marques sur la règle non graduée. Pour le dire autrement, cette règle ne doit servir, dans une construction usuelle, qu'à tracer une droite passant par deux points déjà connus – c'est-à-dire deux points *construits* ou encore *figurant dans l'énoncé du problème*.

Quant à l'action de l'étape (iv), elle n'est pas vraiment problématique en soi, car elle pourrait se voir tout bonnement comme revenant à tracer une droite passant par le point B et par un point arbitrairement choisi sur l'arc de cercle BA' .

C'est bien sûr lors de l'étape (v) que l'on sort radicalement du cadre classique des constructions à la règle et au compas. L'étrange opération à laquelle on doit alors se livrer avec notre *zigonneur* ne respecte pas du tout les consignes usuelles. Accrochant, pour ainsi dire, notre baguette au point B , on sous-entend qu'on peut néanmoins à la fois la faire pivoter autour de B et aussi lui imprimer un mouvement de va-et-vient en la faisant glisser en quelque sorte sur B . Et ce, de telle manière qu'on aboutisse avec la marque Y sur l'arc BA' (obtenant ainsi le point C) et la marque X sur le prolongement du diamètre AA' (ce qui donne le point D). Tout un zigonnage!

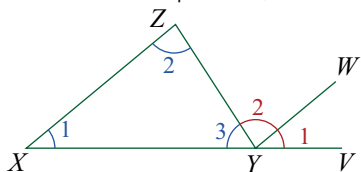
La figure géométrique ainsi obtenue est tout à fait claire et très inspirante en vue d'argumenter qu'on a ainsi réalisé une trisection d'angle! *Mais ce n'est pas le fruit d'une construction règle et compas!*

Note 4 : On a utilisé ici le résultat élémentaire affirmant que

la mesure d'un angle extérieur dans un triangle est égale à la somme des mesures de deux angles intérieurs qui ne lui sont pas adjacents.

Ce résultat est habituellement vu de nos jours comme découlant tout simplement du fait que la somme des angles d'un triangle vaut 180° , conjugué avec la définition d'un angle extérieur, qui est le supplémentaire de l'angle intérieur qui lui est adjacent dans le triangle.

Le théorème sur l'angle extérieur du triangle se retrouve à la proposition 32 du Livre I des *Éléments* d'Euclide, où il est alors démontré comme découlant de l'égalité de certains des angles déterminés par deux droites parallèles coupées par une sécante. La figure sur laquelle s'appuie Euclide est la suivante, dans laquelle, par le sommet Y du triangle XYZ , on a tracé la droite YW parallèle au côté XZ . Il s'ensuit que $\angle VYW \cong \angle YXZ$ (angles correspondants, marqués $\angle 1$) et que $\angle WYZ \cong \angle XZY$ (angles alternes-internes, marqués $\angle 2$).



Chez Euclide, le raisonnement se conclut alors par les observations suivantes :

- primo, l'angle extérieur VYZ – c'est-à-dire les deux angles VYW et WYZ pris ensemble – a pour mesure la somme des deux angles intérieurs non adjacents YXZ et XZY ; et
- secundo, la somme des trois angles du triangle XYZ équivaut à un angle plat, comme il ressort clairement en regardant les trois angles ayant pour sommet le point Y .

D'où l'énoncé donné par Euclide de sa proposition I.32 :

*Dans tout triangle, un des côtés étant prolongé, l'angle extérieur est égal aux deux angles intérieurs et opposés, et les trois angles intérieurs du triangle sont égaux à deux droits.*⁴

Note 5 : Le lecteur intéressé à en savoir davantage sur la trisection de l'angle pourra consulter dans *Accromath* les deux textes suivants:

Jérôme Fortier, « Des constructions impossibles! » *Accromath*, vol. 4, hiver-printemps 2009, pp. 12-15.

Christiane Rousseau, « Les mathématiques de l'Origami. » *Accromath*, vol. 11, été-automne 2016, pp. 14-19.

Le premier de ces textes présente le cadre géométrico-algébrique sur lequel s'appuie le ré-

sultat affirmant qu'il n'est pas possible de trisectionner un angle quelconque à la règle et au compas. Le second texte montre comment un changement de décor – Christiane Rousseau y travaille selon les règles de pliage de l'Origami – permet d'obtenir la trisection de l'angle.

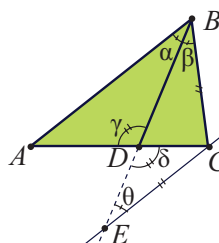
Coordonnées bipolaires

Théorème de la bissectrice

Démontrez le théorème de la bissectrice et sa réciproque en vous aidant de la figure 1, où BD est la bissectrice intérieure de l'angle ABC : $\angle ABD = \angle CBD$. On a tracé la parallèle à AB passant par C , et on appelle E son point d'intersection avec la droite BD .

1. Puisque DB est la bissectrice de l'angle intérieur, on a $\angle \alpha$ et $\angle \beta$ sont congrus. De plus, les angles $\angle \alpha$ et $\angle \theta$ sont également congrus, car alternes-internes. Les angles $\angle \gamma$ et $\angle \delta$ sont aussi congrus, car opposés par le sommet. On en tire que les angles $\angle \beta$ et $\angle \theta$ sont congrus et que les triangles ADB et CDE sont semblables. Leurs côtés correspondants sont donc proportionnels, soit

$$\frac{|BA|}{|CE|} = \frac{|DA|}{|DC|}.$$



Or, puisque $\angle \theta$ et $\angle \beta$ sont congrus, le triangle BCE est isocèle. On a donc $|CE| = |BC|$, d'où la conclusion:

$$\frac{|BA|}{|BC|} = \frac{|DA|}{|DC|}.$$

Réciproque

Puisque AB est parallèle à CE , on remarque que $\angle \alpha = \angle \theta$, comme angles alternes-internes, et $\angle \gamma = \angle \delta$, comme opposés par le sommet. Donc les triangles ABD et CDE sont semblables et

$$\frac{|BA|}{|EC|} = \frac{|DA|}{|DC|}.$$

4. Bernard Vitrac, Euclide d'Alexandrie, Les Éléments, volume 1. PUF, 1990, p. 255.

Puisque par hypothèse, on a $\frac{|BA|}{|BC|} = \frac{|DA|}{|DC|}$,

on conclut que $|BC| = |EC|$, le triangle ECB est donc isocèle et $\angle\theta = \angle\beta$. Puisque $\angle\alpha = \angle\theta$, et $\angle\theta = \angle\beta$, on a donc $\angle\alpha = \angle\beta$, la droite BD est donc la bissectrice intérieure de l'angle $\angle ABC$.

Théorème de la bissectrice extérieure

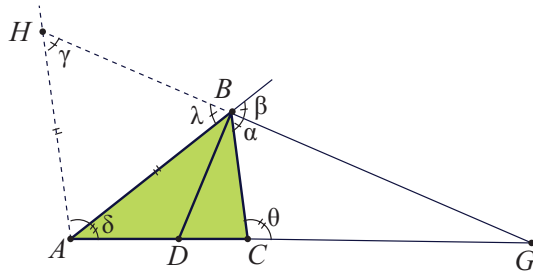
Démontrez le théorème de la bissectrice extérieure et de sa réciproque en vous aidant de la figure 2, où BG est la bissectrice extérieure de l'angle ABC : $\angle ABD = \angle CBD$. On a tracé la parallèle à BC passant par A , et on appelle H son point d'intersection avec la droite BG .

- Puisque BG est la bissectrice de l'angle extérieur, on a que $\angle\alpha$ et $\angle\beta$ sont congrus. De plus, les angles $\angle\alpha$ et $\angle\gamma$ sont congrus, car correspondants par rapport aux parallèles BC et HA . Les angles $\angle\beta$ et $\angle\lambda$ sont aussi congrus, car opposés par le sommet. On en tire que les angles $\angle\gamma$ et $\angle\lambda$ sont congrus et que les triangles AHB est isocèle. Les côtés opposés à ces angles sont donc congrus et $|HA| = |BA|$. Les triangles HGA et BGC sont donc semblables, ce qui donne

$$\frac{|HA|}{|BC|} = \frac{|GC|}{|GA|}.$$

Puisque $|HA| = |BA|$, on en tire

$$\frac{|BA|}{|BC|} = \frac{|GC|}{|GA|}.$$



Réciproque

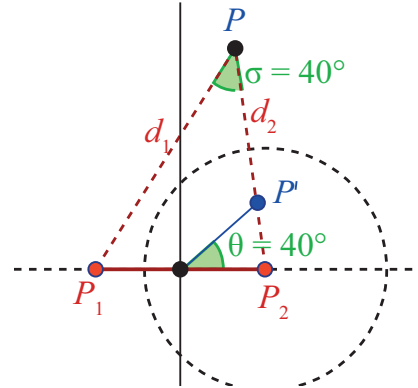
Si $\frac{|BA|}{|BC|} = \frac{|GA|}{|GC|}$, on prolonge GB jusqu'en H le point de rencontre avec AH parallèle au côté CB . On a alors $\angle\alpha = \angle\gamma$ et le triangle HAG est semblable au triangle BCG , donc

$$\frac{|HA|}{|BC|} = \frac{|GA|}{|GC|}.$$

Par l'hypothèse, on en déduit que $|HA| = |BA|$ et le triangle HAB est isocèle, donc $\angle\lambda = \angle\gamma$.

On en conclut que la droite BG est la bissectrice extérieure de l'angle $\angle ABC$.

- Déterminez le centre et le rayon du cercle de l'inversion qui transforme la grille bipolaire de foyers $P_1(-a, 0)$ et $P_2(a, 0)$ en grille polaire. De plus, montrez que la coordonnée bipolaire $\angle\sigma$ du point P est égale à la coordonnée polaire $\angle\theta$ de P' , l'image de P .



- Le cercle d'inversion est de rayon $r = a\sqrt{2}$ et de centre $C = P_2(a, 0)$.

Preuve que $\angle\sigma = \angle\theta$ utilisant les propriétés de l'inversion.

On a vu que $\angle\sigma = \angle\alpha$. Or $\angle\alpha$ est l'angle entre la droite P_1P_2 et l'arc capable passant par P . L'inversion transforme l'arc capable en demi-droite OP' et la droite P_1P_2 en elle-même. Comme elle préserve les angles, on a $\angle\alpha = \angle\theta$.

Preuve que $\angle\sigma = \angle\theta$ par triangles semblables.

L'inversion de centre P_2 entraîne que $|P_2P'| \cdot |P_2P| = |P_2O| \cdot |P_2P_1| = r^2$.

Ainsi,

$$\frac{|P_2P'|}{|P_2O|} = \frac{|P_2P_1|}{|P_2P|}.$$

Les triangles P_1PP_2 et $P'OP_2$ sont donc semblables, ce qui entraîne que $\angle\sigma = \angle\theta$.

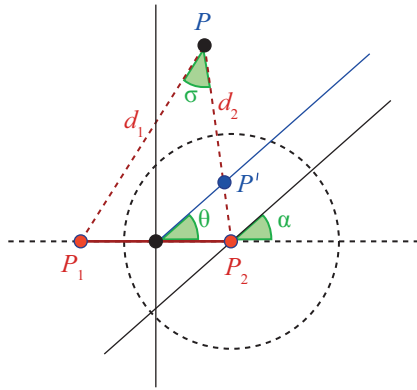


Figure 4: P et son image P' par inversion: $\angle\sigma = \angle\alpha = \angle\theta$.

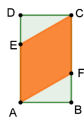
Perdu en forêt

Dans l'article : *Perdu en forêt*, on a vu que pour une forêt rectangulaire de largeur 1, si la forêt est grosse, alors le chemin optimal est la ligne droite. Si la forêt est étroite et son diamètre est plus grand ou égal à longueur du chemin de Zalgaller, soit environ 2,2783, alors c'est le chemin de Zalgaller. Trouver toutes les longueurs de rectangle pour lesquels l'article n'a pas présenté de solution optimale.

1. On recherche la longueur maximale λ d'un rectangle de largeur 1 qui contient le losange de la construction (cas d'une grosse forêt). En posant $x = BF$, et en utilisant $x^2 + 1^2 = (2x)^2$. On trouve $x = \sqrt{3}/3$, on déduit que

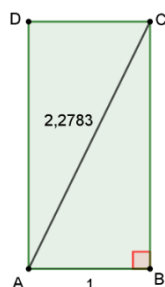
$$AD = AE + ED = AF + FB = 2x + x = 3x = \sqrt{3}.$$

Donc $\lambda_{\max} = \sqrt{3} \approx 1,732..$



Si la diagonale du rectangle vaut la longueur du chemin de Zalgaller $D \approx 2,2783$, la longueur correspondante du rectangle est, par Pythagore, $\sqrt{D^2 - 1} \approx 2,047$.

Bref, l'article *Perdu en forêt* n'aborde pas les rectangles de largeur 1 dont la longueur vérifie $\sqrt{3} < \lambda < 2,047$.



Démontrer pour tout naturel $n \geq 4$ qu'une forêt en forme d'un polygone régulier à n côtés est une grosse forêt.

2. Considérons un polygone régulier convexe de $n \geq 4$ côtés, de côté 1.

Le losange utilisé dans la définition d'une grosse forêt est lui aussi convexe.

Comme l'intersection de deux convexes est convexe, et comme un objet convexe est entièrement déterminé par ce qui se passe à sa frontière, il suffit de vérifier que :

1. la grande diagonale du losange peut être placée sur un diamètre du polygone ;
2. les deux pointes du losange situées à chaque extrémité de ce diamètre restent à l'intérieur du polygone.

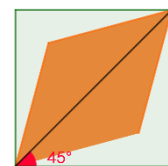
Pour cela, on doit vérifier que, en chaque extrémité du diamètre choisi, l'angle formé entre le diamètre et chacun des deux côtés adjacents du polygone est au moins de 30° .

En effet, l'angle aigu du losange est 60° , donc il suffit que chaque côté s'écarte du diamètre d'au moins la moitié de cet angle.

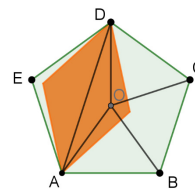
Ainsi, par convexité, il n'est pas nécessaire d'examiner l'intérieur du polygone : il suffit de contrôler les deux sommets où le losange touche.

Cas $n = 4$

Dans un carré, le diamètre passant par deux sommets fait un angle de 45° avec les côtés. Comme $45^\circ > 30^\circ$, le losange tient entièrement à l'intérieur.



Cas $n = 5$



Soit le pentagone régulier $ABCDE$ de centre O . On a alors

$$\angle AOB = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

et $\angle AOD = 2 \times \frac{360^\circ}{5} = 144^\circ$.

Comme les triangles AOB et AOD sont isocèles, on trouve

$$\angle OAB = \frac{180^\circ - 72^\circ}{2} = 54^\circ$$

$$\text{et } \angle DAO = \frac{180^\circ - 144^\circ}{2} = 18^\circ.$$

Comme le pentagone est régulier, on a

$$\angle BAE = \frac{180^\circ(5-2)}{5} = 108^\circ.$$

On conclut que

$$\angle DAB = \angle DAO + \angle OAB = 18^\circ + 54^\circ = 72^\circ$$

$$\text{et } \angle DAE = \angle BAE - \angle DAB = 108^\circ - 72^\circ = 36^\circ.$$

Comme $72^\circ > 30^\circ$ et $36^\circ > 30^\circ$, le losange tient entièrement à l'intérieur.

Cas $n \geq 6$

Pour les polygones réguliers à n côtés, la formule des angles est : $\frac{180(n-2)^\circ}{n}$.

Donc les angles sont plus grands, et il y a encore plus de place pour mettre le losange. Si n est impair, plus la valeur de n est grande, plus la hauteur est proche du diamètre, donc ça ajoute de l'espace des deux côtés du coin du losange.

Bref, il est toujours possible d'inclure le losange dans tous les polygones réguliers à n côtés si $n \geq 4$, ce sont donc toutes de grosses forêts.

Cavaliers contre le roi sur l'échiquier infini : Qui est le plus rapide

1. Si $a + b$ est pair, le (a, b) -cavalier ne peut atteindre qu'une seule couleur.

Une case (x, y) est blanche si $x + y$ est pair, et noire sinon. Un coup du (a, b) -cavalier transforme (x, y) en (x', y') avec $x' = x \pm a$ et $y' = y \pm b$. On a donc

$$(x', y') - (x, y) \in \{\pm(a+b), \pm(a-b)\}.$$

Si $a + b$ est pair, alors $a - b$ l'est aussi. Dans tous les cas, la variation de $x + y$ est paire, si bien que la parité de $x + y$ ne change jamais. Le cavalier reste donc toujours sur des cases de la même couleur que la case de départ (blanche), et ne peut atteindre que la moitié des cases de l'échiquier.

2. Si a et b ne sont pas premiers entre eux, le cavalier ne peut atteindre toutes les cases.

Soit $d = \text{pgcd}(a, b) > 1$. À partir de $(0, 0)$, chaque coup modifie les coordonnées de multiples de $\pm a$ et de $\pm b$, donc de multiples de d .

Par récurrence, à partir de l'origine $(0, 0)$, le cavalier ne peut atteindre que des cases (x, y) telles que $d \mid x$ et $d \mid y$. Il est donc impossible d'atteindre, par exemple, une case dont l'une des coordonnées n'est pas divisible par d , comme $(1, 1)$.

3. Si $\text{pgcd}(a, b) = 1$ et si $a + b$ est impair, le cavalier peut atteindre toutes les cases.

Supposons que $\text{pgcd}(a, b) = 1$ et que $a + b$ soit impair. Il suffit de montrer que le (a, b) -cavalier peut atteindre la case $(1, 0)$. En effet, par symétrie des déplacements, atteindre $(1, 0)$ implique aussi l'accès à $(-1, 0)$, $(0, 1)$ et $(0, -1)$. En répétant ces mouvements élémentaires, le cavalier peut ensuite rejoindre n'importe quelle case (x, y) de l'échiquier.

Commençons donc par montrer que le cavalier peut atteindre la case $(2, 0)$.

En combinant deux coups de type (a, b) et $(a, -b)$, ou bien $(-a, b)$ et $(-a, -b)$, on obtient un déplacement horizontal de la forme $(\pm 2a, 0)$. De même, les coups (b, a) et $(b, -a)$ permettent d'obtenir un déplacement $(\pm 2b, 0)$.

Comme $\text{pgcd}(a, b) = 1$, le théorème de Bézout garantit l'existence d'entiers x et y tels que

$$ax + by = 1.$$

En combinant les déplacements $(\pm 2a, 0)$ et $(\pm 2b, 0)$ en quantités appropriées, le cavalier peut donc atteindre la case

$$(2(ax + by), 0) = (2, 0).$$

Par symétrie, il peut aussi atteindre les cases $(0, 2)$, $(-2, 0)$ et $(0, -2)$. Ainsi, le cavalier peut atteindre toutes les cases de la forme $(2x, 2y)$, où x, y sont des entiers.

Comme $a + b$ est impair, l'un des deux entiers a et b est impair et l'autre pair. Si a est impair et b pair, le point $(1 - a, -b)$ est de la forme $(2x, 2y)$, donc il est atteignable. À partir de cette case, un coup de type (a, b) conduit directement à la case $(1, 0)$. Le cas où a est pair et b impair est similaire.