

Accrom α th

Volume 21 • hiver-printemps 2026

**Des cercles d'Apollonius
à l'électromagnétisme :**

les coordonnées bipolaires

Autres *articles*

- **Points, droites et plans (fin)**
- **Qu'ont en commun
les lanternes d'Outremont
avec les pyramides
et les cornets de crème glacée**
- **Une trisection par zigonnage**
- **Quand les nombres se reflètent :
le palindrome introuvable**
- **Cavalier contre le roi sur l'échiquier infini :
qui est le plus rapide ?**
- **Le problème du sofa**
- **Perdu en forêt**
- **Calcul intégral visuel**

Rubrique des
Paradoxes

Un carré
vraiment
magique

Éditorial α

Dans ce quarantième numéro de la revue *Accromath*, nous présentons des *Accro-flashes* et d'autres articles accessibles pour le niveau secondaire. Dans **Points, droites et plans (fin)**, nous complétons notre présentation sur la façon dont Georg Cantor a procédé pour définir une bijection entre les points du segment de droite $[0; 1[$ et ceux du carré construit sur ce segment. Dans l'article **Qu'ont en commun les lanternes d'Outremont avec les pyramides et les cornets de crème glacée?**, Alejandro Morales Borrero nous fait prendre conscience de jolies propriétés et d'applications étonnantes de ces structures. Dans **Une trisection par zigonnage**, Bernard Hodgson nous présente une démarche ingénieuse utilisée par Archimède pour trisecter un angle.

En additionnant successivement un nombre (disons entre 1 et 50) et sa réflexion, on finit par obtenir un palindrome numérique. Mais est-ce toujours le cas? Dans **Quand les nombres se reflètent: le palindrome introuvable**, Christian Genest se pose la question, sans toutefois y apporter une réponse définitive.

Pour résoudre un problème et en simplifier les calculs, il peut être très utile de choisir un système de coordonnées adapté à sa géométrie. Dans **Des cercles d'Apollonius à l'électromagnétisme: les coordonnées bipolaires**, Geneviève Savard présente un système conçu pour étudier les phénomènes ayant deux pôles, comme les champs électriques et magnétiques autour de deux fils conducteurs.

Un cavalier et un roi partent de la même case et font la course pour atteindre une case d'arrivée lointaine; lequel arrivera en premier? C'est la question de Christian Táfula, dans **Cavalier contre le roi sur l'échiquier infini: qui est le plus rapide?**

Un sofa doit être déplacé dans un couloir d'un mètre de largeur et comportant un angle droit. Quelles sont la forme et l'aire du plus grand sofa qui puisse tourner le coin? Christian Genest et Christiane Rousseau étudient la question dans l'article **Le problème du sofa**.

Anik Trahan, dans **Perdu en forêt**, se demande quelle est la meilleure stratégie pour être certain de sortir d'une forêt tout en minimisant la distance parcourue pour y parvenir.

Dans **Calcul intégral visuel**, Christiane Rousseau nous présente la méthode de Mamikon, qui permet de calculer des aires balayées par des segments tangents à une courbe.

On connaît le carré magique dont la somme des alignements (lignes, colonnes et diagonales) est égale à 15. Dans l'article **Un carré vraiment magique**, Jean-Paul Delahaye pose la question: peut-on déplacer les chiffres de telle sorte que les sommes des alignements soient égales à 16?

Bonne lecture!
André Ross

ISSN 1911-0189

Rédacteur en chef

André Ross
Professeur de mathématiques

Comité éditorial

Line Baribeau
*Professeure de mathématiques
Université Laval*

France Caron
*Professeure de didactique
des mathématiques
Université de Montréal*

Christian Genest
*Professeur de statistique
Université McGill*

Bernard R. Hodgson
*Professeur de mathématiques
Université Laval*

Thomasz Kaczynski
*Professeur de mathématiques
Université de Sherbrooke*

Nadia Lafrenière
*Professeure de mathématiques
Université Concordia*

Bruno Martin
*Responsable recherche et développement
CIMMI*

Christiane Rousseau
*Professeure de mathématiques
Université de Montréal*

Christian Sévigny
*Professeur de physique
École secondaire Pointe-Lévy*

Anik Trahan
*Professeur de mathématiques
Cégep de Sherbrooke*

Robert Wilson
*Professeur de mathématiques
Cégep de Lévis*

Production et Iconographie

Alexandra Haedrich
Institut des sciences mathématiques

Conception graphique

Pierre Lavallée
Néograf Design inc.

Illustrations de scientifiques et caricatures

Noémie Ross

Illustrations mathématiques

André Ross

Révision linguistique

Robert Wilson
*Professeur de mathématiques
Cégep de Lévis-Lauzon*

Accromath

*Institut des sciences mathématiques
Université du Québec à Montréal
Case postale 8888, succ. Centre-ville
Montréal (Québec)
H3C 3P8 Canada
redaction@accromath.ca
www.accromath.ca*

Accromath

Volume 21 • hiver – printemps 2026

Sommaire

Dossier *Accro-flashes*

Points, droites et plans (fin)

André Ross

Qu'ont en commun les lanternes d'Outremont avec les pyramides et les cornets de crème glacée

Alejandro Morales Borrero

Une trisection par zigonnage

Bernard R. Hodgson

Quand les nombres se reflètent : le palindrome introuvable

Christian Genest

Dossier *Applications des mathématiques*

Des cercles d'Apollonius à l'électromagnétisme : les coordonnées bipolaires

Geneviève Savard

Cavalier contre le roi sur l'échiquier infini : qui est le plus rapide ?

Christian Táfula

Dossier *Géométrie*

Le problème du sofa

Christan Genest et Christiane Rousseau

Perdu en forêt

Anik Trahan

Calcul intégral visuel

Christiane Rousseau

Rubrique des **Paradoxes**

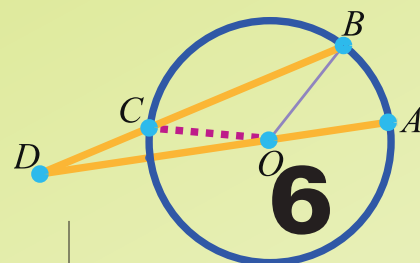
Un carré vraiment magique

Jean-Paul Delahaye

Solution du paradoxe précédent

Jean-Paul Delahaye

Section problèmes

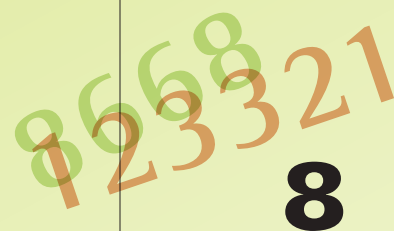


2

4

6

8



Vol. 21 • hiver – printemps 2026

Accromath

1

12

18

24

30

36



18

42

43

44



24



30

Points, droites et plans (fin)

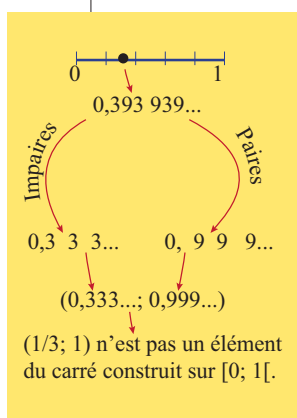


André Ross
Professeur retraité

Zia et Léo concluent leurs échanges sur la démonstration de Georg Cantor à l'effet que le segment ouvert $[0; 1[$ contient autant de points que le carré construit sur ce segment.

Zia

Je crois qu'on a été vite en affaires pour statuer que l'application était injective, lors de notre dernière rencontre¹.



Léo

Tu parles de la démonstration où on décompose un nombre en deux parties selon la position des coupures de ce développement? (Voir figures ci-contre).

Zia

Tout à fait.

Léo

Pourquoi dis-tu qu'on a été vite en affaires?

Zia

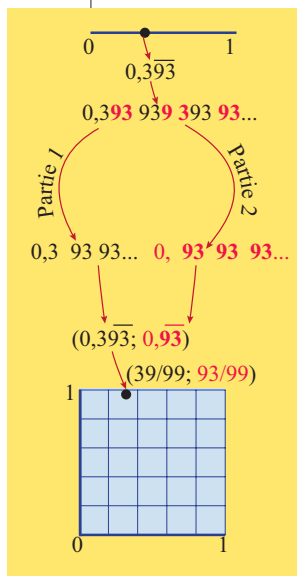
Je crois qu'il faut imposer un ordre dans les modifications à apporter aux points sur le segment de droite $[0; 1[$.

Léo

Pourquoi imposer un ordre?

Zia

Tu te souviens qu'on a constaté que le point $0,393 939 \dots$ du segment



de droite posait un problème?

Léo

En effet, en scindant selon les décimales impaires et paires, on obtenait le point $(0,\overline{3}; 0,\overline{9})$.

Après avoir rationalisé ces coordonnées, on obtenait le point $(3/9; 1)$, soit $(1/3; 1)$. Cependant, le point $(1/3; 1)$ n'est pas un couple du carré construit sur le segment $[0; 1[$, puisque l'intervalle est ouvert.

Zia

Oui, et tu avais suggéré de ne pas faire de coupure après un 9, mais plutôt après le chiffre différent de 9 qui suit celui-ci.

Léo

Je me souviens. Et alors?

Zia

J'avais considéré alterner les couleurs noir et rouge pour identifier les coupures à faire sur le nombre $0,\overline{39} = 0,393 939 393 \dots$. En scindant, j'obtenais le couple $(0,\overline{393}; 0,\overline{93})$.

Léo

Jusque là, je suis d'accord.

Zia

J'avais conclu que ce point était un élément du carré, puis je l'avais exprimé sous forme rationnelle pour obtenir $(39/99; 93/99)$. Tu te souviens également de ça.

Léo

Oui.

1. Les exemples des trois articles Points, droites et plans sont fictifs et choisis pour illustrer le propos. Ils ont été choisis pour montrer le genre d'écueils que peut rencontrer un mathématicien dans ses recherches.

Un mathématicien ne parvient pas toujours au premier essai à un résultat valide. Seuls les noms de ceux qui persévèrent peuvent passer à l'histoire.

Zia

Je n'avais pas déterminé son image, mais j'avais remarqué qu'en procédant ainsi on obtenait un point du carré construit sur les segment $[0; 1[$ et que l'application devait être injective, mais elle ne l'est pas en procédant de cette façon.

Léo

Là, je ne te suis plus! Pourquoi dis-tu qu'elle n'est pas injective?

Zia

En fait, ce n'est pas une fonction mais une relation, car supposons que l'on exprime $0,393\ 939\ 393\dots$ sous forme rationnelle avant d'appliquer la procédure, on obtient $0,3\overline{9} = 39/99$ et, en appliquant d'abord la procédure on fait correspondre le couple $(39/99; 0)$ (voir figure ci-contre) alors qu'en scindant avant d'exprimer sous forme rationnelle, on avait obtenu $(0,3\overline{93}; 0,\overline{93})$ qui, nous donnait $(39/99; 93/99)$ sous forme rationnelle.

Léo

Tu veux dire qu'il faut systématiquement exprimer sous forme rationnelle tous les nombres ayant un développement illimité et périodique avant d'appliquer la procédure?

Zia

Tout à fait.

Léo

Bon, regardons où on est rendus. Si on a un point ayant une suite décimale finie, on procède en scindant en deux selon les décimales impaires et paires. Par exemple si on part avec le nombre $0,19$, en scindant et en regroupant, on a alors :

$$0,19 \rightarrow (0,1; 0,9).$$

Réciproquement, on a :

$$(0,1; 0,9) \rightarrow 0,19.$$

Zia

Si on a plutôt un nombre ayant un développement illimité et périodique, comme $0,1\overline{9}$, on l'exprime d'abord sous forme rationnelle

$$x = 0,1\overline{9} = 0,191\ 919\dots$$

$$100x = 19,191\ 919\dots$$

$$99x = 19 \text{ et } x = 19/99.$$

On peut alors faire le jumelage et on obtient :

$$19/99 \rightarrow (19/99; 0)$$

et réciproquement, on a

$$(19/99; 0) \rightarrow 19/99 = 0,1\overline{9}.$$

Léo

Essayons avec un nombre ayant un développement illimité et non-périodique.

Si on a $0,192\ 392\ 592\ 692\dots$ On trouve alors

$$(0,135\ 6\dots; 0,929\ 292\ 92\dots)$$

Ensuite, en rationalisant on a :

$$0,192\ 392\ 592\ 692\dots \rightarrow (0,135\ 6\dots; 0,\overline{92}) \text{ et réciproquement}$$

$$(0,135\ 6\dots; 0,\overline{92}) \rightarrow 0,192\ 392\ 592\ 692\dots$$

Zia

De plus, si on obtient deux développements non-périodiques en scindant, par exemple, $0,142\ 356\ 984\dots$, on a :

$$0,142\ 356\ 984\dots \rightarrow (0,12594\dots; 0,4368\dots).$$

Réciproquement,

$$(0,12594\dots; 0,4368\dots) \rightarrow 0,142\ 356\ 984\dots$$

Ça marche aussi.

Léo

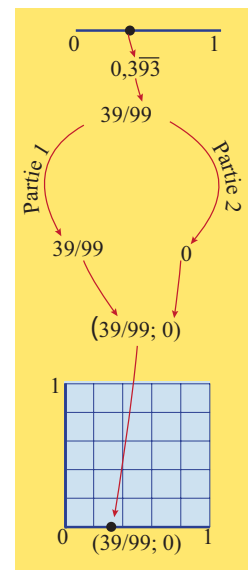
Je pense que c'est correct.

- Si le nombre a une suite décimale illimitée, on scinde cette suite en deux parties, l'une qui regroupe les décimales impaires et l'autre les décimales paires.
- Si on a un nombre ayant un développement illimité et périodique, on rationalise le nombre avant de scinder.
- Si on a un nombre ayant un développement illimité et non-périodique, on scinde le nombre en coupures impaires et paires de telle sorte qu'une coupure ne soit jamais après un 9. Puis on rationalise s'il y a lieu avant de déterminer son image.

C'est bien cela? Ça voudrait donc dire qu'à chaque point du segment de droite $[0; 1[$ on fait correspondre un et un seul point du carré $[0; 1[\times [0; 1[$.

Zia

Ça me semble correct.

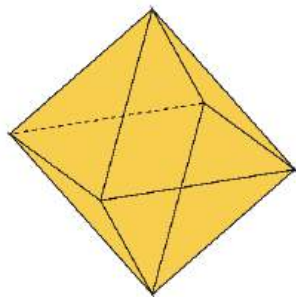


Qu'ont en commun les lanternes d'Outremont avec les pyramides et les cornets de crème glacée?

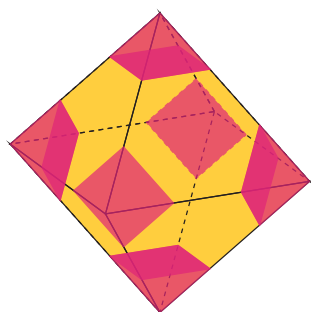
Pour la célébration du 150^e anniversaire de la ville d'Outremont à Montréal, la ville a créé plusieurs icônes spéciales que l'on a vues sur des affiches et des bâtiments, ainsi que dans les belles lanternes créées par l'entreprise multimédia Lucion. La structure mathématique de ces lanternes recèle de jolies propriétés et des applications étonnantes.

Alejandro Morales Borrero
UQAM, LACIM

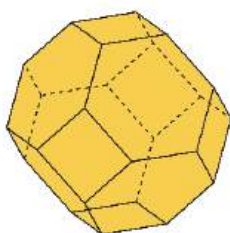
Ces lanternes ont une forme géométrique saisissante, connue sous le nom d'*octaèdre tronqué* ou de *permutaèdre*. Ces noms peuvent sembler intimidants, mais les idées derrière eux sont simples – et même délicieuses.



Octaèdre



Troncatures



Octaèdre tronqué

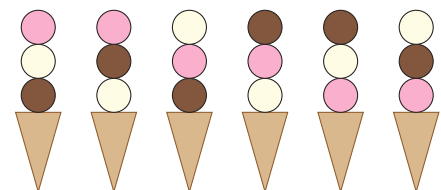
Pour le premier nom, un octaèdre est la forme que l'on obtiendrait en collant deux pyramides à base carrée ensemble par leurs bases. Imaginez la grande pyramide de Gizeh parfaitement reflétée sur l'eau – c'est un octaèdre, avec 8 faces triangulaires et 6 coins. Imaginez maintenant que vous coupez – ou «tronquez» – chacun de ces 6 coins. Soudain, la forme se transforme en quelque chose de nouveau : nos lanternes ! Chaque coin en devient 4, ce qui nous en donne 24 au total. Les faces changent aussi : six carrés (issus des coupes) et huit hexagones (les triangles tronqués), magnifiquement agencés comme les panneaux hexagonaux et pentagonaux d'un ballon de soccer.

Pour comprendre le deuxième nom, le permutaèdre, nous devrions

regarder les coins de la forme, et nous rappeler plus tard qu'il y en a 24. Voyons comment cela pourrait être lié à la crème glacée. Imaginez que vous êtes à votre crèmerie préférée et que vous voulez un cornet avec deux saveurs que vous avez choisies, disons chocolat et vanille. De combien de façons pouvez-vous les disposer à la verticale sur le cornet ? Il y a deux façons de les mettre sur le cornet : chocolat-vanille ou vanille-chocolat.



Que se passe-t-il si vous voulez une crème glacée avec trois saveurs que vous avez choisies, disons chocolat, vanille et fraise ? De combien de façons pouvez-vous les disposer sur le cornet ? La réponse est six, trois fois la réponse précédente.



Qu'en est-il de la même question pour une crème glacée avec quatre saveurs choisies, disons chocolat, vanille, fraise et pistache ? La réponse est maintenant 24, quatre fois la réponse précédente. Ces arrangements sont appelés des «permutations». Remarquez le nombre 24 à nouveau – le même que le nombre de coins sur les lanternes ! Coïncidence ? Pas du tout.

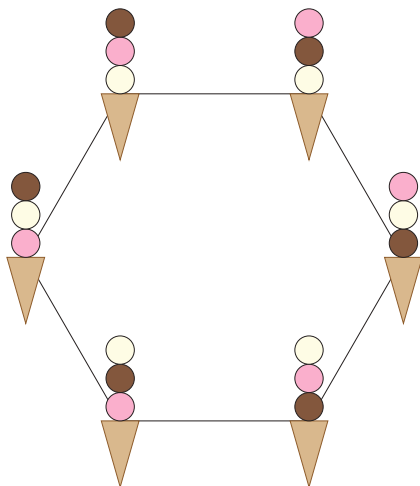
Voici le lien. Supposons qu'on vous ait donné la combinaison chocolat-vanille, mais que vous vouliez plutôt vanille-chocolat. Vous pourriez passer d'une configuration à l'autre en échangeant les boules (peut-être en mettant un autre cornet sur la vanille et en retournant soigneusement la crème glacée).



Mais que se passe-t-il si vous avez trois boules et qu'on vous a donné chocolat-vanille-fraise, mais que vous vouliez vraiment vanille-fraise-chocolat? C'est un peu plus délicat. Imaginons que la crèmerie ait une cuillère magique qui peut échanger deux boules consécutives en laissant tout le reste en place. Nous pouvons maintenant résoudre notre problème de crème glacée en deux utilisations de la cuillère magique :

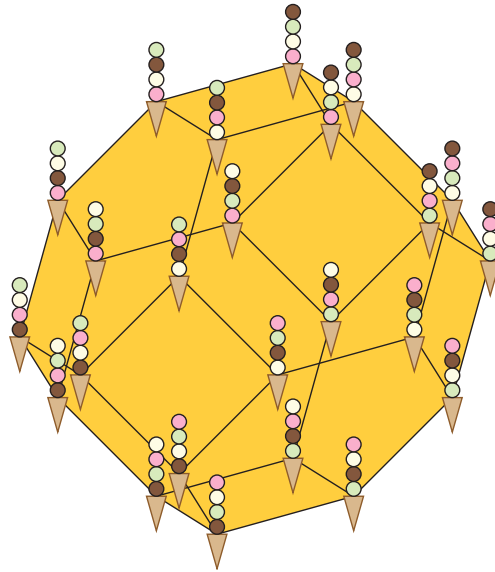
chocolat-vanille-fraise -->
(échanger les deux premières)
--> vanille-chocolat-fraise -->
(échanger les deux dernières) -->
vanille-fraise-chocolat

Si nous dessinons un diagramme montrant les six ordres possibles de trois boules, et que nous connectons deux ordres chaque fois qu'un échange les transforme l'un en l'autre, nous obtenons un bel hexagone.



Et si nous faisons la même chose avec les 24 ordres de quatre boules? La forme résultante est exactement la géométrie des lanternes. Parce que cette forme permet de représenter les liens entre les permutations possibles

d'éléments, on lui attribue aussi le nom de permutaèdre.



La cerise sur le cornet : les lanternes portent encore plus de numérogie ludique¹ :

- 1 lanterne a 14 faces (8 hexagones et 6 carrés), 36 arêtes et 24 coins.
- Ou alternez addition et soustraction : $1 - 14 + 36 - 24 = -1$. Encore une coïncidence¹ ?

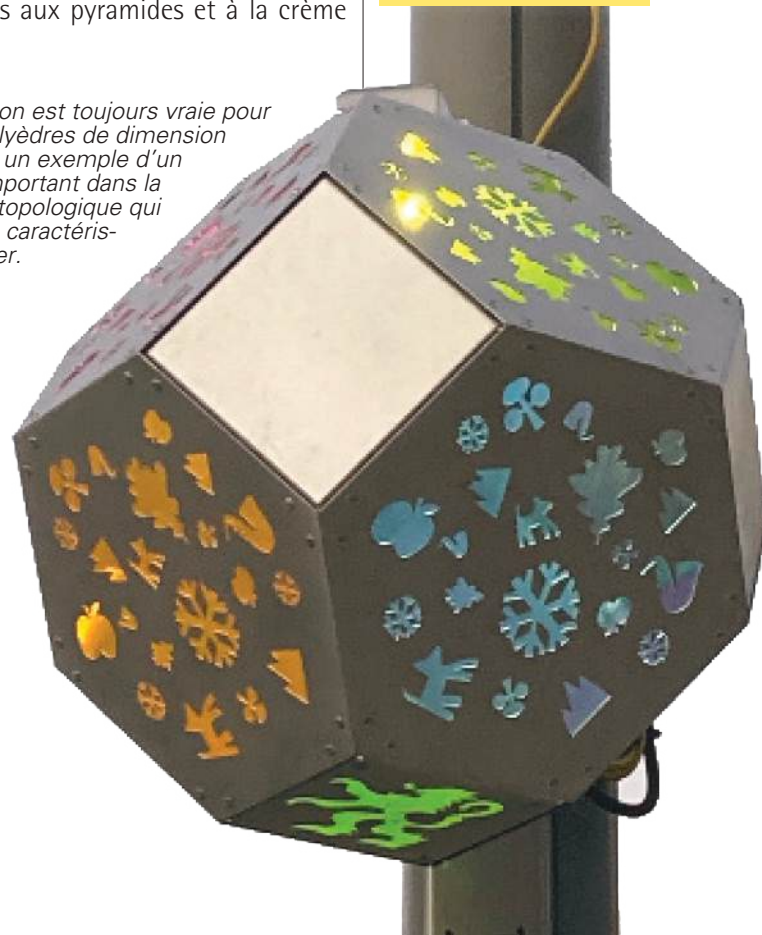
Nous nous réjouissons de la suite des célébrations du 150^e anniversaire de la ville d'Outremont et apprécions les belles lanternes liées aux pyramides et à la crème glacée.

1. Cette relation est toujours vraie pour tous les polyèdres de dimension trois. C'est un exemple d'un invariant important dans la géométrie topologique qui s'appelle la caractéristique d'Euler.

Permutaèdre

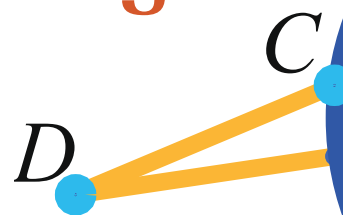
Le permutaèdre est un exemple d'un graphe dont les arêtes sont liés à un ordre et également un polyèdre à trois ou plusieurs dimensions représentant les permutations. Au LACIM², on étudie la combinatoire de ces objets et on a un projet de recherche en équipe financée par le FRQNT³ *Nouvelles frontières des polytopes dans la théorie des représentations combinatoires* autour de ces sujets.

2. LACIM, (Laboratoire d'Algèbre, de Combinatoire et d'Informatique Mathématique de l'UQAM), reconnu internationalement pour sa recherche en combinatoire.
3. FRQNT, (Fonds de Recherche en Nature et Technologies),



Une trisection par zigonnage

Juliette et Roméo échangent à propos d'une méthode visant à scinder un angle donné en trois parties égales, mais avec une gamme bonifiée de manipulations géométriques permises dans une telle démarche.



Bernard R. Hodgson
Université Laval

Roméo Juliette, Juliette, viens par ici ! Il faut que je te parle.

Juliette Qu'est-ce qui se passe, Roméo ? Tu as l'air tout énervé.

Roméo C'est ma prof de maths ! Je te l'avais dit : elle est parfois un peu bizarre. Aujourd'hui, elle en a encore remis. Elle a débuté son cours en nous disant : « Ce matin, on va faire des maths en zigonnant ! »¹

Juliette Zigonner ? Que veut-elle dire au juste, en employant ce terme à propos des mathématiques ?

Roméo Elle ne nous l'a pas expliqué tout de suite. Elle a d'abord dit : « Prenez votre compas et votre règle — attention : règle non graduée, sans marques ! —, donnez-vous un angle quelconque, et construisez-en la bissectrice. »

qu'au départ, on se trouve à construire un losange. Et si on agrandit ou rapetisse plutôt l'ouverture du compas, cela donne une forme de cerf-volant. Et c'est de là que l'on peut prouver que la diagonale de ce quadrilatère est bel et bien la bissectrice.²

Roméo Tout à fait ! On sait donc, règle et compas, faire la bissection de l'angle, c'est-à-dire le couper en deux parties égales. Et on pourrait facilement le couper en quatre ou en huit, en répétant la bissection.

Juliette En effet ! Mais c'est quoi, cette histoire de zigonnage ?

Roméo Attends, attends ! J'y arrive. La prof nous a alors dit : « Que diriez-vous de faire la trisection de l'angle ? »

Juliette Trisection ? Je suppose donc qu'elle veut dire : le diviser en trois parties égales. Est-ce bien cela ?

Roméo En effet ! Et là, ma prof a affirmé : « Restons calmes : cela ne se peut pas, avec nos outils. »

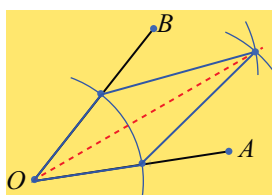
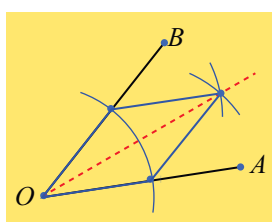
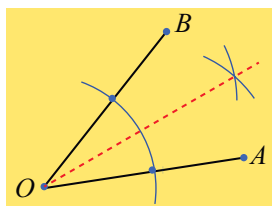
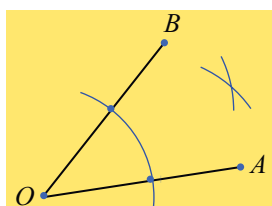
Juliette Quoi ? Mais qu'est-ce que ça signifie au juste ?

Roméo Elle nous a expliqué qu'au milieu de 19^e siècle, par une démarche assez compliquée, un zigone dont je ne me rappelle plus le nom³ a démontré rigoureusement qu'on ne peut pas trisecter un angle en utilisant uniquement la règle et le compas. Elle a ajouté que c'est un beau grand résultat qui apportait la réponse à une question que des mathématiciens éminents étudiaient très sérieusement depuis des siècles. Et que si un jour on faisait des études en maths à l'université, on aurait alors tous les outils qu'il faut pour bien comprendre comment démontrer rigoureusement ce théorème.

Juliette Ouille ! Ça n'a pas l'air du tout banal comme résultat. Mais tout ça ne me dit pas c'est quoi, cette histoire faire des maths en zigonnant.

2. Voir la Section problèmes.

3. Pierre-Laurent Wantzel (1814 – 1848). Voir la section Pour en savoir plus !



Juliette Oh ! c'est facile !

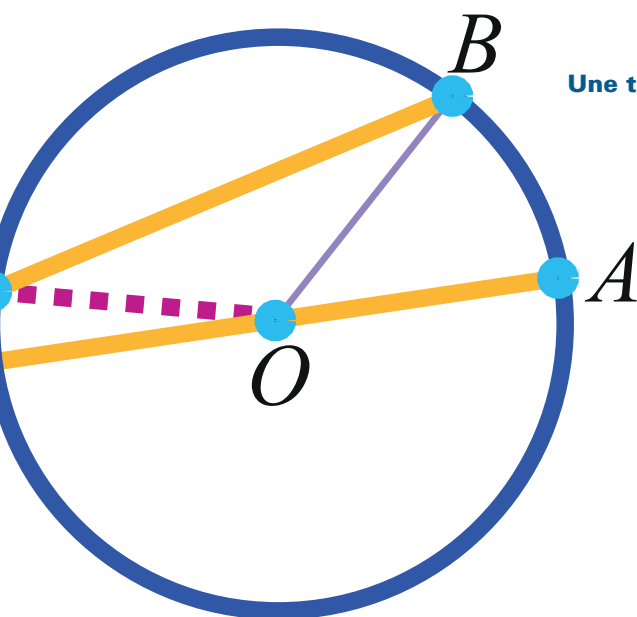
On a vu ça l'année dernière. Attends que je me rappelle... On prend un angle AOB , on trace un grand arc de cercle ayant pour centre le sommet O de l'angle, et puis...

Ah oui, et puis on trace deux arcs de cercle qui se croisent à l'intérieur de l'angle et qui ont pour centres successifs les points d'intersection de l'arc précédent et des côtés de l'angle. On trace ensuite la droite passant par le sommet de l'angle donné et le point d'intersection de ces deux arcs : c'est notre bissectrice !

Roméo Bingo ! Je savais que tu t'en souviendrais.

Juliette Je me rappelle aussi que si on garde, dans les derniers mouvements, la même ouverture de compas

1. Pour des commentaires sur le sens des québécoisismes zigonner, zigonnage et zigonneur, voir la section Pour en savoir plus !



Roméo J'y viens, j'y viens ! Et justement, il y a un clin d'œil historique ici ! Ma prof nous a dit : « On va tricher un peu. Dans une vraie démarche à la règle et au compas, vous vous souvenez que pour construire une droite, on doit pouvoir s'appuyer sur deux points déjà construits, ou encore sur des points figurant dans les données du problème. Mais là, on va s'inspirer d'une méthode du grand Archimède lui-même (-287 – -212), où il utilise une façon plus généreuse afin de construire une droite. »

Juliette Ah bon ! Et plus généreuse en quoi ?

Roméo Tu vas voir. Partant de notre angle AOB , on le considère maintenant avec son sommet au centre d'un cercle, puis on prolonge le côté AO au-delà du centre O . Ça va servir tantôt. On prend ensuite une baguette – de fait, il s'agit de notre bonne vieille règle non graduée, mais j'aime mieux, comme ma prof l'a suggéré, l'appeler dorénavant *baguette*, car on va lui faire faire des drôles de pirouettes... presque magiques ! —, on prend donc notre baguette et on y marque deux points correspondant à un segment de même longueur que le rayon r du cercle : ce choix jouera un rôle très important, nous a dit la prof. Et voici maintenant le tour de passe-passe : on accroche (pour ainsi dire) notre baguette au point B , et on essaie de la déplacer de manière à ce que les deux marques qu'on y a inscrites deviennent placées l'une sur le cercle (disons le point C), et l'autre sur le prolongement de AO (le point D).

Juliette Qu'est-ce que tu racontes ? Ralentis un peu, ça va trop vite... C'est un peu tordu, ton affaire ! Hum... Oh ! je pense que j'allume : je commence à voir pourquoi ta prof parle de zigonner. Quand tu manipules la baguette, c'est vraiment du zigonnage, car tu dois gérer simultanément trois points, et

aussi l'angle que fait la baguette avec la droite AO . C'est comme si la baguette avait été insérée au point B dans un anneau pivotant, et on essaie de l'ajuster en tournant un peu autour du point B , puis en détournant, tout en glissant la baguette dans un sens puis dans l'autre à l'intérieur l'anneau. Avance, recule, tourne..., zigonne, zigonne ! On utilise donc la baguette comme une sorte d'outil zigonneur.

C'est beaucoup demander à cette pauvre baguette ! Et tout ça afin d'obtenir trois points B , C et D qui sont d'une part alignés, et d'autre part situés sur le cercle (pour B et C), sur le prolongement de son diamètre (quant à D), étant entendu que le segment CD est de longueur r . C'est vraiment du zigonnage à l'état pur !

Roméo Je suis d'accord ! Je comprends bien comment exécuter la manœuvre. Mais là où ça coince pour moi, c'est que la prof nous a dit : « Voilà ! Vous venez de trisecter votre angle par zigonnage. Je vous laisse comme problème à faire à la maison le soin de valider cette affirmation. »

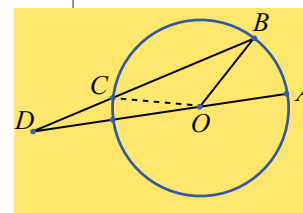
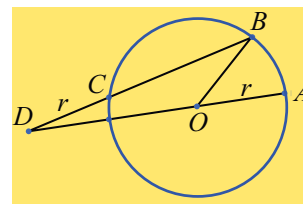
Je suis un peu dans le champ : la figure ne m'inspire pas vraiment, et je ne vois pas par où commencer pour prouver qu'on a fait la trisection de l'angle AOB .

Juliette Voyons voir. On est dans un cercle, donc on se retrouve en principe dans un cadre agréable. N'oublions pas que le segment CD est, par construction, de longueur égale au rayon r . Peut-être que si on introduisait un autre rayon bien choisi...

Tiens... oui, je pense que ça devrait marcher ! Regarde le rayon OC : ça permet de mettre l'accent sur un angle dont on peut soupçonner, à l'œil nu, qu'il a peut-être l'air d'être le tiers de l'angle AOB . Et il me semble que ça devrait pouvoir se démontrer assez directement en jouant avec les triangles présents.

Roméo Quoi donc ? Quel angle ? Mais n'en dis pas plus ! Je vais chercher à valider tout ça par moi-même.⁴ On s'en reparle demain ! Tourlou !

4. Voir la Section problèmes.



Les enfants manifestent une curiosité spontanée et une fascination profonde pour les nombres, qu'ils perçoivent comme des clés pour comprendre et organiser le monde qui les entoure. Il leur semble presque inconcevable qu'il puisse subsister des mystères ou des questions irrésolues à leur sujet. En voici un, à la portée de tous les élèves du primaire.

Quand les nombres se reflètent : le palindrome introuvable

Christian Genest
Université McGill

Nombres palindromes

Un nombre palindrome est un nombre entier qui se lit de la même façon de gauche à droite et de droite à gauche dans une base donnée. Par exemple, en base 10 (la numération décimale que nous utilisons tous les jours), des nombres comme 1, 11, 363 ou 8448 sont des palindromes.

Tous les nombres à un chiffre (0 à 9) sont des palindromes. Il existe 9 palindromes à deux chiffres :

11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 et 99.

À trois chiffres, on en compte 90, tels que :

101, 111, 121, ..., 999.

À quatre chiffres, il y en a aussi 90, comme par exemple

1001, 1111, 1221, ..., 9999,

et ainsi de suite. Si on fait le cumul des nombres palindromes inférieurs ou égaux à 10^n , on trouve donc

10 pour $n = 1$,

19 pour $n = 2$,

109 pour $n = 3$,

199 pour $n = 4$,

et ainsi de suite.

Pour des puissances de 10 plus grandes, le nombre de palindromes forme une suite bien connue (la suite A070199 dans l'OEIS). Dans ce décompte, le nombre 0 est inclus.

Des additions ayant un palindrome pour résultat

Choisissons maintenant un nombre au hasard et additionnons-le avec son nombre « miroir » (le nombre obtenu en inversant ses chiffres). Répétons ce processus avec le résultat : dans la plupart des cas, on finit par obtenir un palindrome.

Exemples

Il y a des palindromes dès la première étape, comme

$$12 + 21 = 33.$$

À la deuxième étape,

$$149 + 941 = 1090 ;$$

$$1090 + 901 = 1991.$$

Remarquer ici que quand on lit 1090 de droite à gauche, on obtient 0901, que l'on écrit 901.

Pour un palindrome en trois étapes, on peut penser par exemple à

$$59 + 95 = 154 ;$$

$$154 + 451 = 605 ;$$

$$605 + 506 = 1111.$$

Le mystère 196

Cette méthode fonctionne pour tous les nombres entre 1 et 195. Mais pour le nombre 196, on trouve

$$\begin{aligned}
 196 + 691 &= 887 \\
 887 + 788 &= 1675 \\
 1675 + 5761 &= 7436 \\
 7436 + 6347 &= 13783 \\
 13783 + 38731 &= 52514 \\
 52514 + 41525 &= 94039 \\
 94039 + 93049 &= 187088 \\
 187088 + 880781 &= 1067869 \\
 1067869 + 9687601 &= 107554470 \\
 107554470 + 07455701 &= 18211171 \\
 18211171 + 17111281 &= 35322452 \\
 35322452 + 25422353 &= 60744805 \\
 60744805 + 50844706 &= 111589511
 \end{aligned}$$

....

Toujours pas de palindrome ! En fait, pour le nombre 196, personne ne sait si la procédure finit ou non par mener à un palindrome... C'est un vrai mystère !

En 1987, un programmeur du nom de John Walker a lancé une expérience pour tenter de déterminer si le nombre 196 conduit à un palindrome. Il a utilisé pour ce faire un ordinateur Sun 3/260 et un programme en C qui effectuait les calculs en arrière-plan et enregistrait les résultats régulièrement. Son expérience a duré presque trois ans, jusqu'en mai 1990. Lorsqu'elle est venue à son terme, le programme avait effectué 2 415 836 itérations et le nombre obtenu comptait un million de chiffres, mais le palindrome se faisait encore attendre !

Depuis 1995, plusieurs chercheurs ont poursuivi les recherches. Le Canadien Jason Doucette a entre autres réalisé un nouveau record mondial en poussant le calcul jusqu'à 12,5 millions de chiffres en 2000, record qui a ensuite été battu par l'Américain Wade VanLandingham avec 300 millions de chiffres en 2006. En 2011, le Français Romain Dolbeau a utilisé le calcul distribué pour atteindre 413 millions de chiffres, puis un milliard en 2015. Malgré tous ces efforts, le nombre 196 n'a encore conduit à aucun palindrome. Incroyable, non ?

Les nombres de Lychrel

En général, on appelle « nombre de Lychrel » un nombre entier pour lequel on soupçonne qu'il ne mènera jamais à un palindrome en appliquant la méthode itérative décrite précédemment. À ce jour, on ne sait pas combien il y a de tels nombres, ni si certains des candidats possibles finissent par donner un palindrome après un nombre énorme d'étapes.

Le nombre 196 est le plus petit et le plus connu des candidats au titre de nombre de Lychrel, mais il y en a d'autres. Parmi les nombres entre 0 et 1000, on en compte 13, à savoir 196, 295, 394, 493, 592, 689, 691, 788, 790, 879, 887, 978, 986. Remarquons ici que sauf pour 790, ces candidats sont paillés : 196 et 691, 295 et 592, 394 et 493, etc. La raison est évidente mais fournit quand même un éclairage intéressant sur le phénomène.

En effet, si on prend pour acquis que 196 est un nombre de Lychrel, il faut alors que 691 en soit un lui aussi, car que l'on parte de 196 ou de 691, on trouve $196 + 691 = 887$ à l'étape suivante et tous les éléments subséquents de la suite seront les mêmes. Qui plus est, 887 doit lui-même être un nombre de Lychrel, ainsi d'ailleurs que 788. En prolongeant le raisonnement, on constate que $788 + 887 = 1675$ doit également être un nombre de Lychrel, etc. Observons par ailleurs que

$$295 + 592 = 394 + 493 = 887,$$

et que

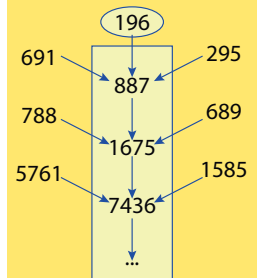
$$689 + 986 = 1675,$$

ce qui explique pourquoi on les soupçonne tous d'être eux aussi des nombres de Lychrel. Mais une subtilité se manifeste concernant 790. Comme

$$790 + 97 = 887,$$

on comprend bien pourquoi il s'inscrit dans la liste. Mais alors pourquoi 97 n'y figure-t-il pas ? Tout simplement parce que si on lit le nombre 97 de droite à gauche, on

Graine et fil



Le nombre 196 est appelé une *graine*; c'est le plus petit nombre engendrant un *fil*, qui regroupe les nombres apparentés, soit

$$\begin{aligned}
 196 + 691 &= 887 \\
 295 + 592 &= 887 \\
 788 + 887 &= 1675 \\
 689 + 986 &= 1675 \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

En fait, on n'est pas certain que 196 est une graine, comme on n'est pas certain qu'il existe des graines et des fils puisqu'on ne connaît avec certitude aucun nombre de Lychrel en base 10.

obtient 79 et non 790 ! Les nombres 79 et 97 conduisent tous les deux au même palindrome, soit 44044, en quatre étapes.

La conjecture de Lychrel

En mathématiques, on appelle « conjecture » un énoncé dont on ne sait pas s'il est vrai ou faux. Dans l'état actuel des calculs, l'énoncé suivant est donc une conjecture :

C_1 : « 196 est un nombre de Lychrel. »

Une autre conjecture, plus générale, serait à l'effet que

C_2 : « Il existe des nombres de Lychrel ».

Si l'énoncé C_1 est démontré, alors C_2 sera vrai. Mais C_2 pourrait être vrai même si C_1 s'avère faux. En effet, il se pourrait qu'à force de calculs sur des ordinateurs de plus en plus puissants, on arrive à montrer que le nombre 196 conduit éventuellement à un palindrome. Ce nombre serait alors retiré de la liste des candidats possibles. Il en irait de même pour 691, puisque l'algorithme d'addition des nombres miroirs les fait tous passer par

$$887 = 196 + 691.$$

Bien d'autres candidats mentionnés plus haut subiraient le même sort (vous pourriez demander à vos élèves lesquels !). Mais cela ne signifierait pas pour autant qu'il n'existe pas, quelque part, un nombre de Lychrel en base 10.

D'ailleurs, aucun ordinateur ne suffira jamais à démontrer la véracité de l'énoncé C_2 . Il faudra pour cela recourir à un argument logique, comme cela a déjà été fait, entre autres, pour les nombres exprimés en base 2 (voir encadré).

C'est aussi un argument logique qui nous permet d'énoncer le fait suivant :

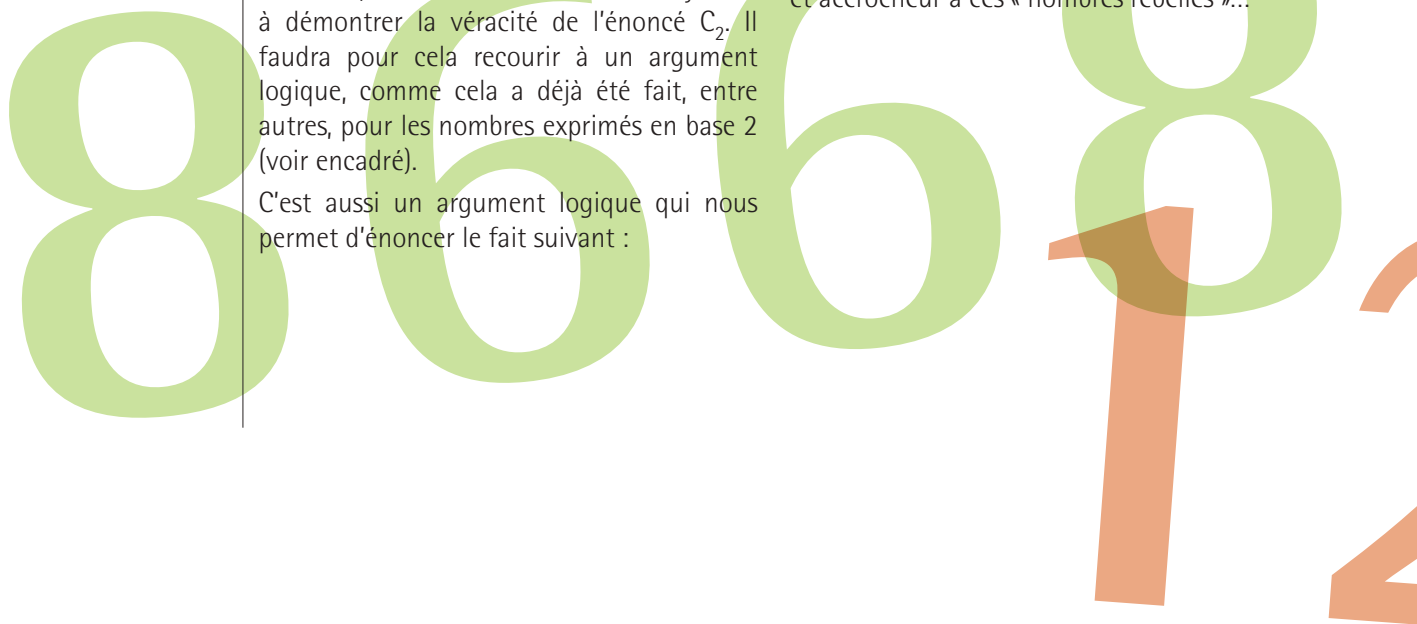
Théorème

S'il existe un nombre de Lychrel en base 10, alors il existe une infinité de tels nombres.

En mathématiques, un « théorème » est une affirmation qui peut être démontrée comme vraie à partir de raisonnements et de simples règles de logique. C'est bien le cas ici : comme on l'a déjà dit, si 196 est un nombre de Lychrel, il en est nécessairement de même pour 691 et pour tous les nombres le long du fil engendré par cette graine. Si 196 n'est pas un nombre de Lychrel mais qu'un autre nombre se qualifie, le même raisonnement s'appliquera et tous les nombres le long du fil engendrés par cette graine seront des nombres de Lychrel. Dans tous les cas, il y en aura forcément un nombre infini, car seule l'obtention d'un palindrome peut y mettre fin !

Mais qui est Lychrel ?

Les conjectures mathématiques sont souvent attribuées à des individus. On serait donc en droit de se demander qui est Lychrel. La réponse est étonnante : il n'y a en fait aucun spécialiste des mathématiques connu de ce nom ! Bien que l'origine du terme soit un peu obscure, plusieurs sources mentionnent qu'il aurait été introduit en 2002 par Wade VanLandingham. En construisant un anagramme approximatif du prénom de sa petite amie nommée Cheryl, celui-ci aurait souhaité donner un nom à la fois romantique et accrocheur à ces « nombres rebelles »...



Calculs de Jason Doucette

Selon les calculs du Néo-Écossais Jason Doucette, environ 80 % de tous les nombres inférieurs à 10 000 se résolvent en 4 étapes ou moins et environ 90 % d'entre eux se résolvent en 7 étapes ou moins. Le nombre 89 est un cas rare : il faut 24 étapes pour qu'il conduise à un palindrome ! C'est celui qui exige le plus d'itérations parmi tous les nombres inférieurs à 10 000 pour lesquels un palindrome a été trouvé.

1. $89 + 98 = 187$
2. $187 + 781 = 968$
3. $968 + 869 = 1837$
4. $1837 + 7381 = 9218$
5. $9218 + 8129 = 17347$
6. $17347 + 74371 = 91718$
7. $91718 + 81719 = 173437$
8. $173437 + 734371 = 907808$
9. $907808 + 808709 = 1716517$
10. $1716517 + 7156171 = 8872688$
11. $8872688 + 8862788 = 17735476$
12. $17735476 + 67453771 = 85189247$
13. $85189247 + 74298158 = 159487405$
14. $159487405 + 504784951 = 664272356$
15. $664272356 + 653272466 = 1317544822$
16. $1317544822 + 2284457131 = 3602001953$
17. $3602001953 + 3591002063 = 7193004016$
18. $7193004016 + 6104003917 = 13297007933$
19. $13297007933 + 33970079231 = 47267087164$
20. $47267087164 + 46178076274 = 93445163438$
21. $93445163438 + 83436154439 = 176881317877$
22. $176881317877 + 778713188671 = 955594506548$
23. $955594506548 + 845605495559 = 180120002107$
24. $180120002107 + 701200021081 = 8813200023188$

Pour des exemples faciles à compléter en classe mais moins laborieux, on peut se rabattre sur

69 (4 étapes ; résultat : 4884)

ou

79 (6 étapes ; résultat : 44044), par exemple.

Base 2 et base 10

En informatique, les nombres sont représentés en base 2, c'est-à-dire exclusivement avec des 0 et des 1. Par exemple, le nombre 17 s'écrit 10001 en base 2, car $1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 17$.

Comme 10001 se lit de la même façon de gauche à droite et de droite à gauche, c'est un palindrome en base 2, mais pas en base 10. En revanche, 6 s'écrit 110 en base 2 et n'est pas un palindrome, mais $110 + 11 = 1001$ (ou $6 + 3 = 9$ en base 10) en est un.

En base 2, on trouve que 10110 (qui correspond à 22 en écriture décimale) est un nombre de Lychrel, car après 4 étapes il devient 10110100, après 8 étapes 1011101000, après 12 étapes 101111010000, et de manière générale, après $4n$ étapes, on obtient un nombre composé de 10, suivi de $n+1$ uns, puis de 01, et enfin de $n+1$ zéros. Le nombre 10110 ne peut donc jamais conduire à un palindrome, ni aucun des autres termes de la suite. Le nombre 10110 est d'ailleurs le plus petit des nombres de Lychrel en base 2.

En raisonnant de façon analogue, le Britannique David Seal a pu démontrer l'existence de nombres de Lychrel dans plusieurs autres bases, dont 11, 17, 20, 26, ainsi que dans toutes les puissances de 2. Toutefois, le problème reste entier en base 10...



Choisir des coordonnées adaptées à la géométrie d'un problème, c'est parfois la clé pour mieux le comprendre ou simplifier les calculs. Les coordonnées polaires sont naturelles quand on a une symétrie autour d'un centre. Les coordonnées bipolaires, moins connues, sont utiles dans l'étude de systèmes ayant deux sources, comme les champs électriques et magnétiques autour de deux fils conducteurs. Elles reposent sur le surprenant théorème des cercles d'Apollonius.

Des cercles d'Apollonius à l'électromagnétisme: les coordonnées bipolaires

Geneviève Savard
ETS

Dans une ville, les rues et les avenues peuvent être rectilignes ou courbes et ainsi former différents types de grilles : modèle New-York, médiéval ou autre. Il en va de même pour les systèmes de coordonnées en 2 dimensions!

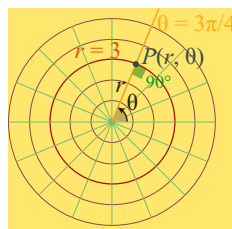
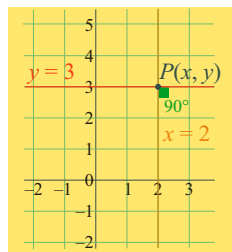


Figure 1
Grilles cartésienne et polaire.

Le système de coordonnées repose sur deux familles de courbes, l'ensemble des droites $\{x = k\}$ et l'ensemble des droites $\{y = k'\}$, telles que toute courbe de la première famille a un unique point d'intersection avec une courbe de la deuxième famille. Ceci permet de situer un point du plan par l'intersection d'une courbe de la première famille avec une courbe de la deuxième famille, tout comme on se donne rendez-vous au coin de la 2^e rue et la 3^e avenue.

En coordonnées polaires, la première famille de courbes est l'ensemble des cercles $\{r = k\}$ et la deuxième famille de courbes est l'ensemble des demi-droites $\{\theta = k'\}$ issues de l'origine (figure 1). Dans cet exemple, comme dans le précédent, les deux familles de courbes sont orthogonales.

Le système de coordonnées bipolaires

Ce système de coordonnées convient aux situations dans lesquelles on a deux points distingués du plan. Les deux familles de courbes qui le constituent sont des cercles et des arcs de cercles (figure 2). Regardons leur définition.

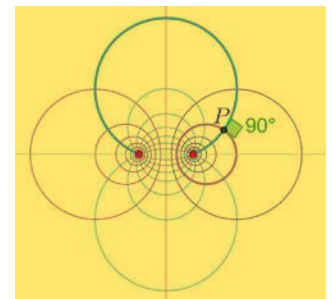


Figure 2 – Grille bipolaire.

Soit P un point du plan et notons $d_1 = |P_1P|$, $d_2 = |P_2P|$ (figure 3). Les coordonnées bipolaires de P sont

$$\tau = \ln\left(\frac{d_1}{d_2}\right) \text{ et } \sigma = \angle P_1PP_2.$$

Positionnons P_1 et P_2 à $(x, y) = (\pm a, 0)$ et explorons ces coordonnées.

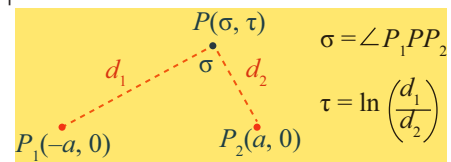


Figure 3 – Coordonnées bipolaires σ et τ .

Courbes de coordonnée τ constante

Pour que la coordonnée $\tau = \ln(d_1/d_2)$ soit constante, il faut que le rapport d_1/d_2 le soit aussi. Le premier ensemble de courbes du système bipolaire est donc formé des lieux géométriques

$$\left\{ \frac{|PP_1|}{|PP_2|} = k \right\},$$

où P est un point quelconque du plan. Le théorème des cercles d'Apollonius (voir encadré page 14) affirme que ces lieux sont des cercles si $k \neq 1$ et une droite, la médiatrice du segment P_1P_2 , si $k = 1$.

La figure 4 montre l'ensemble des points tels que $d_1/d_2 = 2$. Ces points ont une coordonnée $\tau = \ln(2) \approx 0,69$. La figure 5 montre un ensemble de courbes de coordonnée τ constante.

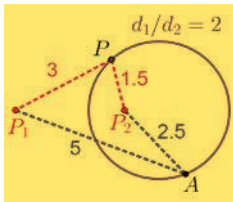


Figure 4 – Courbe d'équation $\tau = \ln(2)$.

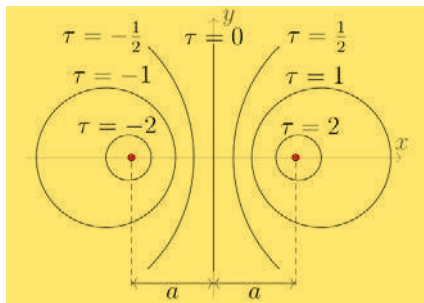


Figure 5 – Courbes de τ constante.

Courbes de coordonnée σ constante

Euclide a démontré que tous les angles inscrits interceptant le même arc de cercle $\widehat{P_1P_2}$ ont la même mesure, soit la moitié de l'angle au centre $\angle P_1CP_2$ (figure 6). Le lieu géométrique des points P pour lesquels l'angle orienté $\sigma = \angle P_1PP_2$ est constant est donc un arc de cercle (ou une portion de droite si $\sigma = 0^\circ$ ou $\sigma = 180^\circ$). On l'appelle arc capable¹.

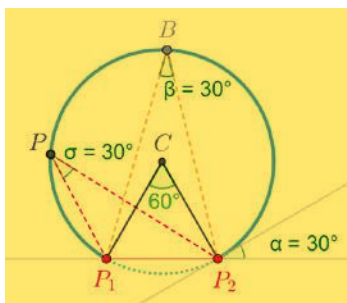


Figure 6 – Courbe d'équation $\sigma = 30^\circ$.
 Les angles σ , β et α sont congrus car ils interceptent le même arc $\widehat{P_1P_2}$.

La figure 7 présente un ensemble d'arcs capables, où l'angle est en radians.

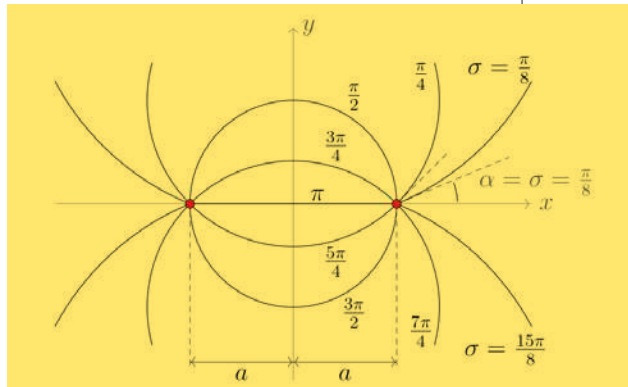


Figure 7 – Courbes de coordonnée σ constante.

Grille bipolaire : deux familles de cercles

La grille bipolaire, formée des courbes de coordonnée τ ou σ constante, consiste en deux familles de courbes : des cercles et des arcs de cercles (figures 2 et 8). En chaque point d'intersection de deux courbes de cette grille, l'angle est de 90° (voir l'encadré *L'inversion surprise !*, page 17).

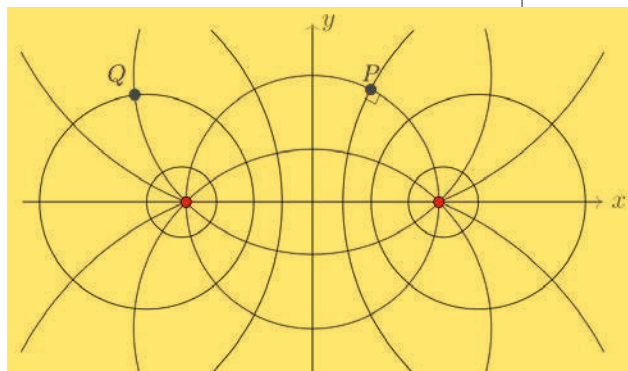


Figure 8 – Grille bipolaire. Le point P est situé à l'intersection de l'arc $\sigma = \pi/2$ et du cercle $\tau = 1/2$, le point Q en $\sigma = \pi/4$ et $\tau = -1$.

Valeur de τ en P_1 et P_2 ?

Attention ! Pour établir la valeur de τ aux deux points de référence du système, étudions ce qui se passe quand P s'approche très près de P_1 ou de P_2 sans y toucher :

- Si $P \rightarrow P_1$, alors $d_1 \rightarrow 0$ donc $\frac{d_1}{d_2} \rightarrow 0$ et $\tau \rightarrow -\infty$.
- Si $P \rightarrow P_2$, alors $d_2 \rightarrow 0$ donc $\frac{d_1}{d_2} \rightarrow \infty$ et $\tau \rightarrow \infty$.

1. L'article La position d'un navire dans Accromath Vol 19.1, hiver printemps 2024 explique que ces arcs capables sont utiles pour se repérer sur l'eau !

Théorème des cercles d'Apollonius

(~ 260 av. J. - C.)

Soient P_1 et P_2 deux points du plan. Considérons un point P quelconque et notons ses distances aux deux points fixes $d_1 = |PP_1|$ et $d_2 = |PP_2|$. Le lieu géométrique des points où d_1/d_2 est une constante est

- une droite si $d_1/d_2 = 1$. Cette droite est la médiatrice du segment P_1P_2 (figure 9).
- un cercle si $d_1/d_2 \neq 1$.

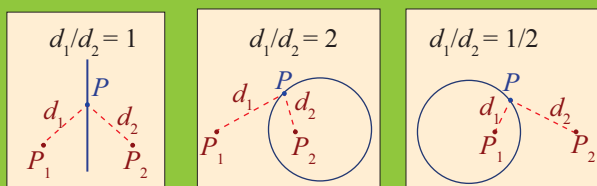


Figure 9 – Lieux géométriques tels que d_1/d_2 vaut 1, 2 et 1/2.

La démonstration utilise une propriété intéressante et peu connue de la bissectrice d'un angle, voir p. 15.

Application à l'électromagnétisme

Les coordonnées bipolaires servent à étudier des phénomènes présentant une symétrie autour de deux pôles. Par exemple, un système électrique composé d'une source, d'une résistance et de deux longs fils parfaitement conducteurs parcourus d'un courant constant (figure 12).

Les charges électriques produisent un champ électrique \vec{E} tandis que les charges électriques en mouvement (un courant) produisent un champ magnétique \vec{B} . En observant ces champs vectoriels dans le plan perpendiculaire aux fils (figure 13), on reconnaît l'allure de la grille bipolaire, ce qui en fait un système de coordonnées très utile dans ce contexte. Tentons de comprendre pourquoi les vecteurs de ces champs s'alignent ainsi.

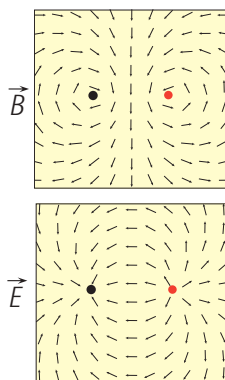


Figure 13 En haut, le champ électrique \vec{B} dans le plan perpendiculaire à deux fils ; en bas, le champ magnétique \vec{E} , avec des vecteurs tracés de la même longueur.

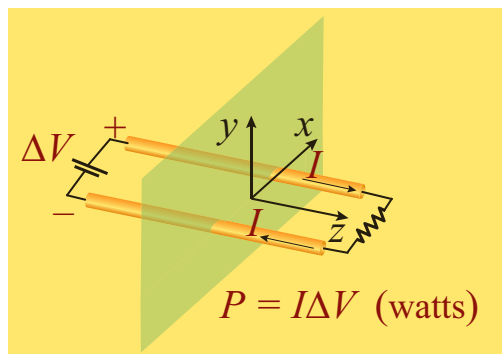


Figure 12 – Un système électrique composé d'une source, de deux longs fils et d'une résistance.

Champ électrique

Nous voulons établir l'allure des vecteurs du champ \vec{E} dans le plan perpendiculaire aux deux fils de la figure 12. Pour cela, nous allons nous appuyer sur une propriété spéciale du champ électrique : les vecteurs du champ électrique sont perpendiculaires aux courbes de niveau d'une fonction appelée potentiel électrique, notée V .²

Nous allons montrer que les courbes de potentiel électrique V constant sont des cercles de coordonnée bipolaire τ constante ! Puisque les vecteurs du champ électrique sont perpendiculaires aux courbes de niveau de V , cela implique que le vecteur \vec{E} au point P est perpendiculaire au cercle de la grille bipolaire passant par P (figure 14).

Voyons les détails. Il est possible de démontrer que le système de la figure 12 se comporte comme deux fils infinis sans épaisseur, ce qui simplifie son analyse.

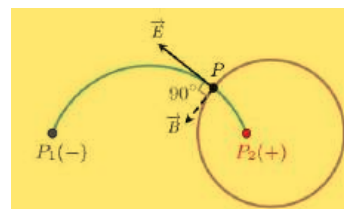


Figure 14 – Le vecteur \vec{E} du champ électrique en P est perpendiculaire au cercle de coordonnée τ constante.

Dans le plan XY perpendiculaire aux fils, ceux-ci sont situés en $P_1(-a, 0)$ pour le fil dont courant est dans le sens des z négatifs et $P_2(a, 0)$ pour le fil dont le courant dans le sens des z positifs³.

2. En fait, pour ceux qui connaissent la notion de gradient, on a $\vec{E} = \text{grad}(V)$.
3. Ces points sont les centres effectifs des fils, qui ne correspondent pas exactement au centres géométriques des fils : (voir problème et DC Power Transported by Two Infinite Parallel Wires, par Marc Boulé, American Journal of Physics 92(1), pp. 14-22 (2024).

Nous admettrons que le champ électrique d'un fil infini uniformément chargé est radial et que son intensité en un point varie de façon inversement proportionnelle à d , la distance entre le point et le fil. Quant au potentiel électrique V , il varie proportionnellement à $\ln(d)$. Nommons c la constante de proportionnalité.

Si une charge électrique positive est placée en P , elle sera attirée vers P_1 et repoussée de P_2 . La charge suivra localement la direction et le sens du vecteur $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ (figure 15).

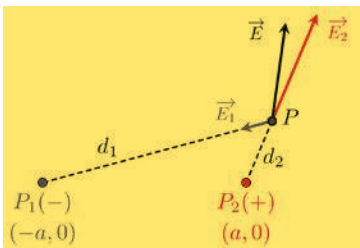


Figure 15 – Champ électrique \vec{E} au point P .

Notons V_1 la fonction du potentiel électrique du fil 1, obtenue en posant $V_1 = 0$ au point milieu entre P_1 et P_2 . De même pour le fil 2. On a

$$\|\vec{E}_1\| = \frac{c}{d_1}, \quad V_1 = c \ln\left(\frac{d_1}{a}\right),$$

$$\|\vec{E}_2\| = \frac{c}{d_2}, \quad V_2 = -c \ln\left(\frac{d_2}{a}\right),$$

et, en utilisant une propriété des logarithmes,

$$V = V_1 + V_2 = c \ln\left(\frac{d_1}{d_2}\right) = c\tau.$$

La fonction V dépend uniquement de τ , ce qui montre que les points de coordonnée τ constante ont le même potentiel électrique. Le cercle d'Apollonius formé par ces points constitue donc une courbe de niveau de la fonction V (cercle rose de la figure 14), il est donc perpendiculaire au vecteur \vec{E} .

Théorème de la bissectrice

(Prop. 3 du livre VI des éléments d'Euclide)

Dans un triangle ABC , la bissectrice intérieure en B découpe le côté AC dans le rapport des côtés adjacents. La bissectrice extérieure aussi.

Réciproquement, si une droite passant par le sommet B découpe le côté AC dans le rapport des côtés adjacents à B , alors c'est une bissectrice en B .

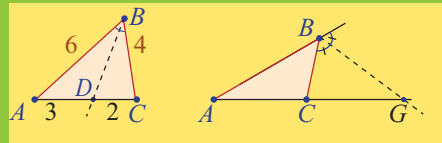


Figure 10 – La bissectrice intérieure en B découpe le côté AC dans le rapport des côtés adjacents. Ici, $6/4 = 3/2$. La bissectrice extérieure aussi

$$\frac{|BA|}{|BC|} = \frac{|GA|}{|GC|}.$$

Preuve des cercles d'Apollonius

Regardons la figure 11. P est un point tel que $\frac{|P_1P|}{|P_2P|} = k$.

Plaçons les points Q_1 et Q_2 sur la droite P_1P_2 de sorte que

$$\frac{|P_1Q_1|}{|P_2Q_1|} = \frac{|P_1Q_2|}{|P_2Q_2|} = \frac{|P_1P|}{|P_2P|} = k.$$

Par la réciproque du théorème de la bissectrice du triangle P_1PP_2 , PQ_1 est la bissectrice intérieure de l'angle $\angle P_1PP_2$ et PQ_2 est la bissectrice de l'angle extérieur $\angle P_2PR$.

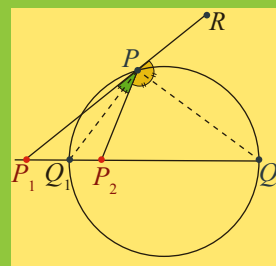
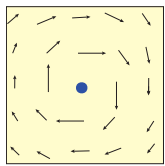


Figure 11 – Preuve du théorème des cercles d'Apollonius.

Montrons que P est sur le cercle de diamètre Q_1Q_2 . Pour cela, il suffit de montrer que l'angle $\angle Q_1PQ_2$ est droit (les points de la circonférence voient le diamètre avec un angle droit.) Comme les angles $\angle P_1PP_2$ et $\angle P_2PR$ sont supplémentaires, leur somme vaut 180° . Ainsi, la somme de leurs moitiés, $\angle Q_1PP_2$ et $\angle P_2PQ_2$, vaut 90° : $\angle Q_1PQ_2$ est donc droit.

Le courant entre dans le plan



Le courant sort du plan

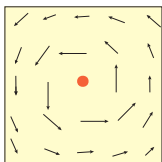


Figure 16
Le sens du champ magnétique dépend du sens du courant.

Champ magnétique

L'aiguille d'une boussole est déviée lorsqu'elle se trouve près d'un fil électrique parcouru par un courant. Selon sa position, l'aiguille de la boussole suit des courbes imaginaires appelées lignes de champ magnétique.

Dans le cas d'un fil unique, le champ magnétique \vec{B} est perpendiculaire au champ électrique \vec{E} et au fil. Son sens dépend du sens du courant (figure 16). L'intensité de \vec{B} en un point est inversement proportionnelle à la distance entre le point et le fil. Pour deux fils ou plus, on additionne les vecteurs.

Il se trouve que, pour le dispositif de deux fils que nous étudions, \vec{B} est perpendiculaire à \vec{E} en tout point. Ainsi, \vec{B} est tangent au cercle de τ constant (figure 14), ce qui explique l'allure du champ (figure 13).

En effet, soit \vec{B}_1 et \vec{B}_2 les champs magnétiques des fils 1 et 2, respectivement perpendiculaires à \vec{E}_1 et \vec{E}_2 , ainsi qu'aux fils. Les deux fils ont un courant de même intensité mais de sens opposé. La figure 13 montre que le courant entre dans le plan en P_1 et en sort en P_2 . Illustrons les 4 vecteurs et les angles entre eux à la figure 17 en remarquant que $\cos(\theta_2) = -\cos(\theta_1)$. C'est cette dernière propriété qui assure que $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$, et donc que $\vec{E} \perp \vec{B}$.

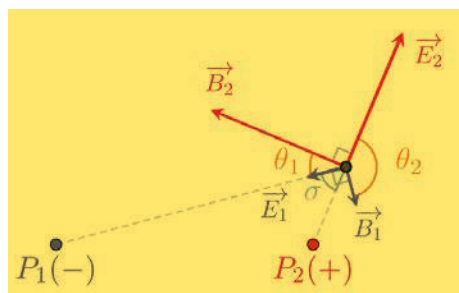


Figure 17 – Vecteurs \vec{B}_1 , \vec{B}_2 , \vec{E}_1 et \vec{E}_2 et les angles entre eux : $\theta_1 = 90^\circ - \sigma$, $\theta_2 = 90^\circ + \sigma$, donc $\cos(\theta_2) = -\cos(\theta_1)$.

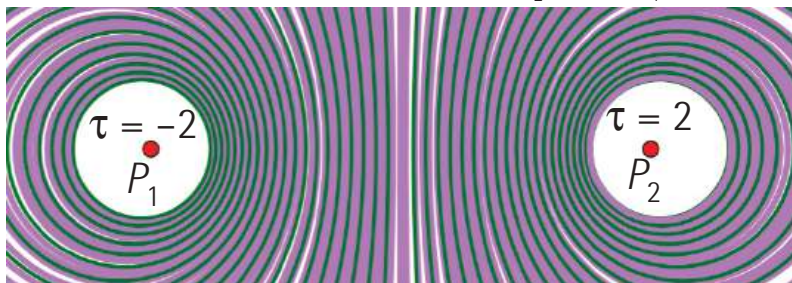


Figure 18
La région D (extérieur des fils) est entièrement couverte par les cercles de $\tau = -2$ à $\tau = 2$.

L'importance d'un système de coordonnées adapté à la géométrie du problème

Pour évaluer une intégrale sur une surface, on a avantage à choisir un système de coordonnées adapté à la géométrie du problème. Tout devient plus simple : la fonction à intégrer et les bornes d'intégration.

Par exemple, pour déterminer la puissance transportée à l'extérieur des fils de la figure 12, on doit intégrer une certaine fonction sur D , la région infinie qui correspond à l'extérieur des fils électriques et qui se situe dans le plan perpendiculaire aux fils⁴. En coordonnées cartésiennes, cela conduit à des intégrales impropres difficiles à calculer, même avec des logiciels spécialisés.

En coordonnées bipolaires, si les surfaces des fils correspondent aux cercles de coordonnée $\tau = -2$ et $\tau = 2$ (figure 18), la région infinie D possède des bornes finies !!! Elle se décrit simplement à l'aide des inégalités suivantes :

$$D = \{(\sigma, \tau) \mid 0 \leq \sigma < 2\pi, -2 \leq \tau \leq 2\}.$$

Conclusion

Il existe plusieurs systèmes de coordonnées, basés sur différentes familles de courbes. Les cercles d'Apollonius et les arcs capables d'Euclide sont au coeur du système bipolaire, un système orthogonal utile pour modéliser les quantités proportionnelles aux distances d'un point à deux sources.

4. Voir à nouveau l'article de Marc Boulé.

L'inversion surprise !

L'inversion, une transformation du plan

Considérons le cercle de centre C et de rayon r , et un point P différent de C . L'inversion de P par rapport à ce cercle est le point P' sur la demi-droite CP tel que $\overline{CP} \cdot \overline{CP'} = r^2$ (figure 19). Ainsi les points à l'extérieur du cercle ont une image à l'intérieur, et vice versa. Un point sur le cercle est son propre inverse. Le centre du cercle, C , est envoyé à l'infini.

Images des cercles et droites

La figure 19 illustre une des propriétés spectaculaires de l'inversion : elle transforme un cercle ne passant pas par C en un cercle ne passant pas par C , et une droite ne passant pas par C en cercle passant par C !

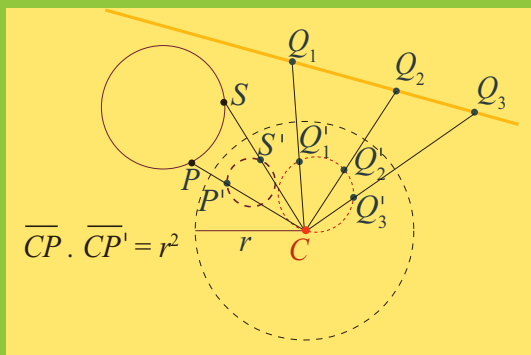


Figure 19

Images d'un cercle et d'une droite par inversion.

Une autre propriété spectaculaire de l'inversion est qu'elle préserve les angles (mais change leur orientation).⁵

De la grille bipolaire à la grille polaire

En choisissant bien le cercle d'inversion, on transforme la grille bipolaire en grille polaire et réciproquement. Les arcs de cercles bleus (de σ constante) sont transformés en demi-droites passant par l'origine (θ constante), tandis que les cercles mauves (de τ constante) deviennent des cercles centrés à l'origine (de r constante). Le cercle d'inversion est tracé en pointillé sur la figure 20.

5. L'article Pavages hyperboliques, Yvan Saint-Aubin, Accromath, Volume 5.1 - hiver-printemps 2010 montre de belles applications de l'inversion basées sur le fait que l'inversion préserve les angles.

Il est centré en P_2 . Son rayon est choisi de sorte que l'image de P_1 soit l'origine (voir exercice). Ainsi, puisque la grille polaire est orthogonale et que l'inversion préserve les angles, nous pouvons conclure que la grille bipolaire est orthogonale elle aussi.

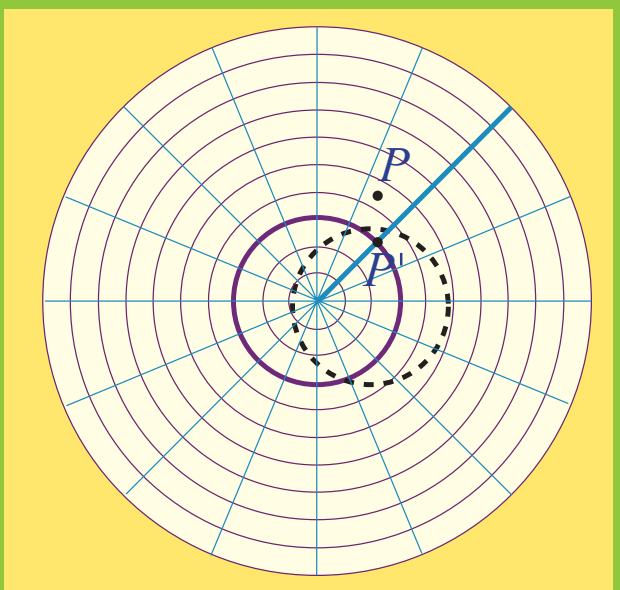
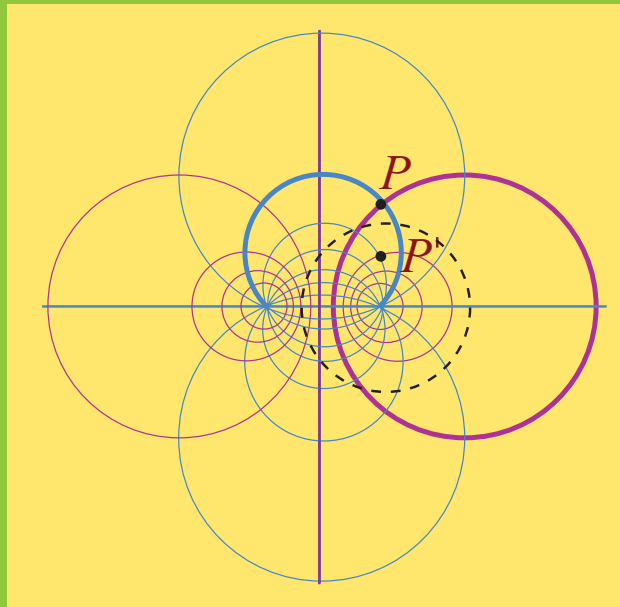


Figure 20 – Une inversion bien choisie transforme la grille bipolaire en grille polaire !

Imaginez un échiquier infini où les pièces peuvent voyager où elles le souhaitent, limitées uniquement par leurs règles de mouvement. Si un cavalier et un roi partent de la même case et font la course pour atteindre une case d'arrivée lointaine, lequel arrivera en premier? Peut-on quantifier le rapport entre les temps qu'ils mettent à parcourir cette distance? Ces questions mathématiques intrigantes offrent un aperçu fascinant sur la géométrie des échecs et de la théorie des nombres.

Cavalier contre le roi sur l'échiquier infini : Qui est le plus rapide ?

Christian Táfula
Université de Montréal

Le roi et le cavalier

Le roi se déplace d'une seule case dans n'importe quelle direction, formant une étoile à 8 branches autour de sa position actuelle. Mathématiquement, son ensemble de mouvements possibles à partir de l'origine est :

$$R = \{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1), (1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\},$$

que l'on notera de manière succincte :

$$R = \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, \pm 1)\}.$$

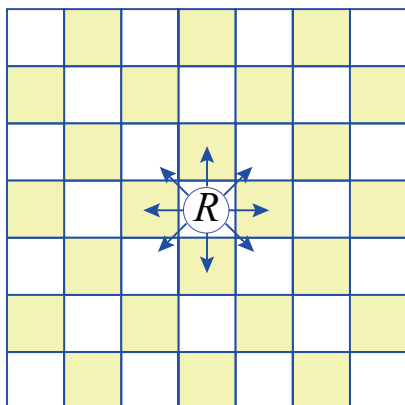


Figure 1a – Les mouvements du roi.

3	3	3	3	3	3	3
3	2	2	2	2	2	3
3	2	1	1	1	2	3
3	2	1	0	1	2	3
3	2	1	1	1	2	3
3	2	2	2	2	2	3
3	3	3	3	3	3	3

Figure 1b – Le nombre minimum de coups nécessaires pour que le roi atteigne cette case à partir de l'origine.

Le cavalier, en revanche, effectue ses mouvements emblématiques en forme de L : deux cases dans une direction et une perpendiculaire dans l'autre. Son ensemble de déplacements, au nombre de huit, est donc

$$C = \{(\pm 1, \pm 2), (\pm 2, \pm 1)\}.$$

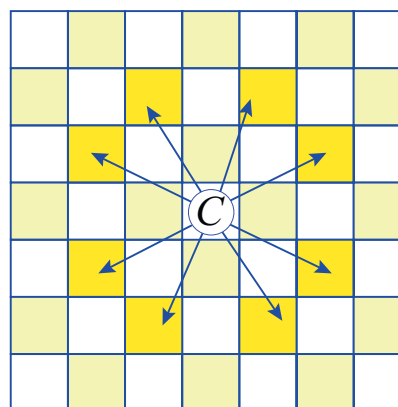


Figure 2a – Les mouvements du cavalier.

2	3	2	3	2	3	2
3	4	1	2	1	4	3
2	1	2	3	2	1	2
3	2	3	0	3	2	3
2	1	2	3	2	1	2
3	4	1	2	1	4	3
2	3	2	3	2	3	2

Figure 2– Le nombre minimum de mouvements nécessaires au cavalier pour atteindre cette case à partir de l'origine. Les cases orangées correspondent aux cases les plus éloignées de l'origine (en nombre de coups) dans la région représentée.

Une question naturelle se pose alors : le cavalier peut-il atteindre toutes les cases de l'échiquier infini ?

Colorions l'échiquier comme d'ordinaire : une case (x, y) est blanche si $x + y$ est pair et noire si $x + y$ est impair. Un coup de cavalier est toujours de la forme $(\pm 1, \pm 2)$ ou $(\pm 2, \pm 1)$. Dans les deux cas, la variation de la somme des coordonnées est de $\pm(1 + 2) = \pm 3$ ou de $\pm(2 - 1) = \pm 1$. La parité de $x + y$ change donc à chaque coup. Contrairement à certaines autres pièces, comme le fou, le cavalier n'est pas limité à une seule couleur de cases.

À partir de $(0, 0)$, le cavalier peut se déplacer en $(1, 2)$. À partir de là, un coup $(-2, -1)$ l'amène en $(-1, 1)$, puis un coup $(2, -1)$ le conduit en $(1, 0)$. Par symétrie des déplacements, le cavalier peut aussi atteindre $(-1, 0)$, $(0, 1)$ et $(0, -1)$.

Une fois que le cavalier sait atteindre les cases $(\pm 1, 0)$ et $(0, \pm 1)$, il peut répéter ces déplacements élémentaires autant de fois que nécessaire. En avançant pas à pas horizontalement et verticalement, il peut ainsi rejoindre n'importe quelle case (x, y) de l'échiquier infini. Ces déplacements suffisent à garantir que le cavalier peut aller partout sur l'échiquier infini.

Mais emprunter ces petits pas n'est pas toujours la stratégie la plus efficace. La vraie question devient alors : quel est le nombre minimal de coups qu'il faut au cavalier pour atteindre une case donnée ?

Vitesse sur l'échiquier

Les mouvements du roi et du cavalier possèdent des symétries : à partir d'une suite de coups qui mène à une case (x, y) , on peut changer le signe des déplacements ou échanger les axes horizontal et vertical pour obtenir des suites de coups menant aux cases $(\pm x, \pm y)$ et $(\pm y, \pm x)$. Autrement dit, toutes les directions sur l'échiquier se comportent de la même façon. Il suffit donc d'étudier les cases avec $x \geq 0, y \geq 0$ et $0 \leq y \leq x$, puis d'en déduire les autres cas par symétrie.

Nous notons $A(x, y)$ le nombre minimal de coups qu'une pièce A met pour atteindre la case (x, y) à partir de l'origine. Pour le roi R , le calcul est simple. Pour aller de $(0, 0)$ à (x, y) avec $x \geq 0$ et $0 \leq y \leq x$, le roi effectue d'abord y coups diagonaux $(1, 1)$, ce qui l'amène en (y, y) , puis $x - y$ coups horizontaux pour atteindre (x, y) . Le nombre total de coups est donc $R(x, y) = x$.

En utilisant la symétrie pour les autres directions, on obtient la formule générale $R(x, y) = \max(|x|, |y|)$.

Pour le cavalier C , le calcul est plus délicat. En se limitant au premier quadrant et en notant $m = y/x$.

La pente du point (x, y) , on distingue deux régimes selon la valeur de m . Lorsque la pente est petite ($0 \leq m \leq 1/2$), le cavalier progresse essentiellement horizontalement, et le nombre minimal de coups est propor-



tionnel à x . Lorsque la pente est plus grande ($1/2 < m \leq 1$), le cavalier avance de manière plus équilibrée horizontalement et verticalement, et le nombre de coups dépend de $x + y$. Plus précisément, pour des points éloignés de l'origine, on a l'approximation

$$C(x, y) \approx \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{si } 0 \leq m < \frac{1}{2}, \\ \frac{x+y}{3}, & \text{si } \frac{1}{2} < m \leq 1. \end{cases}$$

La Figure 3 illustre ces deux comportements. Les détails du raisonnement sont présentés dans l'encadré ci-dessous.

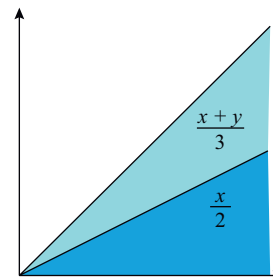


Figure 3 – Le temps approximatif qu'il faut au cavalier pour atteindre le point (x, y) .

Détails techniques : calcul de $C(x, y)$ pour le cavalier.

Cas $0 \leq m \leq 1/2$.

On pose x' égal à la partie entière de $x/2$: $x' = x/2$ si x est pair, et $(x-1)/2$ si x est impair. En effectuant x' coups de type $(2, 1)$ ou $(2, -1)$, le cavalier avance $2x'$ cases vers la droite. Après ces $2x'$ coups, il se trouve sur une case (X, Y) telle que $x - X \in \{0, 1\}$.

Chaque coup modifie aussi la coordonnée verticale de $+1$ ou -1 . Comme on suppose $y \leq x/2$, on peut commencer par effectuer y coups de type $(2, 1)$, puis alterner les coups $(2, 1)$ et $(2, -1)$ de façon à compenser les variations verticales. On obtient ainsi (X, Y) avec $y - Y \in \{-1, 0, 1\}$. Ainsi, le cavalier arrive dans le voisinage immédiat de (x, y) . Comme on peut le voir sur la Figure 2, à partir d'une telle position, il suffit d'ajouter au plus trois coups pour atteindre exactement (x, y) . On obtient donc

$$C(x, y) \approx \frac{x}{2}.$$

Cas $1/2 < m \leq 1$.

Lorsque la pente est plus grande, on combine deux types de coups : $(2, 1)$ et $(1, 2)$. Supposons que l'on effectue u coups du premier type et v du second. Le déplacement total est alors

$$(2u + v, u + 2v).$$

Pour se rapprocher de (x, y) , on cherche à résoudre $2u + v = x$, $u + 2v = y$. Ce système a pour solution

$$u = \frac{2x - y}{3}, \quad v = \frac{-x + 2y}{3}.$$

La condition $1/2 < m \leq 1$ assure que u et v sont positifs.

En général, ces valeurs ne sont pas entières. On note alors U et V leurs parties entières, de sorte que

$$0 \leq u - U < 1, \quad 0 \leq v - V < 1.$$

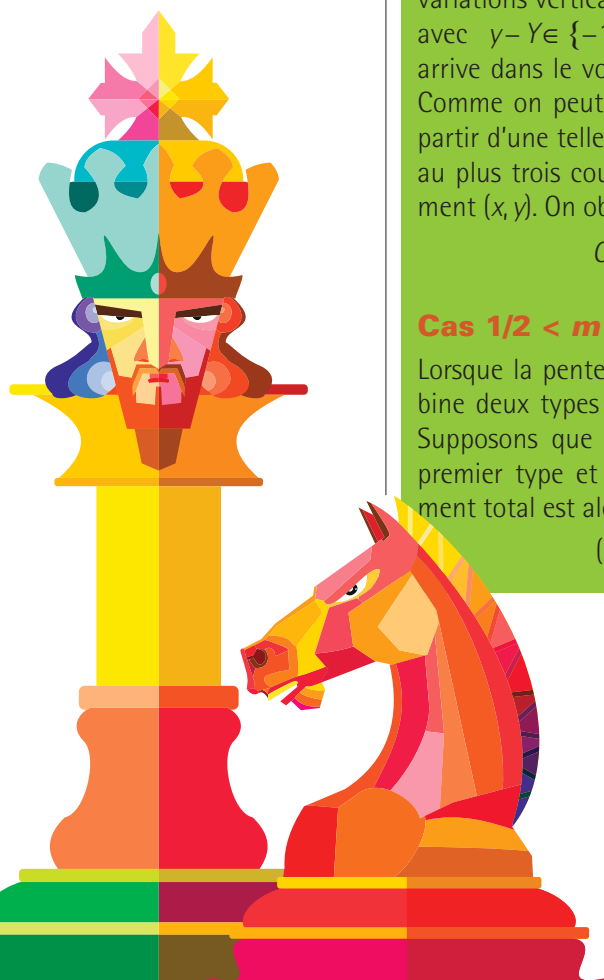
Après U coups de type $(2, 1)$ et V coups de type $(1, 2)$, le cavalier se trouve en une case (X, Y) vérifiant $X = 2U + V$, $Y = U + 2V$. En comparant avec les égalités précédentes, on obtient

$$x - X = 2(u - U) + (v - V) < 3,$$

$$y - Y = (u - U) + 2(v - V) < 3.$$

Le cavalier atteint ainsi une case voisine de (x, y) . Comme précédemment, quelques coups supplémentaires (au plus quatre) suffisent pour atteindre exactement la case voulue. Le nombre total de coups est donc de l'ordre de

$$C(x, y) \approx u + v = \frac{x + y}{3} = \frac{x}{3}(1 + m).$$



Une question naturelle se pose : quelle est la vitesse moyenne de ces pièces sur une grande région? En analysant les déplacements du cavalier sur un échiquier $N \times N$ lorsque N tend vers l'infini, nous découvrons que le cavalier est, en moyenne, $24/13$ (soit environ 1,85) fois plus rapide que le roi. Bien que la vitesse ne soit pas doublée, cela reste un avantage considérable.

Calcul de la vitesse

Afin de comparer quantitativement la rapidité du cavalier et du roi, nous définissons la *vitesse moyenne* relative du cavalier par rapport au roi comme la moyenne du rapport

$$\frac{C(x, y)}{R(x, y)}$$

sur toutes les cases d'un échiquier carré $-N \leq x, y \leq N$, puis nous faisons tendre N vers l'infini. Autrement dit, on choisit une case « au hasard » de plus en plus loin de l'origine et on compare le nombre minimal de coups nécessaires pour le cavalier et pour le roi.

Grâce aux symétries des mouvements du roi et du cavalier évoquées précédemment, ce calcul peut être ramené à la moitié du premier quadrant de l'échiquier, soit la région $x, y \geq 0$ et $0 \leq y \leq x$. D'après les estimations établies plus haut, le rapport $C(x, y)/R(x, y)$ dépend essentiellement de la pente $m = y/x$: pour $0 \leq m \leq 1$, on a l'approximation

$$\frac{C(x, y)}{R(x, y)} \approx \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leq m < \frac{1}{2}, \\ \frac{1+m}{3}, & \frac{1}{2} < m \leq 1. \end{cases}$$

Détails techniques : calcul de la moyenne

Dans le premier quadrant, on pose $m = y/x \in [0, 1]$. D'après les estimations précédentes, le rapport $C(x, y)/R(x, y)$ est bien approché par une fonction $f(m)$ définie sur l'intervalle $[0, 1]$.

La vitesse moyenne cherchée correspond alors à la moyenne de f sur $[0, 1]$, c'est-à-dire

$$\int_0^1 f(m) dm$$

Géométriquement, cette intégrale représente l'aire sous le graphe de f . Comme l'illustre la Figure 4, cette aire se calcule simplement en décomposant la région hachurée en deux carrés et un triangle. On obtient ainsi

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{2} dm + \int_{1/2}^1 \frac{1+m}{3} dm = \frac{13}{24}.$$

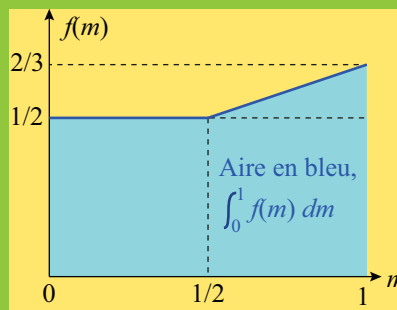


Figure 4 – Graphe de la fonction $f(m)$ (linéaire par morceaux) $f(m) = 1/2$ pour $0 \leq m \leq 1/2$ et $f(m) = (1+m)/3$ pour $1/2 < m \leq 1$.

Lorsque N tend vers l'infini, la moyenne discrète de $C(x, y)/R(x, y)$ sur les cases du carré $[-N, M]^2$ est bien modélisée par la moyenne continue de cette fonction de m sur l'intervalle $[0, 1]$.

Le calcul donne une valeur moyenne égale à $13/24$. Cela signifie qu'en moyenne, lorsqu'il faut 24 coups au roi pour atteindre une case éloignée, le cavalier n'en met qu'environ 13. Autrement dit, le cavalier est en moyenne

$$\frac{24}{13} \approx 1,85$$

fois plus rapide que le roi.

Généralisation : les (a, b) -cavaliers et les Fibocavaliers

Le cavalier n'est qu'un cas particulier d'une famille de pièces. On appelle (a, b) -cavalier $C_{a,b}$, avec $1 \leq a < b$, une pièce qui peut se déplacer d'un coup de

$$C_{a,b} = \{(\pm a, \pm b), (\pm b, \pm a)\}.$$

Le cavalier habituel correspond donc à $(a, b) = (1, 2)$.

Avant d'étudier leur vitesse, une question se pose : un (a, b) -cavalier peut-il atteindre toutes les cases de l'échiquier infini ? Il s'avère que cela n'est possible que si deux conditions sont satisfaites :

$$\text{pgcd}(a, b) = 1 \text{ et } a + b \text{ est impair.}$$

Si l'une de ces conditions échoue, certaines cases restent inaccessibles. La justification de ces faits, fondée sur des arguments de parité et d'arithmétique élémentaire, est laissée à la page *Problèmes*. Pour un rappel sur le calcul du pgcd, on pourra consulter l'article *Trouver le pgcd de deux entiers*.

Supposons désormais ces conditions remplies. Comme pour le cavalier classique, on peut alors comparer la vitesse du (a, b) -cavalier à celle du roi. En reproduisant les mêmes idées que précédemment (réduction par symétrie, estimation du nombre minimal de coups, puis moyenne sur une grande région), on obtient une expression explicite :

$$v_R(C_{a,b}) = \frac{2(a+b)b^2}{a^2 + 3b^2}.$$

Nous ne détaillons pas le calcul ici, celui-ci suivant de près le raisonnement présenté pour le $(1, 2)$ -cavalier. En faisant varier a et b , nous pouvons explorer une large gamme de pièces similaires au cavalier : la vitesse du $(2, 3)$ -cavalier par rapport au roi est $90/31 \approx 2,9$, celle du $(3, 4)$ -cavalier est $224/57 \approx 3,93$, et ainsi de suite (Voir figures 5 et 6).

Un cas particulièrement intéressant apparaît lorsque a et b sont deux nombres de Fibonacci consécutifs. Rappelons que la suite de Fibonacci est définie par

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,$$

donnant la suite 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

On définit alors le n -ième Fibocavalier par

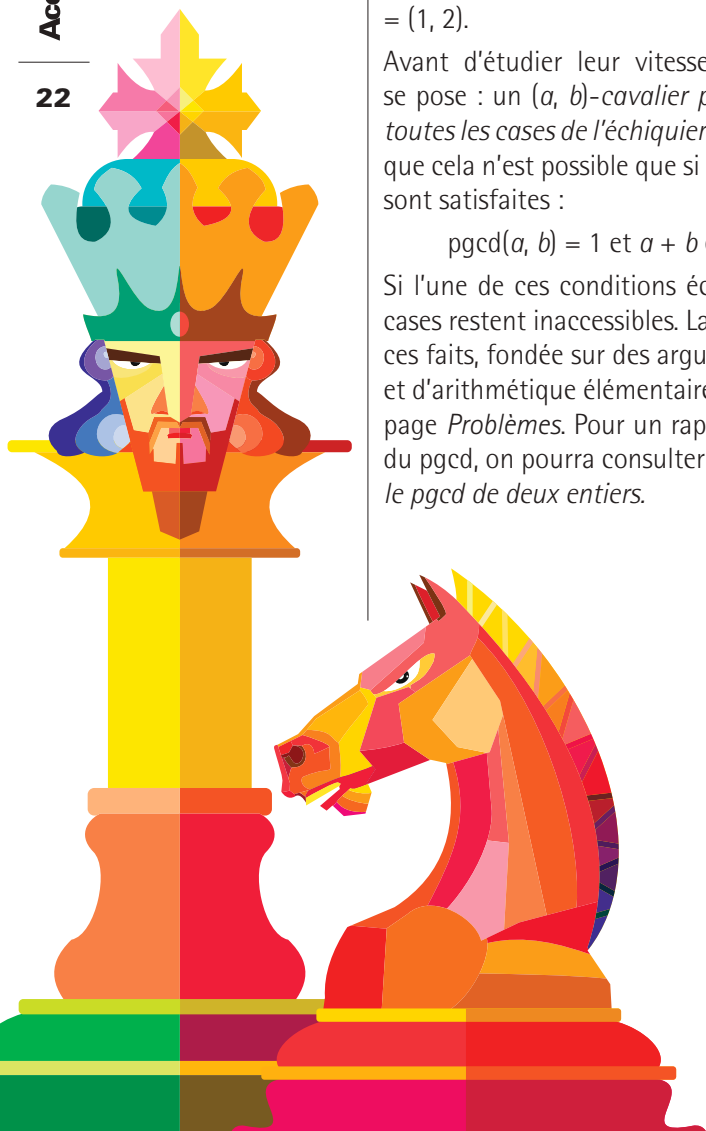
$$FC_n = C_{F_{n+1}, F_{n+2}}.$$

Le premier Fibocavalier est ainsi le cavalier classique.

Deux nombres de Fibonacci consécutifs sont toujours premiers entre eux. En revanche, leur parité suit un motif périodique : impair, impair, pair. Ainsi, lorsque l'indice n est divisible par 3, la somme $F_{n+1} + F_{n+2} (= F_{n+3})$ est paire. Le $3n$ -ième Fibocavalier ne satisfait donc pas les conditions précédentes, tandis que les autres peuvent atteindre toutes les cases de l'échiquier.

Enfin, lorsqu'on compare la vitesse de deux Fibocavaliers consécutifs, on observe que

$$\frac{v_R(FC_{3n+2})}{v_R(FC_{3n+1})} \rightarrow \phi = 1,618\dots$$

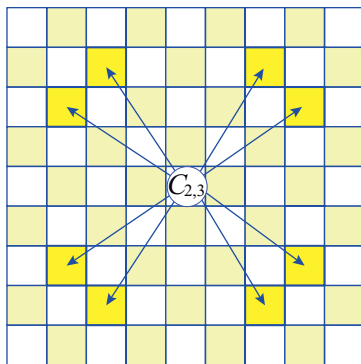


lorsque $n \rightarrow \infty$, où ϕ désigne le *nombre d'or*¹. Ainsi, même la vitesse de ces cavaliers particuliers porte la signature de la suite de Fibonacci.

Un voyage coloré

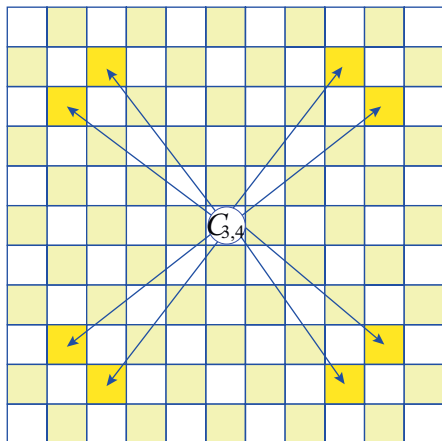
Les mathématiques des mouvements sur l'échiquier relie la combinatoire, la géométrie et la théorie des nombres. En analysant la répartition des cavaliers et des rois, nous découvrons des motifs liés à la symétrie,

aux diviseurs et même à des suites classiques comme les nombres de Fibonacci. Que vous soyez un passionné d'échecs ou un amateur de mathématiques, ces pièces montrent qu'il y a toujours plus à explorer sur l'échiquier infini. Ainsi, la prochaine fois que vous réfléchirez aux sauts singuliers du cavalier, rappelez-vous : ce n'est pas juste un jeu, mais une porte d'entrée vers des aperçus mathématiques profonds !



4	3	4	3	2	3	4	3	4
3	6	1	4	5	4	1	6	3
4	1	4	3	4	3	4	1	4
3	4	3	2	5	2	3	4	3
2	5	4	5	0	5	4	5	2
3	4	3	2	5	2	3	4	3
4	1	4	3	4	3	4	1	4
3	6	1	4	5	4	1	6	3
4	3	4	3	2	3	4	3	4

Figure 5 – Mouvements du (2, 3)-cavalier (à gauche) dans un échiquier 9×9 et nombre minimal de coups nécessaires pour atteindre chaque case à partir de l'origine sur un tel échiquier (à droite). Les cases orangées correspondent aux cases les plus éloignées de l'origine (en nombre de coups) dans la région représentée.



6	3	6	3	4	7	4	3	6	3	6
3	8	1	6	5	6	5	6	1	8	3
6	1	6	3	6	7	6	3	6	1	6
3	6	3	4	5	4	5	4	3	6	3
4	5	6	5	2	7	2	5	6	5	4
7	6	7	4	7	0	7	4	7	6	7
4	5	6	5	2	7	2	5	6	5	4
3	6	3	4	5	4	5	4	3	6	3
6	1	6	3	6	7	6	3	6	1	6
3	8	1	6	5	6	5	6	1	8	3
6	3	6	3	4	7	4	3	6	3	6

Figure 6 – Mouvements du (3, 4)-cavalier (à gauche) dans un échiquier 11×11 et nombre minimal de coups nécessaires pour atteindre chaque case sur un tel échiquier (à droite). Les cases orangées correspondent aux cases les plus éloignées de l'origine (en nombre de coups) dans la région représentée.

1. Voir les articles *Nautilé, nombre d'or et spirale dorée* par Christiane Rousseau et *Spirales végétales* de Christiane Rousseau et Redouane Zazoun, vol 3.2, été-automne 2008. Le nombre d'or par André Ross, *Accromath* vol 5, hiver printemps 2010.

Un sofa doit être déplacé d'un bout à l'autre d'un couloir d'un mètre de largeur. S'il y a un angle droit le long du trajet, quelles sont la forme et l'aire du plus grand sofa que l'on puisse faire passer sans qu'il soit soulevé du sol ?

Le problème du sofa

Christian Genest
Université McGill

Christiane Rousseau
Université de Montréal



Leo Moser



Jineon Baek

C'est à Leo Moser, mathématicien canadien d'origine autrichienne, que l'on doit la formulation du « problème du sofa », sorte de puzzle géométrique qui s'énonce comme suit. Imaginons un couloir ayant un mètre de largeur et comportant un angle droit, tel qu'illustré à la figure 1. Supposons que l'on veuille déplacer un sofa d'un bout à l'autre de ce couloir en le faisant glisser seulement, c'est-à-dire sans le soulever du sol. Quelle forme ce sofa doit-il avoir si l'on souhaite que son aire soit la plus grande possible ? Plusieurs articles de recherche ont été publiés sur le sujet et la solution finale vient d'être annoncée par Jineon Baek en décembre 2024.

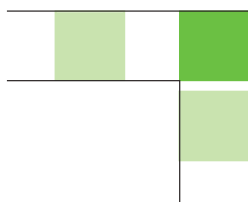


Figure 1. Couloir d'une largeur de 1 m ayant un angle droit et trois positions successives d'un sofa carré ayant 1 m de côté poussé le long du couloir.

Deux solutions très simples mais pas optimales

De toute évidence, un sofa carré faisant 1 m de côté peut aisément passer le coin, tel qu'indiqué sur la figure 1. L'aire maximale est donc au moins égale à $A = 1 \text{ m}^2$. Toutefois, on peut facilement faire mieux.

Considérons par exemple un sofa en forme de demi-disque de rayon 1 m, tel qu'illustré à la figure 2. Lorsqu'on le fait glisser à l'horizontale le long du couloir, il finit par toucher le mur du fond. À ce moment précis, le centre de son segment droit touche aussi l'angle droit du coin, tel qu'indiqué sur la figure 2. Il peut alors pivoter d'un quart

de tour autour de ce point et poursuivre ensuite son chemin. Ce demi-disque a pour aire $A = \pi/2 \approx 1,5708 \text{ m}^2$, ce qui est déjà nettement mieux qu'avec le carré de 1 m^2 .

Peut-on faire encore mieux ? Il se trouve que oui, comme le mathématicien britannique John Hammersley l'a montré dès 1968 en proposant un sofa d'aire $A = 2,2074 \text{ m}^2$.

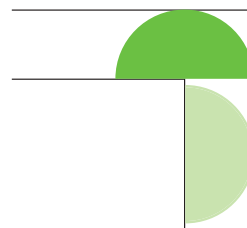


Figure 2. Deux positions successives d'un sofa en forme de demi-disque de rayon 1 m poussé et pivoté le long d'un couloir d'une largeur de 1 m.

Le sofa de Hammersley

Pour concevoir sa solution, Hammersley a eu l'idée de séparer le demi-disque de rayon 1 en deux quarts de disque et d'insérer un rectangle de longueur L et de hauteur 1 entre les deux. Un tel sofa est illustré à la figure 3, mais il est clair qu'il ne peut pas franchir le



coin à moins que l'on ne rogne une partie de la base du rectangle, tel que représenté dans la figure par le triangle rectangle ABC pour un angle de rotation donné.

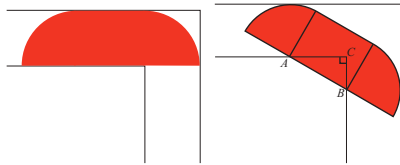


Figure 3. Deux positions successives d'un sofa composé d'un rectangle de dimension $L \times 1 \text{ m}^2$ et de deux quarts de disque de rayon 1 m dans un couloir d'une largeur de 1 m.

Remarquons que l'hypoténuse AB est de longueur L , quel que soit l'angle de rotation. En effet, les deux extrémités étant des quarts de disque, leurs points de tangence au couloir se situent à 1 mètre de A du côté gauche et à 1 mètre de B du côté droit. En particulier lorsque le sofa pivote en « roulant » le long des quarts de disque tout en restant tangent aux deux murs extérieurs, les points A et B parcourent les murs intérieurs du couloir, puisqu'il mesure 1 mètre de largeur.

En plaçant le segment AB à l'horizontale, comme dans la figure 4, on peut plus facilement déterminer quelle est la réunion de tous les triangles ABC . Il s'agit tout simplement du demi-disque de diamètre AB puisqu'un angle inscrit dans un demi-cercle est un angle droit. Il en résulte le sofa de Hammersley, illustré à la figure 5.

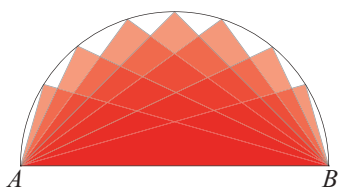


Figure 4. Demi-cercle de diamètre AB de longueur L et série de triangles rectangles inscrits.

Pour que le sofa de Hammersley soit d'un seul tenant, il faut bien sûr que $L \in [0; 2]$. Il reste alors à déterminer la valeur de L qui maximise l'aire du sofa. Notons d'abord que les deux extrémités étant des quarts de disque de rayon 1, la somme de leurs aires est égale à $\pi/2$. Remarquons ensuite que la partie

centrale est un rectangle d'aire L , duquel on a soustrait un demi-disque de rayon $L/2 \leq 1$ et donc d'aire $\pi L^2/8$. L'aire du segment central est donc égale à $L - \pi L^2/8$.

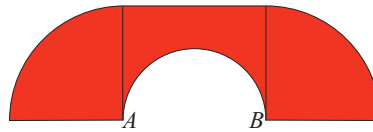


Figure 5. Le sofa de Hammersley de longueur $L+2$, composé de deux quarts de disque de rayon 1 et d'une région centrale telle que la distance entre A et B vaut L .

Au final, l'aire du sofa de Hammersley avec région centrale de longueur L est

$$A=f(L) = L - \pi L^2/8 + \pi/2. \quad (1)$$

L'expression (1) est une fonction quadratique de L . En différentiant la fonction f par rapport à L , on trouve $f'(L) = 1 - \pi L/4 = 0$ si et seulement si $L = 4/\pi$. Cette valeur correspond bien à un maximum de la fonction, puisque $f''(L) = -\pi/4$ pour tout $L \in [0; 2]$. Par conséquent, l'aire maximale d'un sofa de Hammersley vaut

$$A=f(\pi/4) = 2/\pi + \pi/2 \approx 2,20742.$$

L'aire de ce sofa est donc bien plus grande que celles des deux solutions précédentes.

La figure 6 fournit une représentation dynamique du pivotement du sofa de Hammersley autour du coin d'un couloir de largeur 1 m. Comme on peut le constater, le sofa touche aux quatre murs du couloir en chacune des positions pendant son pivotement autour du coin. Comme il n'y a aucune marge de manœuvre pour l'agrandir, le sofa de Hammersley semble être la solution optimale.

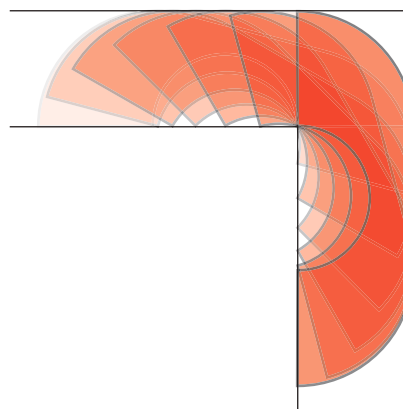


Figure 6. Représentation dynamique du pivotement d'un sofa de Hammersley, composé de deux quarts de disque de rayon 1 et d'un segment central de longueur $L = \pi/4$ tel que l'aire du sofa vaut $2/\pi + \pi/2 \approx 2,20742$.



John Hammersley





Joseph Gerver

L'aire du sofa de Hammersley n'est pas optimale

On a longtemps cru que l'aire du sofa de Hammersley était la plus grande possible. Ce n'est qu'en 1992 qu'un mathématicien américain du nom de Joseph Gerver, professeur à l'Université Rutgers, au New Jersey, a proposé un sofa dont l'aire dépasse celle du sofa de Hammersley d'environ 0,55 %, soit 2,219 531 668 871... m².

La figure 7 présente une image superposée des sofas de Hammersley et de Gerver. Pour passer du sofa de Hammersley au sofa de Gerver, il faut enlever les régions bleues et ajouter les régions roses. En y regardant de près, on constate que l'ensemble des régions bleues a une aire inférieure à l'ensemble des régions roses.

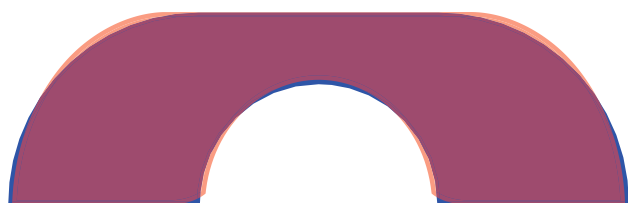


Figure 7

Sofas de Hammersley et de Gerver superposés. Les régions bleues sont celles où le sofa de Hammersley est plus grand que celui de Gerver ; les régions roses sont celles où le sofa de Gerver est plus grand que celui de Hammersley.

Intuition de Gerver

Avant de décrire plus précisément la solution de Gerver, examinons l'intuition qui l'a guidé dans ses travaux. Pour ce faire, considérons la figure 8, dans laquelle les lettres *A*, *B*, *C*, *D* désignent les quatre murs du couloir, et *X* dénote le coin inférieur.

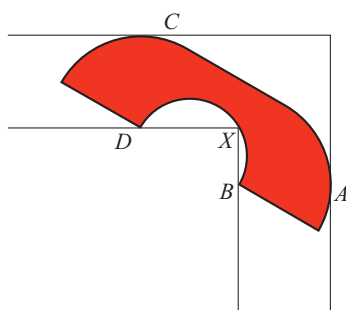


Figure 8

Un sofa de Hammersley en rotation dans un couloir de largeur 1 m.

Observons que dès qu'il amorce le passage du coin, le sofa de Hammersley est tangent aux murs extérieurs *A* et *C*. En même temps, sa base touche les murs intérieurs *B* et *D*, ainsi

que le coin *X*. Il n'y a donc aucune marge de manœuvre pour agrandir le sofa sans changer sa forme.

En revanche, bien que le sofa de Hammersley touche aux quatre murs du couloir en tout temps durant son pivotement, ses points de contact font des angles droits aux murs *B* et *D*. Gerver s'est alors dit qu'en rognant un peu ces coins et en procédant à d'autres ajustements, on pourrait peut-être augmenter un peu l'aire du sofa.

Gerver s'est donc attelé à la construction d'un sofa qui, pendant tout son mouvement, sera tangent aux murs extérieurs *A* et *C*. Cependant, pour maximiser l'aire sur l'ensemble du mouvement, il ne sera pas possible que le sofa touche en chaque position à la fois aux deux murs intérieurs *B* et *D* et au coin *X*.

Changement de point de vue

L'une des difficultés inhérentes au problème est le fait que les équations définissant les contours du sofa changent au fur et à mesure que celui-ci pivote. Or, ces équations sont plus complexes que celles délimitant le couloir. En faisant tourner les murs plutôt que le sofa, on simplifie donc énormément les calculs. Aussi, à l'instar de Gerver et Hammersley, nous allons opter pour un repère fixe par rapport au sofa.

La figure 9 illustre la rotation du couloir autour du sofa de Hammersley. Quel que soit $\theta \in [0; 90^\circ]$, on fait tourner le couloir d'un angle θ et on le translate de telle sorte qu'il contienne le sofa. Ainsi, pour qu'un sofa ait une aire (localement) maximale, il faut qu'il corresponde à l'intersection de tous ces couloirs tournés et translattés. Sinon, on pourrait identifier une portion d'aire extérieure au sofa et incluse dans tous les couloirs. Cette portion pourrait alors être ajoutée au sofa pour en augmenter l'aire.

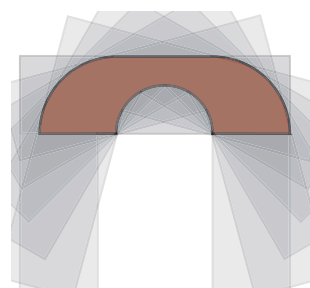


Figure 9. Rotation du couloir autour du sofa de Hammersley.

Remarquons que, pour chaque angle $\theta \in [0; 90^\circ]$, la position du couloir est uniquement déterminée par la position $X(\theta)$ du coin intérieur. La courbe décrite par $X(\theta)$ pour $\theta \in [0; 90^\circ]$ est appelée *chemin de rotation*. Pour le sofa de Hammersley, ce chemin n'est autre que le demi-cercle de rayon $2/\pi$ sur la frontière inférieure du sofa.

Le sofa de Gerver

La figure 10 donne une représentation du sofa de Gerver. Sa frontière comporte quatre coins étiquetés F, F', G, G' sur la figure, ainsi que 18 segments identifiés en chiffres romains. À la différence du sofa de Hammersley, il n'y a pas d'angle droit aux voisinages de F, F', G et G' .

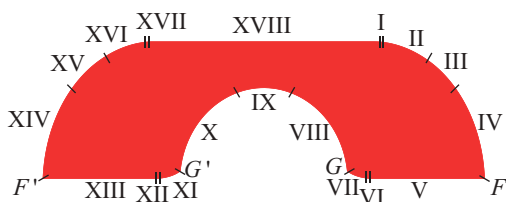


Figure 10
Le sofa de Gerver, les 18 segments et les 4 coins de sa frontière.

Dans le sofa de Gerver, les différentes portions de la frontière correspondent aux différentes manières dont le sofa touche les murs du couloir selon son angle. On peut s'en rendre compte en observant la figure 11,

qui montre certaines rotations du sofa. On voit bien le rôle des 18 portions de courbe de la frontière du sofa de Gerver. D'une portion de courbe à l'autre, le type de contact du sofa avec les bords du couloir change : sur certaines portions, il y a quatre points de tangence ou de contact en un point, sur d'autres il n'y en a que trois. Sur certaines portions du parcours, le coin intérieur du couloir touche au sofa, sur d'autres non!. Voir l'encadré pour de plus amples détails.

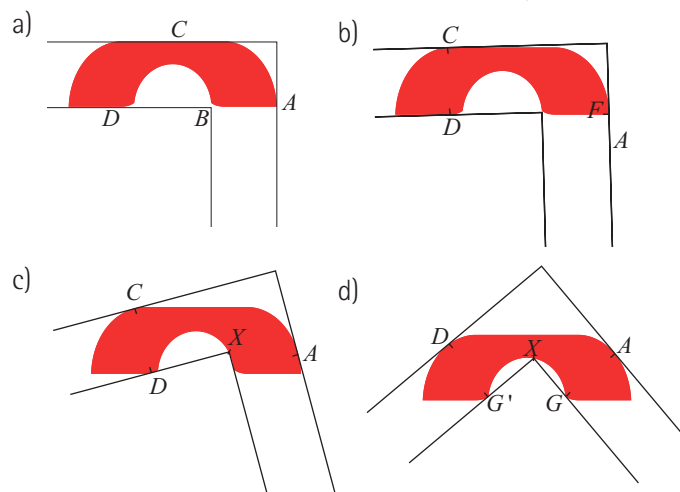


Figure 11. Un sofa de Gerver en rotation dans un couloir de largeur 1 m.

1. Une animation de la rotation du couloir autour du sofa de Gerver peut être visualisée sur le site suivant :

<https://blogs.ams.org/visualinsight/2015/01/15/hammersley-sofa/>

Description de la frontière du sofa de Gerver

Tel qu'indiqué à la figure 10, la frontière du sofa comporte 18 portions de courbes et quatre coins F, F', G, G' qui sont successivement en contact avec les murs du couloir pendant un intervalle de temps. Ces 22 morceaux sont liés par groupes de trois, quatre ou cinq, selon les contacts des quatre murs et du coin avec le sofa. On peut les présenter en ordre d'occurrence lorsque le sofa tourne dans le sens négatif d'un angle $\theta \in [0; \pi/2]$, partant du couloir horizontal pour aboutir dans le couloir vertical. Deux angles sont utilisés pour donner les changements de régime

Angle	ϕ	α
Radians	0,039177	0,681301
Degrés	2,24468°	39,0357°

Les différents régimes apparaissent dans le tableau suivant :

Régime	Valeur de θ	Contact au point				
		A	B	C	D	X
1 (fig.11a)	$\theta = 0$	F		XVIII	XIII	
2 (fig.11b)	$\theta \in [0; \phi]$	F		XVII	XII	
3 (fig.11c)	$\theta \in [\phi; \alpha]$	IV		XVI	XI	VIII
4 (fig.11d)	$\theta \in [\alpha; \pi/2 - \alpha]$	III	G	XV	G'	IX
5	$\theta \in [\pi/2 - \alpha; \pi/2 - \phi]$	II	VII	XIV		X
6	$\theta \in [\pi/2 - \phi; \pi/2]$	I		F'		
7	$\theta = \pi/2$	XVIII	X	F'		

Les cas 5, 6 et 7 sont les symétriques des cas 3, 2 et 1 respectivement.

Construction du sofa de Gerver

Pour construire son sofa, Gerver l'a considéré comme fixe et a fait tourner le couloir autour de lui. Il a procédé par approximations successives, en considérant, non pas tous les angles, mais des angles

$$\left\{ 0; \frac{\pi}{2n}, \frac{2\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}, \dots, \frac{(n-1)\pi}{2n}, \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Pour chaque entier n , on veut choisir les couloirs de telle sorte que leur intersection ait l'aire la plus large possible. Cette intersection d'un nombre fini de couloirs est un polygone.

Une borne supérieure

Déjà, le cas $n = 2$ est instructif. Il nous permet de montrer que l'aire maximale d'un sofa qui passe le coin est strictement inférieure à $2\sqrt{2} \approx 2,828$.

En effet, le sofa se trouve au départ dans la branche horizontale du couloir. Pour qu'il puisse tourner le coin de 45° , il doit être contenu dans l'intersection du couloir de largeur 1 et d'une translation du couloir tourné de 45° ; voir figure 12.

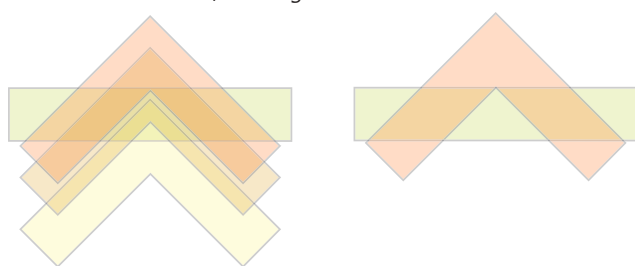


Figure 12. Translations d'un couloir horizontal tourné de 45° .

En regardant la figure, on peut noter que plus le sommet du couloir est haut, plus l'aire de son intersection avec le couloir horizontal (en vert) est grande. L'intersection a la plus grande aire lorsque le coin intérieur du couloir tourné de 45° coïncide avec le sommet du couloir horizontal.

Une telle position est impossible parce que le sofa serait alors scindé en deux morceaux. Cependant, on peut s'en approcher aussi près que l'on veut avec un sofa très mince en son centre. L'aire maximale d'un sofa passant le coin doit alors être inférieure à l'aire de cette intersection, qui est la réunion de deux lo-

sanges de hauteur 1 et d'angle aigu, 45° . La base a donc longueur $\sqrt{2}$ et l'aire de chaque losange est $\sqrt{2}$. Ainsi, l'aire de l'intersection des deux couloirs est-elle de $2\sqrt{2} \approx 2,828$.

Le sofa de Gerver: cas limite

Gerver a conçu sa solution comme une limite de sofas de forme polygonale ayant un nombre de plus en plus grand de côtés. Un exemple de tel sofa est donné à la figure 13. Gerver a aussi montré qu'une condition nécessaire pour que le sofa limite ait une aire maximale est de pouvoir l'approcher avec des sofas en forme de *polygone équilibré*.

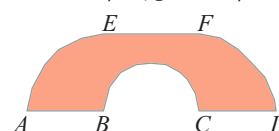


Figure 13. Un sofa de forme polygonale.

Un polygone est *équilibré* si, dès qu'il a des côtés parallèles dans une direction donnée, ceux-ci sont alors contenus dans exactement deux droites et si les sommes des longueurs sur chacune des droites sont égales.

À titre d'exemple, le polygone de la figure 13, dont les sommets A, B, C, D, E, F sont en fait les coins du sofa de Hammersley, n'est pas équilibré. En effet, les segments AB et CD d'une part, et EF d'autre part sont situés sur deux droites parallèles. Cependant, la somme des longueurs des segments AB et CD est égale à 2, alors que la longueur du segment EF est $4/\pi$.

Puisqu'il en est de même pour le sofa de Hammersley, ce dernier ne saurait être la limite de polygones équilibrés, ce qui permet déjà de conclure qu'il n'a pas une aire maximale. Et, en pratique, c'est ce que Gerver a vu : en rognant les coins en B et C , ce qui enlève un peu d'aire, on peut ajouter plus d'aire le long des arcs opposés AE et DF que ce qu'on a enlevé.

Pourquoi des polygones équilibrés ?

Sur la figure 14, le polygone intersection en a) n'est pas équilibré. En effet, considérons les deux côtés verticaux : le côté gauche est plus long que le droit. Comme les deux côtés sont parallèles, ils font partie d'une même branche d'un des couloirs. En déplaçant légèrement ce couloir vers la gauche, comme en b), on constate que la nouvelle aire est augmentée de l'aire d'un trapèze à gauche et diminuée de l'aire d'un trapèze à droite. Le trapèze côté gauche est plus haut que celui côté droit et les deux trapèzes ont même largeur. Ainsi, si la largeur est petite, le trapèze à gauche a une plus grande aire que celui à droite. Résultat : on a augmenté l'aire du polygone intersection en déplaçant un couloir vers la gauche.

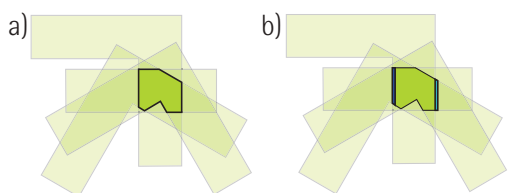


Figure 14. Intersection de polygones.

Au final, la démarche de Gerver a consisté à déterminer des polygones d'aire maximale ayant les contacts décrits dans les sept groupes et à prendre la limite lorsque le nombre de côtés augmente. En 2018, le mathématicien Dan Romik, affilié à l'Université de Californie à Davis, a réécrit la démonstration de Gerver en exprimant les différentes contraintes de contact sous forme d'équations différentielles, une pour chaque groupe, et en montrant que le sofa de Gerver est une solution de ces équations différentielles.

L'aire du sofa de Gerver est-elle maximale ?

Au moment d'écrire ces lignes, on pense que oui. Le mathématicien coréen Jineon Baek, qui a proposé une démonstration dans sa thèse, l'a soutenue avec succès. Son argument, qui fait l'objet d'un article de près de 120 pages, est considéré comme crédible par la communauté scientifique. Toutefois, l'article est encore en cours de validation.



Dan Romik



Un randonneur est perdu en forêt. Il connaît la forme de la forêt et ses dimensions. Il est capable de marcher en ligne droite, de suivre un arc de cercle, de mesurer la distance parcourue et de tourner selon l'angle de son choix. Tant qu'il n'est pas sur la frontière de la forêt, il ne peut pas savoir s'il est près de sortir de la forêt. Quelle est la meilleure stratégie pour être certain de sortir de la forêt tout en minimisant la distance parcourue dans le pire des cas ?

Perdu en forêt

Anik Trahan
Cégep de Sherbrooke

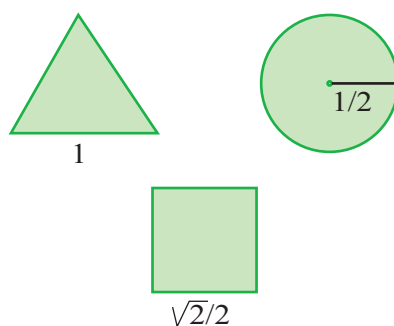


Richard Bellman
1920-1984

Ce problème a été proposé pour la première fois par Richard Bellman en 1955. On remarque rapidement que les hypothèses ne sont pas très réalistes : dans une vraie forêt, il est difficile de marcher exactement en ligne droite et, près de la frontière, on peut percevoir la sortie. Bellman a néanmoins choisi ce cadre simplifié pour présenter plus aisément un problème mathématique d'optimisation : déterminer un chemin garantissant la sortie d'une région géométrique, tout en minimisant la distance maximale à parcourir. Présenter cela sous la forme d'un randonneur perdu rend les stratégies plus accessibles.

Il y a plusieurs manières de définir la meilleure stratégie pour sortir de la forêt, on aurait pu définir que la meilleure stratégie est celle qui permet de sortir de la forêt avec une distance moyenne minimale, mais ici, on définit la meilleure stratégie par celle dont la distance maximale soit minimale.

Pour ce problème, on va utiliser le terme *diamètre* pour représenter la distance maximale entre deux points de la forêt. Si la forêt a une forme circulaire, cela correspond à la définition usuelle du diamètre d'un cercle. Voici trois exemples de forêt avec un diamètre de 1.



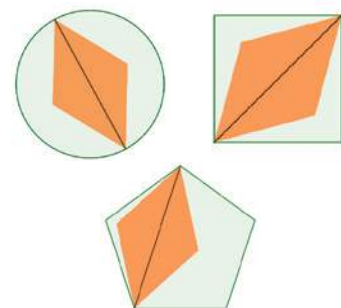
Le chemin qu'on recherche pour sortir de la forêt est appelé *chemin d'évasion*.

Grosse forêt : la ligne droite

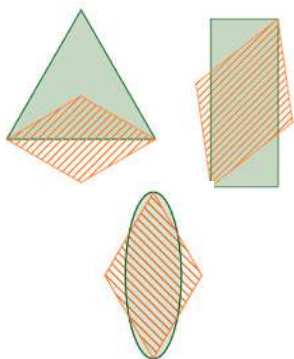
On pourrait croire que la meilleure stratégie consiste à marcher en ligne droite. Ainsi, la distance maximale serait le diamètre de la forêt. Le pire cas est donc quand le randonneur part d'un point extrême et il se dirige en ligne droite vers le point le plus éloigné.

Par définition du diamètre, peu importe le point où est le randonneur au départ, sa distance (en ligne droite) avec tous les points à la frontière est plus petite que le diamètre.

C'est effectivement la stratégie optimale pour les grosses forêts. Une forêt est dite *grosse*, si elle peut contenir un losange formé de deux triangles équilatéraux et tel que sa grande diagonale est le diamètre de la forêt. Un tel losange a deux angles de 60° et deux angles de 120° . Voici des exemples de grosses forêts avec les losanges.

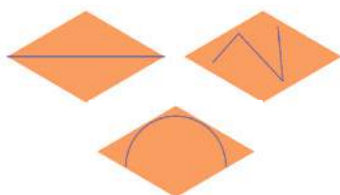


Une forêt qui n'est pas grosse, c'est-à-dire qu'elle ne peut pas contenir un losange dont la grande diagonale est égale au diamètre de la forêt et dont les angles soient 60° et 120° , sera appelée une *forêt étroite*. Voici des exemples de forêts étroites avec les losanges.



En 1973, Gerriets et Poole, ont démontré que ce losange avec des angles de 60° et de 120° peut contenir tous les chemins de longueur égale à sa grande diagonale. Donc pour tout chemin d'une longueur plus petite que la grande diagonale du losange, il existe une manière de le contenir complètement dans le losange, donc il ne peut être une trajectoire d'évasion.

Voici des exemples de chemins de longueur égale à la grande diagonale inclus dans le losange.



Cela veut dire que la ligne droite est la meilleure trajectoire d'évasion pour une forêt en forme de ce losange et pour toutes les grosses forêts qui contiennent ce losange. Dans ces cas-ci, le pire cas est de marcher tout le diamètre de la forêt.

On peut démontrer que toutes les forêts en forme de polygone régulier (à l'exception du triangle) sont des grosses forêts, donc le chemin d'évasion pour toutes ces formes est une ligne droite.

Maintenant, on va s'intéresser à deux cas de forêts étroites.

Forêt étroite : rectangle

Cette fois-ci, on considère une forêt très longue et de largeur 1. Marcher en ligne droite n'est pas une bonne stratégie : si le randonneur part presque parallèlement aux grands côtés, il risque de marcher longtemps avant de sortir. Il faut donc envisager un chemin comportant des virages.

Pour vérifier qu'un chemin permettra toujours au randonneur de sortir de la forêt rectangulaire, il faut s'assurer qu'il existe toujours deux points sur le chemin entre lesquels la distance horizontale est au moins 1, et ce quelle que soit l'orientation du chemin dans la forêt.

La *distance horizontale* entre deux points est la différence en valeur absolue des coordonnées en x des deux points en considérant l'axe des x parallèles aux côtés de longueur 1 du rectangle.

$$d_{\text{horizontale}}(A(x_A, y_B), B(x_B, y_B)) = |x_A - x_B|$$

Si cette distance horizontale atteint au moins 1, alors quelle que soit la position du randonneur, un de ces points sera à l'extérieur de la forêt.



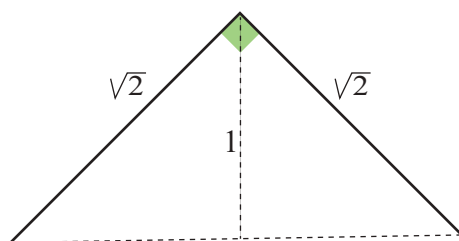
1



Stratégie 1 :

Le randonneur marche sur une distance $\sqrt{2}$, puis effectue un virage de 90° . Dans le pire cas, il devra marcher encore $\sqrt{2}$ avant de sortir.

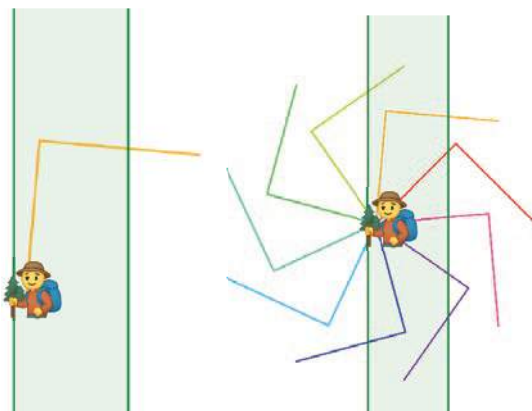
En effet, ces deux segments forment deux côtés adjacents d'un triangle rectangle isocèle dont la plus petite hauteur est 1 (largeur de la forêt).



Quel que soit l'orientation du randonneur, on peut toujours trouver deux points de son chemin dont la distance horizontale est comprise entre 1 et 2. Un cas extrême est lorsque l'hypoténuse est parallèle aux côtés de longueur 1 pour une distance horizontale de 2 et l'autre cas extrême est lorsque l'hypoténuse est perpendiculaire aux côtés de longueur 1 pour une distance de 1.

Ainsi quelle que soit l'orientation initiale du randonneur, l'un des sommets du triangle se trouvera nécessairement à l'extérieur de la forêt.

Avec cette stratégie, le randonneur peut donc s'assurer de sortir après avoir parcouru, dans le pire cas une distance totale de $2\sqrt{2} \approx 2,828$.



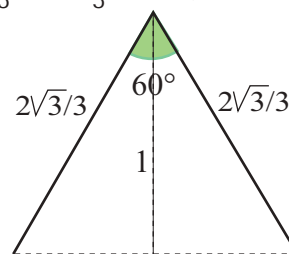
Cette approche simple fournit une première borne supérieure, soit $2\sqrt{2}$, pour la distance d'évasion.

Mais on peut encore améliorer la stratégie en remplaçant le virage droit par un angle de 60° , comme on le verra dans la stratégie suivante.

Stratégie 2:

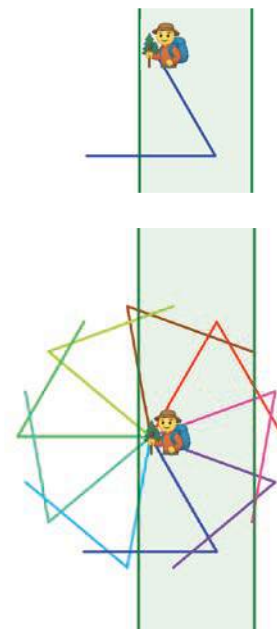
Le randonneur parcourt deux côtés d'un triangle équilatéral dont la hauteur est 1, c'est-à-dire la largeur de la forêt. Ce triangle a donc des côtés de longueur de $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Ainsi, si le randonneur marche le long de deux côtés consécutifs, la distance totale parcourue dans le pire cas est $2 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \approx 2,309$.



Dans cette configuration, on peut toujours trouver deux points sur la trajectoire, en fait deux sommets du triangle, dont la distance horizontale (projetée sur la largeur de la forêt) est comprise entre 1 et $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Autrement dit, quelle que soit l'orientation initiale du randonneur, au moins un sommet du triangle se retrouvera à l'extérieur de la forêt.



Ce trajet constitue bien un chemin d'évasion, plus court que celui de la stratégie 1.

Stratégie 3:

En 1961, Viktor Zalgaller propose un chemin plus court d'une longueur d'environ 2,2783 formé de quatre segments rectilignes et de deux arcs de cercle. L'amélioration par rapport au chemin précédent est de l'ordre de 2%. (La construction détaillée et la démonstration qu'il s'agit bien d'un chemin d'évasion se trouvent dans l'encadré *Chemin de Zalgaller*.) Cette solution est meilleure que la ligne droite, tant que le diamètre de la forêt rectangulaire est supérieur à la longueur du chemin de Zalgaller.

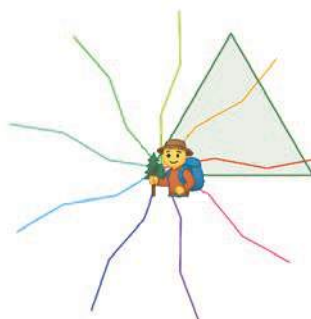
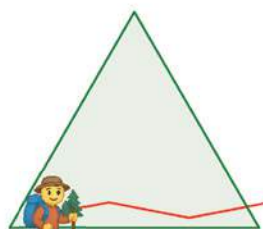


Forêt étroite : le triangle équilatéral

Soit la forêt en forme d'un triangle équilatéral de côté 1. Son diamètre est 1 et il ne contient pas le losange dont la grande diagonale correspond au diamètre, c'est une forêt étroite. La ligne droite de longueur 1 permet de sortir de la forêt, mais il y a mieux.

En 1965, Abraham Besicovitch trouve une meilleure stratégie que la ligne droite pour le cas de la forêt en triangle équilatéral. Un chemin en zigzag de trois segments permet au randonneur de sortir dans le pire cas après une distance d'environ 0,982. Ce chemin est composé de 3 segments de longueur $\frac{\sqrt{3}}{28}$ et si on considère deux côtés consécutifs comme les côtés d'un triangle isocèle, la valeur des angles aigus est

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{28}}\right) \approx 10,893^\circ.$$



Et maintenant ?

Ce problème du randonneur perdu dans la forêt est toujours étudié par les chercheurs. En 2025, Zhipeng Deng propose une nouvelle approche, à la place de déplacer le randonneur dans la forêt, il fait tourner et translater la forêt autour du randonneur.¹

Cette reformulation permet de calculer des stratégies optimales pour des forêts de formes complexes, voire en trois dimensions, à l'aide d'algorithmes numériques.

1. Voir article Le problème du sofa, *Accromath* 21.1 pour une telle approche.



Abram Besicovitch
1891-1970

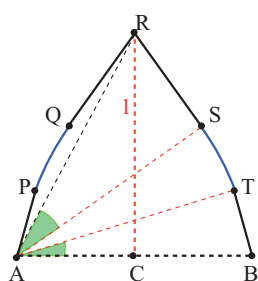


Viktor Zalgaller
1920-2020



Zhipeng Deng





Bref, ce problème ludique a donné naissance à une véritable branche de la géométrie algorithmique. Il a inspiré des recherches pendant plus de soixante ans et demeure encore aujourd'hui un sujet actif d'étude. Au-delà du contexte d'un randonneur perdu, il s'agit en fait d'un problème fondamental : comment garantir la sortie d'un ensemble sans information sur sa position exacte ?

Les stratégies optimales trouvées pour les triangles et les rectangles ont des applications en robotique, en navigation autonome, en traitement d'images, et même dans certaines méthodes d'optimisation numérique. Ce qui semblait au départ un jeu d'esprit s'avère être une porte d'entrée vers des stratégies profondes et modernes.

Chemin de Zalgaller

Pour le chemin de Zalgaller, il est formé de 4 segments AP , QR , RS et TB : et de deux arcs de cercle \widehat{ST} et \widehat{PQ} .

- L'arc \widehat{ST} a pour centre le point A et un rayon de 1.
- L'arc \widehat{PQ} a pour centre le point B et un rayon de 1.
- Le point C est le milieu de AB et la longueur de CR vaut 1.
- Chacun des segments est tangent à un des arcs de cercle au point d'intersection correspondant.

La construction géométrique repose sur deux angles caractéristiques :

$$\phi = \arcsin\left(\frac{1}{6} + \frac{4}{3}\sin\left(\arcsin\frac{17}{64}\right)\right) \approx 16,6148^\circ$$

et

$$\psi = \arctan\left(\frac{1}{2}\sec\phi\right) \approx 27,5553^\circ.$$

Dans cette figure, la longueur de AB est environ 1,0436 et la longueur de AR est 1,1280.

Principe de la démonstration

On veut démontrer que cette courbe constitue un chemin d'évasion pour tout rectangle de largeur 1 quelle que soit son orientation.

Soit θ l'angle entre le côté de largeur 1 du rectangle et la demi-droite issue de A passant par B .

On place le randonneur au point A et on fait varier θ . L'objectif est de démontrer que, pour toute valeur de θ , il existe deux points du chemin de Zalgaller dont la distance horizontale est au moins 1.

Vérification numérique

Le tableau de la page suivante donne, pour chaque intervalle d'angles θ compris entre 0° et 180° , les deux points correspondants ainsi que leur distance horizontale.

Par symétrie, les mêmes valeurs s'appliquent pour les angles de 180° à 360° .

On remarque, dans ce tableau, que dans chaque intervalle, la distance horizontale entre les points considérés est croissante, décroissante ou constante, mais toujours supérieure ou égale à 1.

Cette propriété prouve que, quelle que soit l'orientation du randonneur, le chemin de Zalgaller atteint nécessairement la frontière.

Ainsi, le chemin de longueur 2,2783 constitue bien une trajectoire d'évasion pour toute forêt rectangulaire de largeur 1.

Vérification numérique			
θ	Points avec une distance horizontale maximale	Distance horizontale entre les points	Exemple
0° et $16,61^\circ (\phi)$	A et B	De 1,0436 à 1	
$16,61^\circ$ et $34,89^\circ$	X* et B X* est le point sur l'arc de cercle tel que X*B est parallèle au côté de largeur 1.	1	
$34,89^\circ$ et $62,84^\circ (90^\circ - \psi)$	R et B	De 1 à 1,1280	
$62,84^\circ$ et 90°	R et B	De 1,1280 à 1	
90° et $117,56^\circ (90^\circ + \psi)$	R et A	De 1 à 1,1280	
$117,56^\circ$ et $145,11^\circ$	R et A	De 1,1280 à 1	
$145,11^\circ$ et $163,39^\circ$	Y* et A Y* est le point sur l'arc de cercle tel que Y*A est parallèle au côté de largeur 1.	1	
$163,39^\circ$ et 180°	B et A	De 1 à 1,0436	

Déterminer des aires presque sans calculs, simplement en faisant des dessins, c'est ce que propose le calcul intégral visuel, ou encore la méthode de Mamikon. Cette méthode introduite en 1959 par le physicien arménien Mamikon A. Mnatsakanian, alors âgé de 17 ans, permet de calculer des aires balayées par des segments tangents à une courbe.

Calcul intégral

Christiane Rousseau
Université de Montréal

Regardons l'aire d'une couronne entre deux cercles concentriques. Vous savez la calculer comme différence de l'aire des deux cercles.

L'aire est donnée par

$$A = \pi R_2^2 - \pi R_1^2.$$

Cette formule ne nous apprend pas grand-chose.

Réécrivons-la comme

$$A = \pi (R_2^2 - R_1^2).$$

Posons

$$r = \sqrt{R_2^2 - R_1^2}.$$

Alors $A = \pi r^2$. Surprise : cette aire est l'aire d'un cercle de rayon r ! Quel est ce r ?

C'est la longueur d'une corde tangente au premier cercle jusqu'au deuxième cercle.

Pourquoi ? C'est la question qu'a posée Mamikon et pour laquelle il propose l'explication suivante. On découpe cette aire en secteurs très minces déterminés par des tangentes à la couronne intérieure.

On translate tous ces secteurs à l'origine et on voit que cette aire est à peu près égale à l'aire du cercle dont le rayon est la longueur r de la corde. À la limite quand les secteurs deviennent infiniment petits on a égalité.

Ce qui est remarquable c'est que le résultat ne dépend pas des rayons R_1 et R_2 des deux cercles, mais seulement de la longueur

de la corde tangente au cercle intérieur. On peut donc trouver toute une famille de couronnes ayant la même aire, une pour chaque valeur de R_1 , la première étant le cercle de rayon r , ($R_1 = 0$) et, pour chaque valeur de R_1 , on prend $R_2 = \sqrt{R_1^2 + r^2}$.

C'est là qu'on peut se mettre à réfléchir. Qu'a-t-on fait ? On s'est promené le long du cercle intérieur et, ce faisant, on a balayé avec un vecteur tangent d'une longueur fixe, r , une région en forme de couronne : cette couronne c'est le *balayage tangent*. Ensuite, on a ramené tous les vecteurs tangents à la même origine. Ce faisant, ces rayons ont balayé une région qu'on appellera *balayage translaté*, qui se trouve être un cercle de rayon r . Et on a conclu que l'aire de la couronne est égale à l'aire du cercle. Avec le langage introduit :

L'aire du balayage tangent est égale à l'aire du balayage translaté.

C'est la grande idée de Mamikon qui explore jusqu'où on peut pousser ce principe et le transforme en théorème dans une variété de contextes.

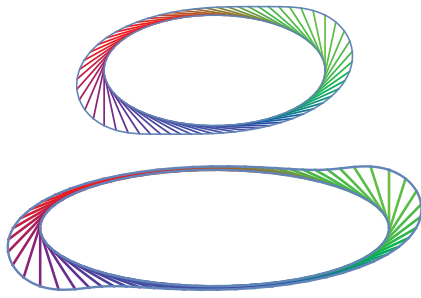
Question 1 :

Peut-on remplacer le cercle intérieur par une courbe plus compliquée ?

Oui ! Si la courbe intérieure est convexe. La condition de convexité garantit que la courbe décrite par l'extrémité du vecteur tangent entoure la courbe initiale. Le résultat de Mamikon est que l'aire balayée par le vecteur tangent est égale à l'aire du cercle de rayon r .

Voici deux exemples de couronnes balayées par un vecteur tangent de longueur 1 pour deux ellipses de demi-axes 2 et 1 pour la première, et 3 et 1 pour la seconde. Dans les deux cas, l'aire de la couronne est égale à π .

visuel

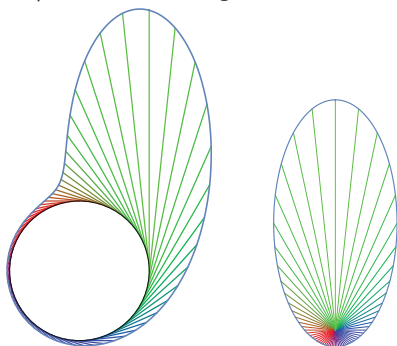


Question 2 :

Peut-on faire varier la longueur du vecteur tangent lorsqu'on parcourt la courbe ?

Oui ! On peut généraliser la méthode à ce cas. Rappelons-nous la démarche ci-dessus : on a remarqué que l'aire de la région en forme de couronne balayée par le vecteur tangent (le balayage tangent) a la même aire que celle du balayage translaté.

Ainsi, l'aire de la couronne de gauche est la même que l'aire de la région de droite.



Ici l'exemple a été construit de telle sorte que la figure de droite soit une ellipse de demi-axes 1 et 2, et donc d'aire 2π , ce qui donne que l'aire de la couronne de gauche est 2π . Sur la figure de gauche le cercle central est de rayon 1, mais on obtiendrait la même aire pour la couronne avec un cercle central d'un autre rayon.

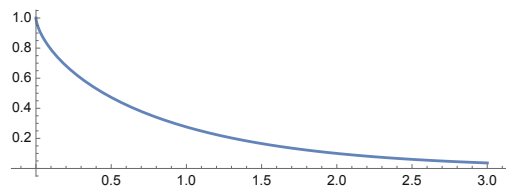
De plus, la courbe sur laquelle on promène un vecteur tangent n'a pas besoin d'être fermée. Voyons un exemple avec la tractrice.

Aire sous la tractrice

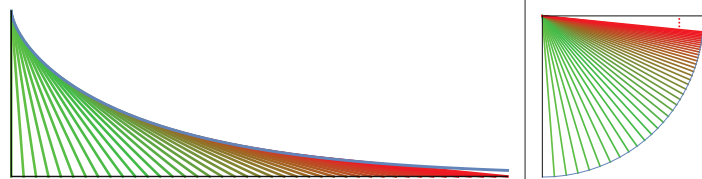
Prenons un point P partant de l'origine et se déplaçant sur l'axe des x à vitesse constante 1. Donc, à l'instant t , le point P est en $P_t = (t, 0)$. Soit Q , un point de position initiale $(0, 1)$ et dont la position est Q_t au temps t . La tractrice est la courbe décrite par Q_t de telle sorte que

- à tout instant, Q_t se dirige vers P_t ,
- le vecteur $\overrightarrow{Q_t P_t}$ est de longueur 1,

c'est-à-dire que Q poursuit P en se déplaçant à la vitesse 1.



On veut calculer l'aire sous la tractrice. Il n'existe pas de formule simple pour la courbe comme fonction de x , seulement des équations paramétriques obtenues en résolvant un système d'équations différentielles. Mais, avec le théorème de Mamikon, on peut se passer de ces équations. En effet, les vecteurs $\overrightarrow{Q_t P_t}$ sont des vecteurs tangents de longueur 1. Si on les translate tous au même point, le balayage translaté est simplement un quart de cercle de rayon 1.



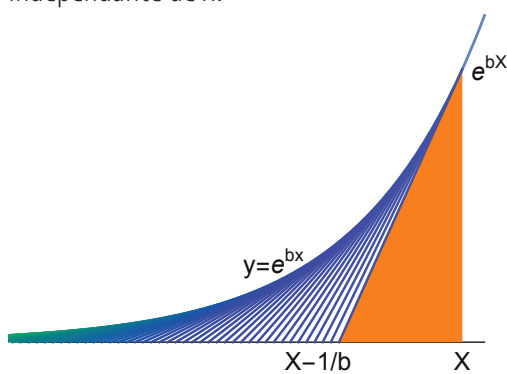
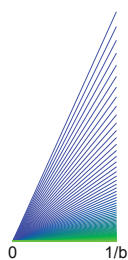
On voit bien que le quart de cercle serait complet si on prolongeait la tractrice jusqu'à l'infini. Donc, sans aucun calcul, on obtient que l'aire sous la tractrice est égale à $\pi/4$!

L'aire sous l'exponentielle

On veut calculer l'aire sous le graphe de la fonction $f(x) = be^{bx}$ entre $-\infty$ et X . La seule chose qu'on va utiliser est que

$$f'(x) = b f(x) = be^{bx}.$$

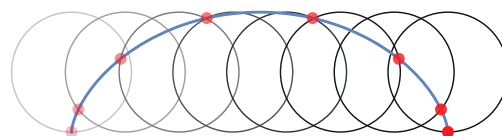
Regardons la tangente à la courbe en un point $(x, f(x))$. Le point est à la hauteur e^{bx} et la pente est $b e^{bx}$. Donc, la tangente coupe l'axe horizontal à une distance $1/b$ à gauche de x . (Cette longueur $1/b$ est appelée la *sous-tangente*.) Ce qui est remarquable, c'est que la longueur de la sous-tangente est indépendante de x !



L'aire sous la courbe au-dessus de $]-\infty, X]$ est l'aire balayée par les segments de tangente entre l'axe horizontal et la courbe à laquelle on ajoute l'aire du triangle orange. Par le théorème de Mamikon, l'aire balayée par les segments de tangente est la même que l'aire du balayage translaté, et cette aire est exactement la même que celle du triangle orange. Donc, sans calculs autres que la longueur de la sous-tangente, on obtient que l'aire sous la courbe est égale à deux fois l'aire du triangle orange, soit $\frac{1}{b} e^{bX}$.

L'aire sous la cycloïde

La cycloïde est la courbe dessinée par un point marqué d'un cercle qui roule sans glisser le long d'une droite. En pratique, prenons un cercle de rayon 1, dont le centre se déplace vers la droite, le long de la droite $y=1$, à la vitesse 1 en partant de $(0,1)$. La cycloïde est la courbe décrite par le point $(0,0)$. On notera par P_t sa position au temps t .



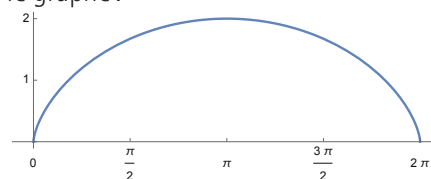
Lorsque le centre du cercle est en $(t, 1)$, la roue a parcouru une longueur de t , qui est donc la longueur de l'arc de cercle entre le point de tangence de la roue, $X_t = (t, 0)$ au temps t et le point P_t (voir aussi figure page 39). Donc, la roue a tourné d'un angle $-t$. Pour $t=0$ le point marqué est en $P_0 = (0, 0)$, ce qui correspond à l'angle $-\pi/2$. Donc, au temps t , le point P_t est en $P_t = (\cos(-t - \frac{\pi}{2}), \sin(-t - \frac{\pi}{2})) + (t, 1)$.

En tirant parti des identités trigonométriques $\cos(-t - \frac{\pi}{2}) = -\sin t$ et $\sin(-t - \frac{\pi}{2}) = -\cos t$, d'où les équations paramétriques pour P_t :

$$x(t) = t - \sin t,$$

$$y(t) = 1 - \cos t.$$

et le graphe :

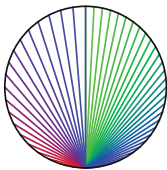


On veut calculer l'aire A sous la courbe. Remarquons que la courbe est inscrite dans le rectangle $[0, 2\pi] \times [0, 2]$, dont l'aire est 4π . La méthode de Mamikon va permettre de montrer que l'aire au-dessus de la courbe est égale à l'aire d'un cercle de rayon 1, soit π , ce qui donnera $A = 3\pi$.

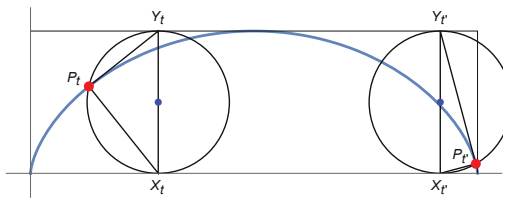
Pour cela, on va regarder cette zone comme un balayage tangent.



Et on verra qu'en ramenant tous les segments tangents à une même origine, ce sont les cordes d'un cercle passant par un point.



Pourquoi l'argument fonctionne-t-il?



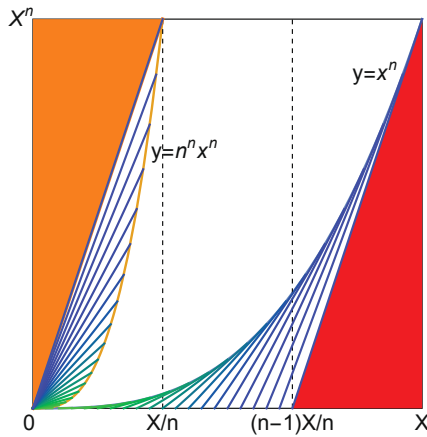
Regardons la figure, et le point marqué P_t sur le cercle au temps t . Le cercle est tangent à l'axe x au point $X_t = (t, 0)$. On voudrait montrer que la tangente à la cycloïde en P_t coupe le haut du rectangle à la verticale de X_t , soit au point $Y_t = (t, 2)$. Ceci signifiera que l'angle $\angle X_t P_t Y_t$ est droit (parce qu'inscrit dans un demi-cercle) et que la corde $P_t Y_t$ balaie le demi-disque. On ramènera ensuite tous les points P_t à l'origine, ce qui terminera la preuve. Donc, il reste seulement à montrer que

la tangente à la cycloïde en P_t coupe le haut du rectangle en $Y_t = (t, 2)$.

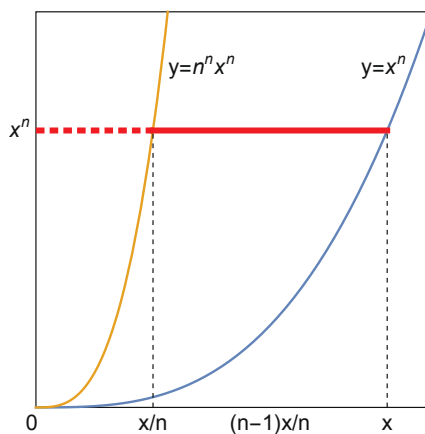
Comme le vecteur $\vec{P_t Y_t}$ est perpendiculaire au vecteur $\vec{X_t P_t}$, il suffit de montrer que le vecteur tangent à la cycloïde en P_t est perpendiculaire à $\vec{X_t P_t} = (-\sin t, 1 - \cos t)$, ce qui est le cas puisque $P_t' = (1 - \cos t, \sin t)$.

L'aire sous la courbe $y = x^n$ au-dessus de $[0, X]$

Sans connaître l'intégration il est possible de montrer que cette aire, A vaut $A = x^{n+1}/(n+1)$. Pour cela, on regarde les graphes des deux courbes $y = x^n$ et $y = n^n x^n$ dans le rectangle $[0, X] \times [0, X^n]$ (le dessin correspond à $n = 3$).

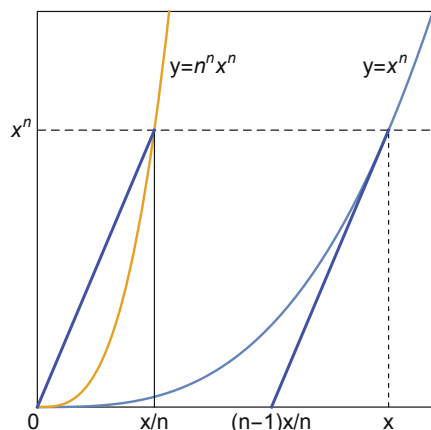


Remarquons que si on prend des tranches horizontales (en rouge sur la figure ci-dessous) la longueur de la portion de coupe au-dessus de $y = x^n$ vaut n fois la longueur de la portion de coupe au-dessus de $y = n^n x^n$ (la partie pointillée de la tranche rouge). Donc dans le rectangle $[0, X] \times [0, X^n]$, l'aire au-dessus de $y = x^n$ vaut n fois l'aire au-dessus de $y = n^n x^n$.



Par suite, l'aire entre les deux courbes vaut $(n - 1)$ fois l'aire au-dessus de $y = n^n x^n$. On va montrer par la méthode de Mamikon que l'aire au-dessus de $y = n^n x^n$ est égale à

l'aire A sous la courbe $y = x^n$. Ainsi, l'aire du rectangle $[0, X] \times [0, X^n]$ sera égale à $(n+1)$ fois l'aire sous la courbe $y = x^n$. Comme l'aire du rectangle est X^{n+1} , l'aire sous la courbe vaudra bien $A = X^{n+1}/(n+1)$.



Pour terminer la preuve, il suffit de montrer que dans la figure en haut à droite de la page 39, l'aire balayée au-dessus de $y = n^n x^n$ est égale à l'aire balayée sous $y = x^n$. Cette dernière est balayée par les segments tangents entre la courbe et l'axe horizontal. Par la méthode de Mamikon, cette aire est égale à l'aire du balayage tangent. Voyons que le balayage tangent est précisément la partie balayée au-dessus de $y = n^n x^n$. Regardons les deux segments se terminant à la hauteur x^n . Ce sont les segments bleus sur la figure : ils ont tous deux la même pente soit $n x^{n-1}$. Donc, le segment de gauche est bien le translaté à l'origine du segment de droite, ce qui termine la preuve.

Et si la courbe n'est pas convexe?

Jusqu'à présent on a vu des exemples où la courbe est convexe, ce qui a pour résultat que tous les vecteurs tangents sont du même côté de la courbe. Mais, ce n'est plus le cas si la courbe n'est pas convexe. Le théorème de Mamikon se généralise à ce cas, mais à condition de donner un signe à l'aire : elle est positive quand elle est d'un côté de la courbe et négative de l'autre. On a encore que l'aire (signée) balayée par un vecteur tangent le long d'une courbe est égale à l'aire (signée) du balayage translaté.

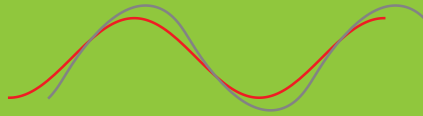
Mamikon A. Mnatsakanian (1942- 2021)

Mamikon A. Mnatsakanian, appelé simplement Mamikon, a inventé la méthode alors qu'il étudiait au premier cycle à l'université d'Erevan. Il a montré sa méthode à des mathématiciens soviétiques qui n'ont pas cru qu'une méthode aussi élémentaire pouvait fonctionner. Mamikon a ensuite fait un doctorat en physique pour devenir professeur d'astrophysique à l'université d'Erevan, et expert international en théorie du transfert radiatif.

Mamikon s'est retrouvé coincé aux États-Unis sans visa lors de la chute de l'Union soviétique. Avec l'aide de mathématiciens américains qui ont découvert ses méthodes, il a obtenu le statut d'étranger aux capacités extraordinaires. Ce fut le début d'une longue collaboration avec le mathématicien américain Tom Apostol. En Californie, il a développé son calcul intégral visuel comme outil d'enseignement, et cet outil a reçu des prix et un accueil enthousiaste dans les écoles et universités californiennes.

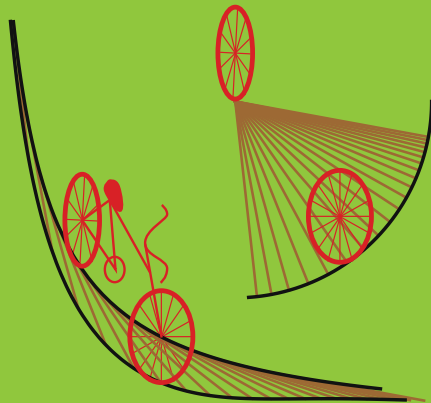
Les traces laissées par les roues d'une bicyclette

Si vous vous promenez à vélo et que vous n'allez pas en ligne droite, vos deux roues laissent des traces distinctes. Celles-ci se coupent si vous slalomez.

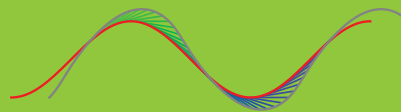


Au vu de ces traces, pouvez-vous dire si la bicyclette allait vers la gauche ou vers la droite?

Le vecteur \vec{v} joignant les points de contact des deux roues avec le sol est toujours tangent à la trace de la roue arrière : ce vecteur est parallèle au vecteur joignant vos deux essieux et de même longueur. Il serait de longueur constante pour une potence avant verticale. Comme la potence avant a un petit angle avec la verticale pour éviter que le vélo ne vire trop brusquement, le vecteur \vec{v} est un peu plus court quand vous tournez, mais à l'œil c'est presque négligeable.



Cela veut dire qu'il est possible, en regardant des traces de vélo, non seulement de distinguer la trace de la roue avant de celle de la roue arrière, mais même de déduire dans quel sens se déplaçait le vélo! En effet, il n'y a qu'une manière de dessiner un balayage tangent de longueur presque constante entre les deux traces de roues.



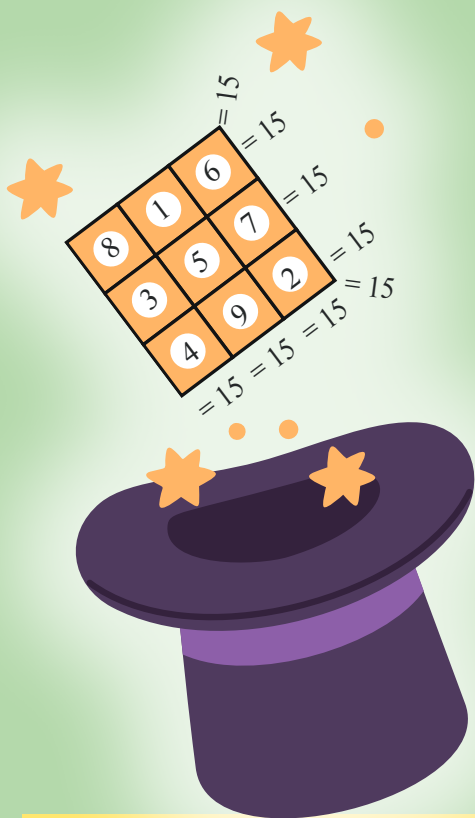
Sur la figure, ce balayage est tangent à la courbe rouge. La roue arrière a donc laissé la trace rouge, et la roue avant, la trace grise. La bicyclette se déplaçait vers la droite.

On trouve dans la littérature que l'aire entre les deux traces des deux roues est balayée par le vecteur \vec{v} . Cela n'est pas tout à fait exact, il y a de petites erreurs au voisinage des points d'intersection des traces des roues. Le balayage tangent a une largeur non nulle près de ces points d'intersection. Donc, le théorème de Mamikon ne permet qu'un calcul approximatif de l'aire entre deux intersections des traces de roues. La prochaine fois que vous verrez des traces de vélo, amusez-vous à déterminer laquelle est la trace de la roue arrière et dans quel sens se déplaçait le vélo!

Un carré vraiment magique

Rubrique des Paradoxes

Jean-Paul Delahaye
Université de Lille



Tout le monde connaît les carrés magiques ! En voici un : Neuf nombres sont inscrits sur des pions qui sont rangés dans un carré composé de neuf cases. Il y a un pion par case. Les pions forment huit alignements de trois pions : trois alignements horizontaux, trois alignements verticaux et deux alignements en diagonale. Chacun de ces alignements donne un total de 15 :

8	1	6	= 15
3	5	7	= 15
4	9	2	= 15
= 15	= 15	= 15	= 15

Le problème posé est : comment déplacer les nombres de manière qu'il y ait à nouveau un nombre dans chacune des neuf cases du tableau, et que les huit alignements obtenus de trois nombres donnent, cette fois, chacun un total de 16 ? Cela semble impossible, car il ne va pas y avoir assez de points sur les pions pour passer de 15 à 16. Aussi paradoxal que cela paraisse, le problème possède une solution !

Les carrés magiques de Jérôme Cardan

Lune

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Sommes : 15

Mercure

4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

Sommes : 34

Vénus

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Sommes : 65

Soleil

6	32	3	34	35	1
7	11	27	28	8	30
19	14	16	15	23	24
18	20	22	21	17	13
25	29	10	9	26	12
36	5	33	4	2	31

Sommes : 111

Mars

22	47	16	41	10	35	4
5	23	48	17	42	11	29
30	6	24	49	18	36	12
13	31	7	25	43	19	37
38	14	32	1	26	44	20
21	39	8	33	2	27	45
46	15	40	9	34	3	28

Sommes : 175

Jupiter

8	58	59	5	4	62	63	1
49	15	14	52	53	11	10	56
41	23	22	44	45	19	18	48
32	34	35	29	28	38	39	25
40	26	27	37	36	30	31	33
17	47	46	20	21	43	42	24
9	55	54	12	13	51	50	16
64	2	3	61	60	6	7	57

Sommes : 260

Saturne

37	78	29	70	21	62	13	54	5
6	38	79	30	71	22	63	14	46
47	7	39	80	31	72	23	55	15
16	48	8	40	81	32	64	24	56
57	17	49	9	41	73	33	65	25
26	58	18	50	1	42	74	34	66
67	27	59	10	51	2	43	75	35
36	68	19	60	11	52	3	44	76
77	28	69	20	61	12	53	4	45

Sommes : 369

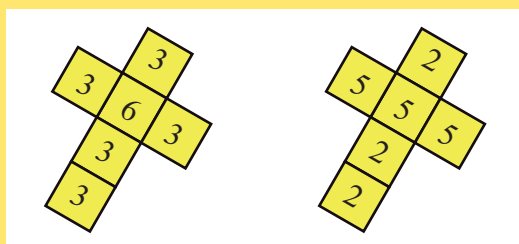
Solution du paradoxe précédent

Le lancer des dés

Julien propose un pari à Alain. « Voici deux dés A et B. Ils possèdent la propriété suivante : en les lançant simultanément, le dé A gagne contre le dé B dans précisément 21 des 36 cas possibles, soit avec une probabilité de 58,33 %.

Les faces de A portent respectivement les numéros 6, 3, 3, 3, 3 et 3. Les faces de B portent les numéros 5, 5, 5, 2, 2, 2. Le dé A gagne quand il obtient 6 – il y a 6 cas sur 36 de ce type – ou quand il obtient 3 et que B obtient 2 – il y a 15 cas sur 36 de ce type – ; le dé A gagne donc dans 21 cas sur 36. Ces dés à 6 faces ne sont pas truqués, chaque face tombe avec la probabilité $1/6$. Nous engagerons chacun 100 euros. Tu prendras le dé que tu voudras et je prendrai l'autre. Ensuite, nous lancerons chacun notre dé deux fois de suite. Tu feras la somme des résultats des deux lancers de ton dé. Je ferai la somme des résultats des deux lancers de mon dé. Celui dont le total sera le plus élevé gagnera et emportera les 200 euros. » Alain réfléchit un moment. Il raisonne ainsi : « Le dé A est plus fort que le dé B, puisqu'il gagne dans 58,33% des lancers et j'ai vérifié le raisonnement, c'est juste. En le lançant deux fois de suite, cela augmente encore son avantage sur le dé B et les chances qu'il a donc de gagner. Le pari que me propose Julien est stupide. Je vais l'accepter et je choisirai le dé A qui m'assurera au moins 58,33 % de chances de gagner ».

Alain accepte le pari et choisit le dé A. Julien s'en réjouit et dit : « C'est parfait, les chances sont de mon côté, j'ai plus de 59 % de chances de gagner ». N'est-ce pas paradoxal? Comment expliquer cette affirmation de Julien?



Solution

Lorsqu'on effectue un lancer double :

- le dé A obtient 12 (1 fois) ou 9 (10 fois) ou 6 (25 fois)
- le dé B obtient 10 (9 fois) ou 7 (18 fois) ou 4 (9 fois).

Lorsqu'on lancera deux fois A et deux fois B (ce qui fait $36 \times 36 = 1296$ cas possibles), B gagnera s'il obtient 10 et que A obtient 9 ($10 \times 9 = 90$ fois), ou s'il obtient 10 et que A obtient 6 ($9 \times 25 = 225$ fois), ou encore s'il obtient 7 et que A obtient 6 ($18 \times 25 = 450$ fois). Le dé B gagnera donc $90 + 225 + 450 = 765$ fois sur les 1296 cas possibles qui sont équiprobables puisque les dés ne sont pas truqués.

Le dé B gagnera donc dans 765 cas sur 1296, soit dans 0,59027 % des cas.

Julien a raison de se réjouir, lancer chaque dé deux fois transforme le net avantage du dé A en un désavantage aussi net. Cela est très étonnant, le dé A qui gagnait contre B dans le cas de lancers simples est battu par B dans le cas de lancers doubles ! C'est un exemple de situation où notre intuition nous conduit à des conclusions fausses : il n'est pas vrai que gagner dans le cas de lancers simples assure de gagner dans le cas de lancers doubles. Personne ne réussira jamais à démontrer que « gagner avec des lancers simples » implique « gagner avec des lancers doubles », car l'exemple constitué des dés A et B démontre de manière définitive que ce n'est pas toujours vrai !



Section problèmes

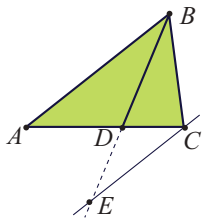
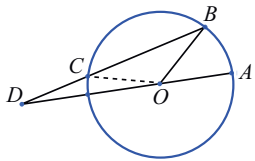
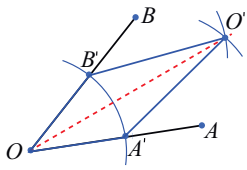


Figure 1:
Preuve du théorème de la bissectrice :
 BD est la bissectrice intérieure de l'angle ABC , $AB \parallel EC$.

Une trisection par zigonnage

1. Bissection de l'angle :

Étant donné l'angle AOB , montrer que la droite OO' en est la bissectrice. (Voir la description détaillée de la construction de cette figure à la p.6 du texte.)

2. Trisection de l'angle :

Étant donné l'angle AOB , on utilise un « zigonneur » (l'emploi de cet outil est décrit à la p. 7) de sorte à obtenir la droite BD passant par le point C , avec CD de longueur égale au rayon r du cercle.

Montrer que l'angle ADB vaut le tiers de l'angle AOB .

Tuyau : L'angle BCO est un angle extérieur au triangle DCO .

Coordonnées bipolaires

1. Preuve du théorème de la bissectrice.

Démontrez le théorème de la bissectrice et sa réciproque en vous aidant de la figure 1, où BD est la bissectrice intérieure de l'angle ABC : $\angle ABD = \angle CBD$. On a tracé la parallèle à AB passant par C , et appelé E son point d'intersection avec la droite BD . Pour la bissectrice extérieure, utilisez la figure 2.

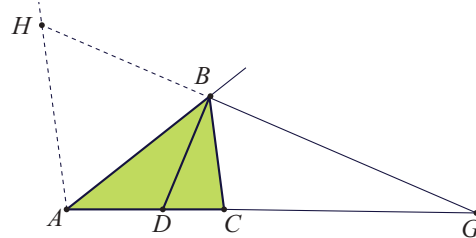
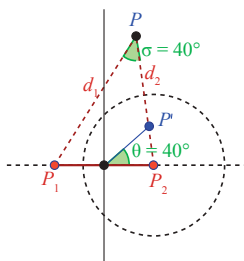


Figure 2:
Preuve du théorème de la bissectrice :
 BG est la bissectrice extérieure de l'angle ABC , $AH \parallel CB$.

2. Quelle inversion ?

Déterminez le centre et le rayon du cercle de l'inversion qui transforme la grille bipolaire de foyers $P_1(-a, 0)$ et $P_2(a, 0)$ en grille polaire. De plus, montrez que la coordonnée bipolaire σ du point P est égale à la coordonnée polaire θ de P' , l'image de P .



Perdu en forêt

1. Dans l'article, on a vu que pour une forêt rectangulaire de largeur 1, si la forêt est grosse, alors le chemin optimal est la ligne droite. Si la forêt est étroite et son diamètre est plus grand ou égal à longueur du chemin de Zalgaller, soit environ 2,2783, alors c'est le chemin de Zalgaller.

Trouvez toutes les longueurs de rectangle pour lesquels l'article n'a pas présenté de solution optimale.

2. Démontrez, pour tout naturel n , qu'une forêt en forme d'un polygone régulier à n côtés est une grosse forêt.

Cavalier contre roi

On considère un (a, b) -cavalier qui se déplace comme décrit dans l'article.

1. Montrer que si $a+b$ est pair, alors le cavalier ne peut atteindre que les cases d'une seule couleur.

2. Montrer que si a et b ne sont pas premiers entre eux, le cavalier ne peut atteindre toutes les cases de l'échiquier.

3. Montrer que si a et b sont premiers entre eux et si $a + b$ est impair, le cavalier peut atteindre toutes les cases.

Indication : Si $\text{pgcd}(a, b) = 1$, le théorème de Bézout garantit l'existence d'entiers x, y tels que $ax + by = 1$. En combinant les coups

$$(\pm a, b) + (\pm a, -b) = (\pm 2a, 0),$$

$$(\pm b, a) + (\pm b, -a) = (\pm 2b, 0),$$

on peut atteindre la case $(\pm 2(ax + y), 0) = (\pm 2, 0)$, et par symétrie $(0, \pm 2)$. On obtient ainsi toutes les cases $(2x, 2y)$.

Si a est impair et b pair (ou l'inverse), alors $(1 - a, -b)$ est de la forme $(2x, 2y)$, et un coup de type (a, b) permet d'atteindre $(1, 0)$ (et $(0, 1)$ par symétrie), d'où l'on peut combiner les déplacements pour atteindre toute case (x, y) à coordonnées entières.

Pour en savoir plus!

Accro-flashes

Lanternes d'Outremont et crème glacée

- https://ahmorales.math.uqam.ca/Animations/permuta_glace.html
- https://ahmorales.math.uqam.ca/Animations/truncated_octahedron_slider.html
- http://ahmorales.math.uqam.ca/Articles/trunc_oct_cut.pdf

Une trisection par zigonnage

- La trisection de l'angle dont il est ici question a été introduite par Archimède à la proposition 8 de son *Livre des lemmes*. La preuve originale d'Archimède — voir Bartel L. van der Waerden, *Science Awakening*, Oxford University Press, 1961, pp. 225-226 — diffère légèrement de celle présentée ici, mais les idées fondamentales sont les mêmes. La version du présent texte se retrouve dans le livre *Episodes from the Early History of Mathematics* d'Asger Aaboe (Mathematical Association of America, 1964, pp. 85-86).
- La méthode utilisée par Archimède est parfois appelée « *construction par neusis* », ce mot grec renvoyant à l'idée d'inclinaison ou de pente. Il s'agit alors de placer un segment de longueur donnée avec ses extrémités sur deux courbes, et de sorte que son prolongement passe par un point fixe.
- On doit la résolution du problème de la trisection de l'angle (ainsi que celui de la duplication du cube) au mathématicien français Pierre-Laurent Wantzel, professeur à l'École des Ponts et Chaussées. Voir son texte « Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas », paru en 1837 et disponible sur NUMDAM. https://www.numdam.org/item/JMPA_1837_1_2_366_0/
- Le québécoisisme *zigonner* est un terme polysémique renvoyant notamment à l'idée de faire quelque chose à coups répétés, souvent dans une action par tâtonnements. Dans le même registre se retrouvent les mots *zigonnage* et *zigonneur*. Voir à ce propos le *Dictionnaire québécois d'aujourd'hui*, Le Robert (DicoRobert, 1992, p. 1268), ou encore le *Dictionnaire historique du français québécois*, Trésor de la langue française au Québec (2^e éd., Université Laval, 2023). <https://www.dhfg.org/article/zigonner-ou-zigoner>

Applications des mathématiques

Le problème du sofa

- Sean Bailly, *Le problème du sofa et celui du déménageur de piano enfin résolu*, Pour la Science No 568, 8 février 2025. <https://www.pourlascience.fr/sd/mathematiques/le-probleme-du-sofa-et-celui-du-demenageur-de-piano-enfin-resolu-27244.php>
- *Problème du sofa*, Wikipédia, https://fr.wikipedia.org/wiki/Problème_du_sofa

Des cercles d'Apollonius à l'électromagnétisme: les coordonnées bipolaires

- Vidéo GA III6 *Inversion par rapport à un cercle* (2020), *Maths sous Dopamine*. Excellente vidéo qui montre que les images des droites et des cercles sont des droites et des cercles (et donc que toute construction à la règle et au compas peut être réalisée au compas uniquement: théorème de Mohr-Mascheroni de 1672). « Faire de la géométrie sans voir l'inversion, c'est un peu comme aller à Marseille sans voir la mer, à Paris sans voir la tour Eiffel, à New York sans voir la statue de la Liberté... »
<https://www.youtube.com/watch?v=G26IKP3b5b4>
- Animation Desmos illustrant différents systèmes de coordonnées orthogonales en deux dimensions, dont les coordonnées bipolaires : <https://www.desmos.com/calculator/m5gmtg4n1d?lang=fr>
- Edmund Halley, mieux connu pour la comète qui porte son nom, publia en 1710 une édition du célèbre ouvrage *Les Coniques d'Apollonius*. Halley y présente des traductions du grec au latin déjà existantes des livres I à IV, sa propre traduction en latin des versions arabes des livres V à VII, et sa reconstruction du livre VIII basée sur un texte de Pappus. On peut consulter en ligne un exemplaire d'origine et admirer la beauté des figures.
https://archive.org/details/bub_gb_6N__e_V4xbAC/page/n5/mode/2up

Calcul intégral visuel

- *Calcul intégral visuel*, Wikipedia: https://fr.wikipedia.org/wiki/Calcul_int%C3%A9gral_visuel
- *Subtangents — An Aid to Visual Calculus*, Tom M. Apostol et Mamikon A. Mnatsakanian, *The American Mathematical Monthly* 109 (2002), no 6, pp. 525-533.

Accromath est une publication de l'Institut des sciences mathématiques (ISM) et du Centre de recherches mathématiques (CRM). La revue s'adresse surtout aux étudiantes et étudiants d'école secondaire et de cégep ainsi qu'à leurs enseignantes et enseignants.

ISM

Institut des sciences mathématiques

L'Institut des sciences mathématiques est une institution unique dédiée à la promotion et à la coordination de l'enseignement et de la recherche en sciences mathématiques au Québec. En réunissant huit départements de mathématiques des universités québécoises (Concordia, Université Laval, McGill, Université de Montréal, UQAM, UQTR, Université de Sherbrooke, Bishop's), l'Institut rassemble un grand bassin d'expertises en recherche et en enseignement des mathématiques. L'Institut anime de nombreuses activités scientifiques, dont des séminaires de recherche et des colloques à l'intention des professeurs et des étudiants avancés, ainsi que des conférences de vulgarisation données dans les cégeps. Il offre également plusieurs programmes de bourses d'excellence.

L'ISM est financé par le Ministère de l'Enseignement supérieur et par ses huit universités membres.

CRM

CENTRE
DE RECHERCHES
MATHÉMATIQUES

Le Centre de recherches mathématiques est un centre national pour la recherche fondamentale en mathématiques et ses applications. Les scientifiques du CRM comptent plus d'une centaine de membres réguliers et de stagiaires postdoctoraux. Lieu privilégié de rencontre, le Centre est l'hôte chaque année de nombreux visiteurs et d'ateliers de recherche internationaux.

Les activités scientifiques du CRM comportent deux volets principaux : les projets de recherche qu'entreprennent ses laboratoires, et les activités thématiques organisées à l'échelle internationale. Ces dernières, ouvertes à tous les domaines, impliquent des chercheurs du CRM et d'autres universités. Afin d'assurer une meilleure diffusion des résultats de recherches de ses collaborateurs, le CRM a lancé en 1989 un programme de publications en collaboration avec l'American Mathematical Society et avec Springer.

Le CRM est principalement financé par le CRSNG (Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada), le FRQ (Fonds de recherche du Québec), l'Université de Montréal, et par six autres universités au Québec et en Ontario.

