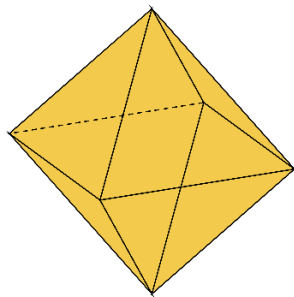


Qu'ont en commun les lanternes d'Outremont avec les pyramides et les cornets de crème glacée?

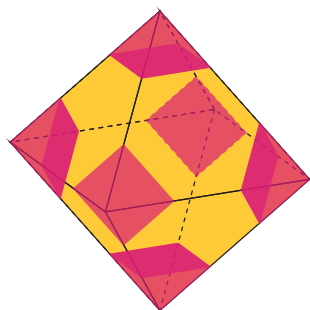
Pour la célébration du 150^e anniversaire de la ville d'Outremont à Montréal, la ville a créé plusieurs icônes spéciales que l'on a vues sur des affiches et des bâtiments, ainsi que dans les belles lanternes créées par l'entreprise multimédia Lucion. La structure mathématique de ces lanternes recèle de jolies propriétés et des applications étonnantes.

Alejandro Morales Borrero
UQAM, LACIM

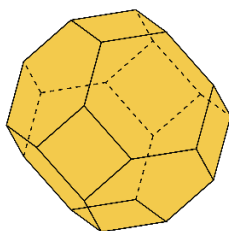
Ces lanternes ont une forme géométrique saisissante, connue sous le nom d'*octaèdre tronqué* ou de *permutaèdre*. Ces noms peuvent sembler intimidants, mais les idées derrière eux sont simples – et même délicieuses.



Octaèdre



Troncatures



Octaèdre tronqué

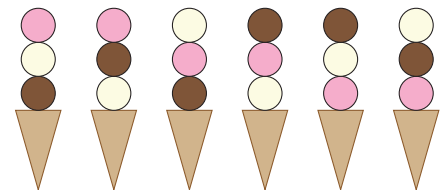
Pour le premier nom, un octaèdre est la forme que l'on obtiendrait en collant deux pyramides à base carrée ensemble par leurs bases. Imaginez la grande pyramide de Gizeh parfaitement reflétée sur l'eau – c'est un octaèdre, avec 8 faces triangulaires et 6 coins. Imaginez maintenant que vous coupez – ou « tronquez » – chacun de ces 6 coins. Soudain, la forme se transforme en quelque chose de nouveau : nos lanternes ! Chaque coin en devient 4, ce qui nous en donne 24 au total. Les faces changent aussi : six carrés (issus des coupes) et huit hexagones (les triangles tronqués), magnifiquement agencés comme les panneaux hexagonaux et pentagonaux d'un ballon de soccer.

Pour comprendre le deuxième nom, le permutaèdre, nous devrions

regarder les coins de la forme, et nous rappeler plus tard qu'il y en a 24. Voyons comment cela pourrait être lié à la crème glacée. Imaginez que vous êtes à votre crèmerie préférée et que vous voulez un cornet avec deux saveurs que vous avez choisies, disons chocolat et vanille. De combien de façons pouvez-vous les disposer à la verticale sur le cornet ? Il y a deux façons de les mettre sur le cornet : chocolat-vanille ou vanille-chocolat.



Que se passe-t-il si vous voulez une crème glacée avec trois saveurs que vous avez choisies, disons chocolat, vanille et fraise ? De combien de façons pouvez-vous les disposer sur le cornet ? La réponse est six, trois fois la réponse précédente.



Qu'en est-il de la même question pour une crème glacée avec quatre saveurs choisies, disons chocolat, vanille, fraise et pistache ? La réponse est maintenant 24, quatre fois la réponse précédente. Ces arrangements sont appelés des « permutations ». Remarquez le nombre 24 à nouveau – le même que le nombre de coins sur les lanternes ! Coïncidence ? Pas du tout.

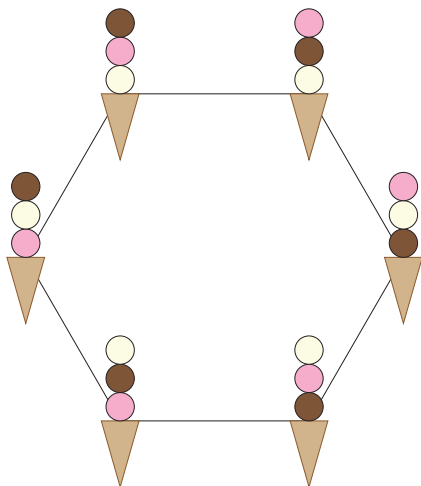
Voici le lien. Supposons qu'on vous ait donné la combinaison chocolat-vanille, mais que vous vouliez plutôt vanille-chocolat. Vous pourriez passer d'une configuration à l'autre en échangeant les boules (peut-être en mettant un autre cornet sur la vanille et en retournant soigneusement la crème glacée).



Mais que se passe-t-il si vous avez trois boules et qu'on vous a donné chocolat-vanille-fraise, mais que vous vouliez vraiment vanille-fraise-chocolat? C'est un peu plus délicat. Imaginons que la crèmerie ait une cuillère magique qui peut échanger deux boules consécutives en laissant tout le reste en place. Nous pouvons maintenant résoudre notre problème de crème glacée en deux utilisations de la cuillère magique :

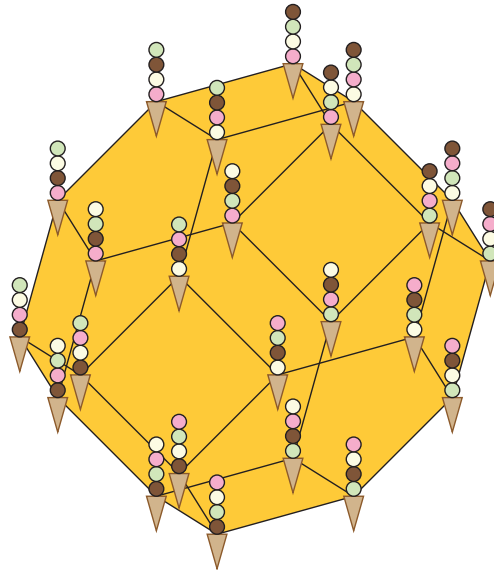
chocolat-vanille-fraise -->
(échanger les deux premières)
--> vanille-chocolat-fraise -->
(échanger les deux dernières) -->
vanille-fraise-chocolat

Si nous dessinons un diagramme montrant les six ordres possibles de trois boules, et que nous connectons deux ordres chaque fois qu'un échange les transforme l'un en l'autre, nous obtenons un bel hexagone.



Et si nous faisons la même chose avec les 24 ordres de quatre boules? La forme résultante est exactement la géométrie des lanternes. Parce que cette forme permet de représenter les liens entre les permutations possibles

d'éléments, on lui attribue aussi le nom de permutaèdre.



La cerise sur le cornet : les lanternes portent encore plus de numérogie ludique¹ :

- 1 lanterne a 14 faces (8 hexagones et 6 carrés), 36 arêtes et 24 coins.
- Ou alternez addition et soustraction : $1 - 14 + 36 - 24 = -1$. Encore une coïncidence¹ ?

Nous nous réjouissons de la suite des célébrations du 150^e anniversaire de la ville d'Outremont et apprécions les belles lanternes liées aux pyramides et à la crème glacée.

1. Cette relation est toujours vraie pour tous les polyèdres de dimension trois. C'est un exemple d'un invariant important dans la géométrie topologique qui s'appelle la caractéristique d'Euler.

Permutaèdre

Le permutaèdre est un exemple d'un graphe dont les arêtes sont liés à un ordre et également un polyèdre à trois ou plusieurs dimensions représentant les permutations. Au LACIM², on étudie la combinatoire de ces objets et on a un projet de recherche en équipe financée par le FRQNT³ *Nouvelles frontières des polytopes dans la théorie des représentations combinatoires* autour de ces sujets.

2. LACIM, (Laboratoire d'Algèbre, de Combinatoire et d'Informatique Mathématique de l'UQAM), reconnu internationalement pour sa recherche en combinatoire.
3. FRQNT, (Fonds de Recherche du Québec – Nature et Technologies),

