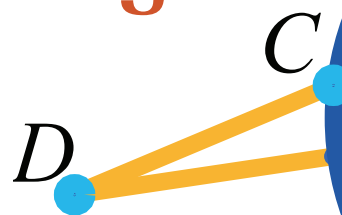


Une trisection par zigonnage

Juliette et Roméo échangent à propos d'une méthode visant à scinder un angle donné en trois parties égales, mais avec une gamme bonifiée de manipulations géométriques permises dans une telle démarche.



Bernard R. Hodgson
Université Laval

Roméo Juliette, Juliette, viens par ici ! Il faut que je te parle.

Juliette Qu'est-ce qui se passe, Roméo ? Tu as l'air tout énervé.

Roméo C'est ma prof de maths ! Je te l'avais dit : elle est parfois un peu bizarre. Aujourd'hui, elle en a encore remis. Elle a débuté son cours en nous disant : « Ce matin, on va faire des maths en zigonnant ! »¹

Juliette Zigonner ? Que veut-elle dire au juste, en employant ce terme à propos des mathématiques ?

Roméo Elle ne nous l'a pas expliqué tout de suite. Elle a d'abord dit : « Prenez votre compas et votre règle — attention : règle non graduée, sans marques ! —, donnez-vous un angle quelconque, et construisez-en la bissectrice. »

qu'au départ, on se trouve à construire un losange. Et si on agrandit ou rapetisse plutôt l'ouverture du compas, cela donne une forme de cerf-volant. Et c'est de là que l'on peut prouver que la diagonale de ce quadrilatère est bel et bien la bissectrice.²

Roméo Tout à fait ! On sait donc, règle et compas, faire la bissection de l'angle, c'est-à-dire le couper en deux parties égales. Et on pourrait facilement le couper en quatre ou en huit, en répétant la bissection.

Juliette En effet ! Mais c'est quoi, cette histoire de zigonnage ?

Roméo Attends, attends ! J'y arrive. La prof nous a alors dit : « Que diriez-vous de faire la trisection de l'angle ? »

Juliette Trisection ? Je suppose donc qu'elle veut dire : le diviser en trois parties égales. Est-ce bien cela ?

Roméo En effet ! Et là, ma prof a affirmé : « Restons calmes : cela ne se peut pas, avec nos outils. »

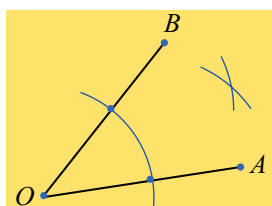
Juliette Quoi ? Mais qu'est-ce que ça signifie au juste ?

Roméo Elle nous a expliqué qu'au milieu de 19^e siècle, par une démarche assez compliquée, un zigone dont je ne me rappelle plus le nom³ a démontré rigoureusement qu'on ne peut pas trisecter un angle en utilisant uniquement la règle et le compas. Elle a ajouté que c'est un beau grand résultat qui apportait la réponse à une question que des mathématiciens éminents étudiaient très sérieusement depuis des siècles. Et que si un jour on faisait des études en maths à l'université, on aurait alors tous les outils qu'il faut pour bien comprendre comment démontrer rigoureusement ce théorème.

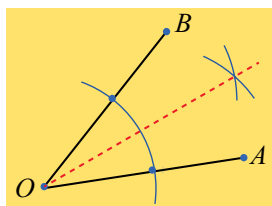
Juliette Ouille ! Ça n'a pas l'air du tout banal comme résultat. Mais tout ça ne me dit pas c'est quoi, cette histoire faire des maths en zigonnant.

2. Voir la Section problèmes.

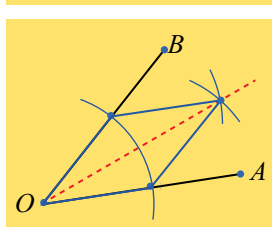
3. Pierre-Laurent Wantzel (1814 – 1848). Voir la section Pour en savoir plus !



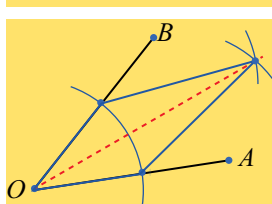
Juliette Oh ! c'est facile ! On a vu ça l'année dernière. Attends que je me rappelle... On prend un angle AOB , on trace un grand arc de cercle ayant pour centre le sommet O de l'angle, et puis...



Ah oui, et puis on trace deux arcs de cercle qui se croisent à l'intérieur de l'angle et qui ont pour centres successifs les points d'intersection de l'arc précédent et des côtés de l'angle. On trace ensuite la droite passant par le sommet de l'angle donné et le point d'intersection de ces deux arcs : c'est notre bissectrice !

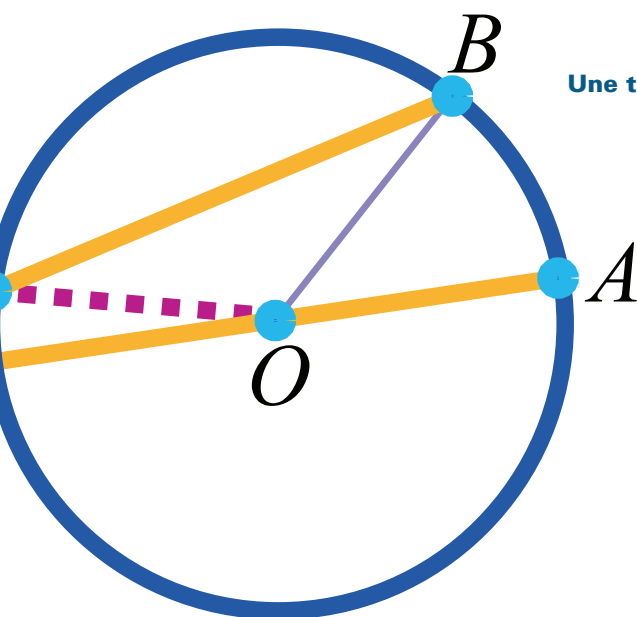


Roméo Bingo ! Je savais que tu t'en souviendrais.



Juliette Je me rappelle aussi que si on garde, dans les derniers mouvements, la même ouverture de compas

1. Pour des commentaires sur le sens des québécoisismes zigonner, zigonnage et zigonneur, voir la section Pour en savoir plus !



Roméo J'y viens, j'y viens ! Et justement, il y a un clin d'œil historique ici ! Ma prof nous a dit : « On va tricher un peu. Dans une vraie démarche à la règle et au compas, vous vous souvenez que pour construire une droite, on doit pouvoir s'appuyer sur deux points déjà construits, ou encore sur des points figurant dans les données du problème. Mais là, on va s'inspirer d'une méthode du grand Archimède lui-même (-287 – -212), où il utilise une façon plus généreuse afin de construire une droite. »

Juliette Ah bon ! Et plus généreuse en quoi ?

Roméo Tu vas voir. Partant de notre angle AOB , on le considère maintenant avec son sommet au centre d'un cercle, puis on prolonge le côté AO au-delà du centre O . Ça va servir tantôt. On prend ensuite une baguette – de fait, il s'agit de notre bonne vieille règle non graduée, mais j'aime mieux, comme ma prof l'a suggéré, l'appeler dorénavant *baguette*, car on va lui faire faire des drôles de pirouettes... presque magiques ! —, on prend donc notre baguette et on y marque deux points correspondant à un segment de même longueur que le rayon r du cercle : ce choix jouera un rôle très important, nous a dit la prof. Et voici maintenant le tour de passe-passe : on accroche (pour ainsi dire) notre baguette au point B , et on essaie de la déplacer de manière à ce que les deux marques qu'on y a inscrites deviennent placées l'une sur le cercle (disons le point C), et l'autre sur le prolongement de AO (le point D).

Juliette Qu'est-ce que tu racontes ? Ralentis un peu, ça va trop vite... C'est un peu tordu, ton affaire ! Hum... Oh ! je pense que j'allume : je commence à voir pourquoi ta prof parle de zigonner. Quand tu manipules la baguette, c'est vraiment du zigonnage, car tu dois gérer simultanément trois points, et

aussi l'angle que fait la baguette avec la droite AO . C'est comme si la baguette avait été insérée au point B dans un anneau pivotant, et on essaie de l'ajuster en tournant un peu autour du point B , puis en détournant, tout en glissant la baguette dans un sens puis dans l'autre à l'intérieur l'anneau. Avance, recule, tourne..., zigonne, zigonne ! On utilise donc la baguette comme une sorte d'outil zigonneur.

C'est beaucoup demander à cette pauvre baguette ! Et tout ça afin d'obtenir trois points B , C et D qui sont d'une part alignés, et d'autre part situés sur le cercle (pour B et C), sur le prolongement de son diamètre (quant à D), étant entendu que le segment CD est de longueur r . C'est vraiment du zigonnage à l'état pur !

Roméo Je suis d'accord ! Je comprends bien comment exécuter la manœuvre. Mais là où ça coince pour moi, c'est que la prof nous a dit : « Voilà ! Vous venez de trisecter votre angle par zigonnage. Je vous laisse comme problème à faire à la maison le soin de valider cette affirmation. »

Je suis un peu dans le champ : la figure ne m'inspire pas vraiment, et je ne vois pas par où commencer pour prouver qu'on a fait la trisection de l'angle AOB .

Juliette Voyons voir. On est dans un cercle, donc on se retrouve en principe dans un cadre agréable. N'oublions pas que le segment CD est, par construction, de longueur égale au rayon r . Peut-être que si on introduisait un autre rayon bien choisi...

Tiens... oui, je pense que ça devrait marcher ! Regarde le rayon OC : ça permet de mettre l'accent sur un angle dont on peut soupçonner, à l'œil nu, qu'il a peut-être l'air d'être le tiers de l'angle AOB . Et il me semble que ça devrait pouvoir se démontrer assez directement en jouant avec les triangles présents.

Roméo Quoi donc ? Quel angle ? Mais n'en dis pas plus ! Je vais chercher à valider tout ça par moi-même.⁴ On s'en reparle demain ! Tourlou !

4. Voir la Section problèmes.

