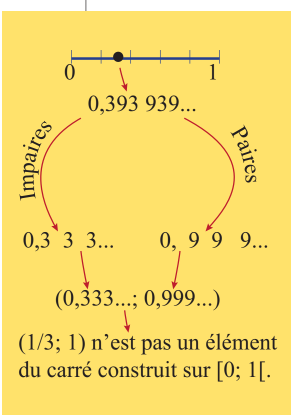
Points, droites et plans (fin)

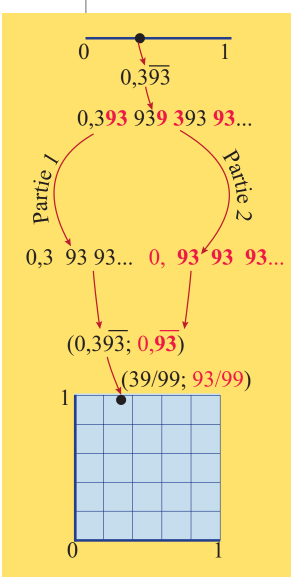
Zia et Léo concluent leurs échanges sur la démonstration de Georg Cantor à l'effet que le segment ouvert [0; 1[contient autant de points que le carré construit sur ce segment.

André Ross
Professeur retraité

Zia

Je crois qu'on a été vite en affaires pour statuer que l'application était injective, lors de notre dernière rencontre[1].





Léo

Tu parles de la démonstration où on décompose un nombre en deux parties selon la position des coupures de ce développement? (Voir figures ci-contre).

Zia

Tout à fait.

Léo

Pourquoi dis-tu qu'on a été vite en affaires?

Zia

Je crois qu'il faut imposer un ordre dans les modifications à apporter aux points sur le segment de droite [0; 1[.

Léo

Pourquoi imposer un ordre?

Zia

Tu te souviens qu'on a constaté que le point 0,393 939 ... du segment de droite posait un problème?

Léo

En effet, en scindant selon les décimales impaires et paires, on obtenait le point $(0,\overline{3}\,;\,0,\overline{9})$. Après avoir rationalisé ces coordonnées, on obtenait le point (3/9; 1), soit (1/3; 1). Cependant, le point (1/3; 1) n'est pas un couple du carré construit sur le segment [0; 1[, puisque l'intervalle est ouvert.

Zia

Oui, et tu avais suggéré de ne pas faire de coupure après un 9, mais plutôt après le chiffre différent de 9 qui suit celui-ci.

Léo

Je me souviens. Et alors?

Zia

J'avais considéré alterner les couleurs noir et rouge pour identifier les coupures à faire sur le nombre $0,\overline{39}$ = 0,393 939 393... En scindant, j'obtenais le couple $(0,3\overline{93}\,;\,0,\overline{93})$.

Léo

Jusque là, je suis d'accord.

Zia

J'avais conclu que ce point était un élément du carré, puis je l'avais exprimé sous forme rationnelle pour obtenir (39/99; 93/99). Tu te souviens également de ça.

Léo

Oui.

1. *Les exemples des trois articles* Points, droites et plans *sont fictifs et choisis pour illustrer le propos. Ils ont été choisis pour montrer le genre d'écueils que peut rencontrer un mathématicien dans ses recherches.*
Un mathématicien ne parvient pas toujours au premier essai à un résultat valide. Seuls les noms de ceux qui persévèrent peuvent passer à l'histoire.

Zia

Je n'avais pas déterminé son image, mais j'avais remarqué qu'en procédant ainsi on obtenait un point du carré construit sur les segment [0; 1[et que l'application devait être injective, mais elle ne l'est pas en procédant de cette façon.

Léo

Là, je ne te suis plus! Pourquoi dis-tu qu'elle n'est pas injective ?

Zia

En fait, ce n'est pas une fonction mais une relation, car supposons que l'on exprime 0,393 939 393... sous forme rationnelle avant d'appliquer la procédure, on obtient $0,\overline{39} = 39/99$ et, en appliquant d'abord la procédure on fait correspondre le couple (39/99; 0) (voir figure ci-contre) alors qu'en scindant avant d'exprimer sous forme rationnelle, on avait obtenu $(0{,}3\overline{93}; 0{,}\overline{93})$ qui, nous donnait (39/99; 93/99) sous forme rationnelle.

Léo

Tu veux dire qu'il faut systématiquement exprimer sous forme rationnelle tous les nombres ayant un développement illimité et périodique avant d'appliquer la procédure ?

Zia

Tout à fait.

Léo

Bon, regardons où on est rendus. Si on a un point ayant une suite décimale finie, on procède en scindant en deux selon les décimales impaires et paires. Par exemple si on part avec le nombre 0,19, en scindant et en regroupant, on a alors :

$$0{,}19 \to (0{,}1;\ 0{,}9).$$

Réciproquement, on a :

$$(0{,}1;\ 0{,}9) \to 0{,}19.$$

Zia

Si on a plutôt un nombre ayant un développement illimité et périodique, comme $0,\overline{19}$, on l'exprime d'abord sous forme rationnelle

$$x = 0,\overline{19} = 0{,}191\,919\ldots$$

$$100x = 19{,}191\,919\ldots$$

$$99x = 19 \text{ et } x = 19/99.$$

On peut alors faire le jumelage et on obtient :

$$19/99 \to (19/99;\ 0)$$

et réciproquement, on a

$$(19/99;\ 0) \to 19/99 = 0,\overline{19}\,.$$

Léo

Essayons avec un nombre ayant un développement illimité et non-périodique.

Si on a 0,192 392 592 692... On trouve alors

(0,1 35 6... ; 0,929 292 92 ...)

Ensuite, en rationalisant on a :

$0{,}192\,392\,592\ \ 692\ldots \to (0{,}135\,6\ldots;\ 0,\overline{92})$ et réciproquement

$(0{,}135\,6\ldots;\ 0,\overline{92}) \to 0{,}192\,392\,592\ 692\ldots$

Zia

De plus, si on obtient deux développements non-périodiques en scindant, par exemple, 0,142 356 984... , on a :

$$0{,}142\,356\,984\ldots \to (0{,}12594\ldots;\ 0{,}436\,8\ldots).$$

Réciproquement,

$$(0{,}12594\ldots;\ 0{,}436\,8\ldots) \to 0{,}142\,356\,984\ldots$$

Ça marche aussi.

Léo

Je pense que c'est correct.

- Si le nombre a une suite décimale illimitée, on scinde cette suite en deux parties, l'une qui regroupe les décimales impaires et l'autre les décimales paires.
- Si on a un nombre ayant un développement illimité et périodique, on rationalise le nombre avant de scinder.
- Si on a un nombre ayant un développement illimité et non-périodique, on scinde le nombre en coupures impaires et paires de telle sorte qu'une coupure ne soit jamais après un 9. Puis on rationalise s'il y a lieu avant de déterminer son image.

C'est bien cela ? Ça voudrait donc dire qu'à chaque point du segment de droite [0; 1[on fait correspondre un et un seul point du carré [0; 1[× [0; 1[.

Zia

Ça me semble correct.