

Été-automne 2025

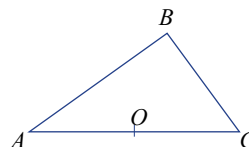
Solutions

Points, droites et plans (suite)

- Par sa méthode finale, Cantor associe les nombres en tenant compte des contraintes suivantes :
 - Compléter , avant de scinder, les nombres rationnels, développements infinis et périodiques.
 - Scinder les nombres de telle sorte qu'aucune des coupures ne finissent par un 9.
- 0,666 666... est, à la limite, égal à $6/9$. On lui fait donc correspondre $(6/9; 0)$.
 - 0,088 888... est, à la limite, égal à $8/90$. On lui fait donc correspondre $(8/90; 0)$.
 - 0,599 999... est, à la limite, égal à 0,6 ou $3/5$. On lui fait donc correspondre $(3/5; 0)$.
 - 0,495 959 5... En s'assurant que les coupures ne sont pas précédées d'un 9, on a donc, il faut donc couper de la façon suivante 0,495 9595... Après avoir scindé, on a $(0,49595... \quad 0,9595...)$. Le point correspondant est donc $(491/990; 95/99)$.
 - 0,793 929 095 909 890 979 96... En s'assurant que les coupures ne sont pas précédées d'un 9, il faut donc couper de la façon suivante 0,793 929 095 909 890 97 996... On lui fait correspondre $(0,792959897...; 0,93909090996...)$
 - 0,194 919 599 296 995 939 6... En s'assurant que les coupures ne sont pas précédées d'un 9, on a donc, il faut donc couper de la façon suivante 0,194 919 599 296 995 939 6... On lui fait correspondre $(0,19199299596...; 0,94959693...)$.

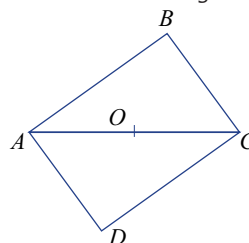
Dialogue géométrico-algébrique à saveur hippocratique

- Étant donné le triangle rectangle ABC , considérons le point O , milieu de son hypoténuse AC .



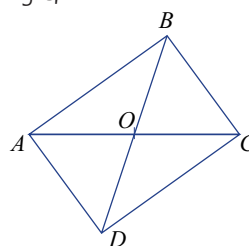
Il s'agit donc de montrer que le segment OB est de même longueur que les deux segments OA et OC .

En considérant l'image du triangle par une rotation d'un demi-tour autour du point O , on obtient ainsi le rectangle $ABCD$.



(À noter que les deux angles de sommets A et C du triangle initial étant complémentaires, il est clair que le quadrilatère $ABCD$ est bel et bien un rectangle.)

Considérant les deux diagonales AC et BD de ce rectangle,



on sait donc que celles-ci se coupent en leur milieu (car le rectangle est un parallélogramme). Le point O est donc aussi le milieu de BD . Il est de plus facile (*n'est-ce pas?*) de se convaincre que les deux diagonales d'un rectangle sont forcément congruentes, de sorte qu'on a bien $OB = OA = OC$, tel que demandé.

b) Soit donc le cercle de centre O et passant par les points A et C . On sait de la partie a) que ce cercle passe aussi par le sommet B du triangle, car OB est un rayon du cercle. Autrement dit, il s'agit du cercle circonscrit au triangle ABC .

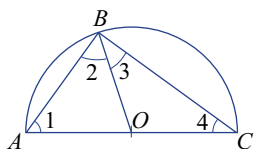
2. Rappelons qu'on appelle *angle inscrit dans un cercle* un angle dont le sommet appartient au cercle et dont les deux côtés sont des cordes du cercle. À noter qu'à un angle inscrit donné correspond un *angle au centre*, dont le sommet est le centre du cercle et qui intercepte sur le cercle le même arc que l'angle inscrit.

Un *angle inscrit dans un demi-cercle* a son sommet sur le demi-cercle et passe par les extrémités du diamètre le délimitant. Dit autrement, il s'agit d'un angle inscrit dans un cercle et qui sous-tend un diamètre. L'angle au centre correspondant est donc un angle plat.

a) Il faut montrer que tout angle inscrit dans un demi-cercle est droit.

Étant donné un demi-cercle de diamètre AC et de centre O , soit l'angle ABC de sommet B et inscrit dans ce demi-cercle. Il s'agit d'établir que l'angle ABC est forcément droit.

À cet effet, en traçant le rayon OB , on détermine les triangles AOB et COB , qui sont tous deux isocèles.



Il s'ensuit donc que

$$\angle 1 \cong \angle 2 \text{ et } \angle 3 \cong \angle 4.$$

Mais comme ces quatre angles, pris ensemble, correspondent aux angles du triangle ABC , leur somme vaut donc 180° , de sorte que

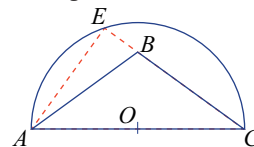
$$2(m\angle 2 + m\angle 3) = 180^\circ.$$

On en conclut que l'angle inscrit ABC (formé des angles numérotés 2 et 3 sur la figure) est droit.

Note 1 : Ce résultat peut également s'exprimer comme suit : *si un triangle est inscrit dans un cercle de sorte que l'un de ses côtés est un diamètre, alors ce triangle est rectangle (et le côté en question est son hypoténuse).*

b) Étant donné le demi-cercle de diamètre AC et l'angle ABC dont le sommet B est situé cette fois à l'intérieur du demi-cercle, prolongeons, par exemple, le côté BC de sorte à obtenir les deux cordes EA et EC .

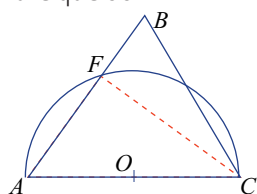
L'angle AEC étant un angle inscrit dans le demi-cercle en cause, on sait donc, par la partie a), qu'il est droit. Mais alors, portant notre attention sur le triangle AEB , on voit que l'angle ABC vaut plus que 90° , car sa mesure est la somme de celles des angles AEB et EAB .



Note 2 : On utilise ici le résultat élémentaire affirmant que *la mesure d'un angle extérieur d'un triangle est égale à la somme des mesures de deux angles intérieurs qui ne lui sont pas adjacents*. Ce résultat peut être vu comme découlant simplement de la somme des angles d'un triangle conjuguée avec le fait qu'un angle extérieur est le supplémentaire de l'angle du triangle qui lui est adjacent.

À noter que ce fait se retrouve à la proposition 32 du Livre I des *Éléments* d'Euclide, où il est démontré comme découlant de l'égalité de certains des angles déterminés par deux droites parallèles coupées par une sécante (on s'appuie alors sur la construction dans laquelle on trace, par le sommet de l'angle extérieur, une parallèle au troisième côté du triangle). Et Euclide en tire comme conséquence le fait que la somme des angles d'un triangle est égale à « deux droits », c'est-à-dire 180° .

- c) Étant donné le demi-cercle de diamètre AC et l'angle ABC dont le sommet B est maintenant situé à l'extérieur du demi-cercle déterminé par AC , considérons, par exemple, le point F obtenu par l'intersection de AB avec le demi-cercle, et la corde FC qui en résulte. L'angle AFC étant un angle inscrit dans le demi-cercle en cause, on sait donc, par la partie a), qu'il est droit. Mais alors, portant notre attention sur le triangle FBC , on voit que la mesure de cet angle AFC vaut la somme de celles des angles FBC (c'est-à-dire ABC) et BCF . Il s'ensuit donc que l'angle ABC est moindre que 90° .



- d) Étant donné le triangle rectangle ABC , considérons le cercle ayant pour diamètre son hypoténuse AC . La question devient : où se trouve le sommet B de l'angle droit du triangle?

On va procéder par contradiction en supposant que le demi-cercle ne passe par le sommet de l'angle droit. Il s'agit de fait d'une double contradiction : on va en effet montrer qu'il est impossible que ce sommet soit ailleurs que sur le demi-cercle (que ce soit à l'intérieur ou à l'extérieur du demi-cercle).

En effet, si le sommet B était à l'intérieur du demi-cercle, on serait alors dans le cas de la figure de la partie b), de sorte que l'angle ABC serait plus grand qu'un angle droit — ce qui entre en contradiction avec l'hypothèse stipulant que le point B est le sommet de l'angle droit du triangle donné.

De même, le sommet B ne peut pas être à l'extérieur du demi-cercle, car sinon, comme à la figure de la partie c), l'angle ABC serait plus petit qu'un angle droit — ce qui entre à nouveau en contradiction avec l'hypothèse que B est le sommet de l'angle droit.

Comme ce sommet ne peut être ni à l'intérieur, ni à l'extérieur du demi-cercle, le seul cas possible est donc que B soit forcément

sur le demi-cercle.

Autrement dit, le cercle de diamètre AC est donc circonscrit au triangle ABC .

Note 3 : Les résultats des problèmes 2-a), b) et c) se retrouvent chez Euclide à la proposition III.31 de ses *Éléments*. Le cas de l'angle inscrit dans un demi-cercle y est énoncé tel quel. Quant aux parties b) et c), Euclide considère plutôt des angles ayant leur sommet sur un cercle et sous-tendant un arc respectivement plus grand ou plus petit qu'un demi-cercle.

À noter que le théorème sur l'angle inscrit dans un demi-cercle, comme c'est le cas pour beaucoup d'autres résultats figurant dans les *Éléments*, était connu bien avant Euclide — à ce sujet, voir par exemple Thomas L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, vol. 2: Livres III à IX, 2e édition, New York : Dover Publications Inc. (1956), p. 63.

Note 4 : Les trois résultats de ce problème peuvent être vus comme des cas particuliers de théorèmes généraux sur les angles dans un cercle — on n'est alors pas forcément en présence d'un diamètre (ou d'un demi-cercle, si on préfère).

- Un résultat plus général que l'énoncé 2-a) est le suivant :

tout angle inscrit dans un cercle (c'est-à-dire ayant son sommet sur le cercle) a pour mesure la moitié de l'arc qu'il sous-tend (ou si on préfère, la moitié de l'angle au centre correspondant).

(Dans le cas où l'arc intercepté par les côtés de l'angle est un demi-cercle, on est bel et bien en présence d'un angle droit.)

Ce résultat élémentaire fait l'objet de la proposition 20 du Livre III des *Éléments* d'Euclide. Il a déjà été traité dans *Accromath* — voir André Ross, « La position d'un navire. » *Accromath*, vol. 19(1) (2024) p. 8.

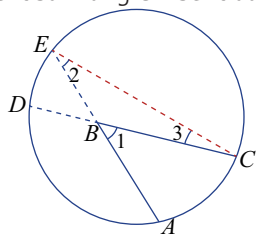
Pour l'établir, on considère d'abord le cas où l'un des côtés de l'angle est diamètre du cercle : un triangle isocèle surgit immédiatement, qui permet de mettre en œuvre le théorème sur l'angle extérieur d'un triangle auquel on a déjà fait appel plus haut. Le cas

d'un angle dont les côtés ne passent pas par le centre découle immédiatement de la situation précédente, en introduisant le diamètre passant par le sommet de l'angle. (Voir à ce propos la *Section problèmes* du texte d'Accromath cité plus haut).

- Le résultat du problème 2-b) se généralise comme suit :

tout angle dont le sommet est à l'intérieur d'un cercle a pour mesure la moitié de la somme des deux arcs qu'il sous-tend (on comprend ici qu'on prolonge les côtés de l'angle « derrière » le sommet de manière à intersecter un deuxième arc).

La figure suivante suggère comment ce résultat peut être obtenu à partir du théorème précédent sur l'angle inscrit dans un cercle.



En effet, partant de l'angle ABC intérieur au cercle (alias angle 1), on prolonge d'abord ses deux côtés (en traits hachurés) de manière à former l'angle DBE . Traçant ensuite le segment CE , on produit ainsi les deux angles inscrits 2 et 3. Considérant alors le triangle BEC , on voit que l'angle 1 est la somme des deux angles 2 et 3. Le résultat suit ainsi du théorème sur l'angle inscrit dont on vient tout juste de parler.

NB1 : On aurait pu aussi bien travailler à partir du segment AD .

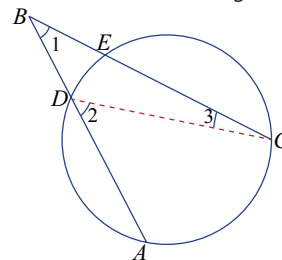
NB2 : Les angles ABC et DBE étant congruents (car opposés par le sommet), il n'est sans doute pas étonnant que la mesure de l'angle ABC corresponde à la moyenne des mesures des deux arcs AC et DE .

Revenant à l'énoncé original du problème 2-b), à noter qu'on sait maintenant que non seulement un angle intérieur dans un demi-cercle est plus grand qu'un angle droit, mais de plus on sait même précisément de combien il est plus grand. (Un commentaire analogue s'appliquerait au résultat qui suit.)

- Enfin le résultat 2-c) devient l'énoncé suivant :

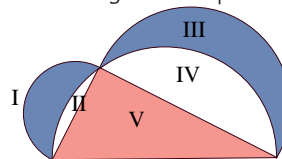
tout angle dont le sommet est à l'extérieur d'un cercle a pour mesure la moitié de la différence des deux arcs qu'il sous-tend.

Encore une fois, c'est à partir du théorème sur l'angle inscrit dans un cercle que l'on travaille, comme l'illustre la figure suivante.



Considérant par exemple le segment CD , on engendre ainsi les deux angles inscrits 2 et 3, de même que le triangle DBC , dont l'angle 2 est un angle extérieur.

- On sait – voir le problème #1-b) – qu'étant donné un triangle rectangle, le demi-cercle dont l'un des diamètres est l'hypoténuse passe bel et bien par le sommet de l'angle droit. Autrement dit, la figure suivante traduit correctement la situation géométrique en jeu.



On sait de plus – voir notamment la discussion du texte à propos des *figures semblables et semblablement construites* sur les trois côtés d'un triangle rectangle – que la somme des aires des deux demi-cercles sur les cathètes est égale à l'aire du demi-cercle sur l'hypoténuse. Représentant l'aire de chacune des cinq régions par un nombre en chiffres romains, on a donc que :

l'aire du demi-cercle sur le petit cathète est égale à $I + II$,

l'aire du demi-cercle sur le grand cathète est égale à $III + IV$,

l'aire du demi-cercle sur l'hypoténuse est égale à $II + IV + V$.

Il suit alors

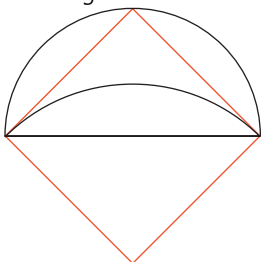
$$(I + II) + (III + IV) = II + IV + V.$$

On en tire immédiatement que

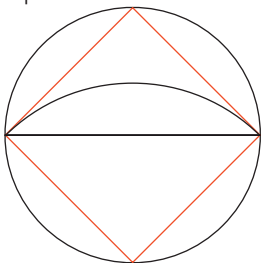
$$I + III = V,$$

ce qui montre que les deux lunules (en bleu), prises ensemble, ont même aire que le triangle rectangle donné (en rose).

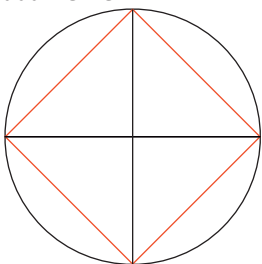
- 4, a) Nous partons de la figure suivante – tirée du texte (p. 11) – qui illustre l'illumination de madame É.A. à propos d'un certain carré. Ce premier carré est somme toute assez naturel, car il s'agit tout simplement de dupliquer le triangle rectangle isocèle de départ.



Et il va de soi que le demi-cercle qui englobe ce triangle se reproduit lui aussi au bas de la figure, donnant ainsi un premier cercle en jeu dans cette construction géométrique : c'est tout bonnement le cercle circonscrit au carré en question.



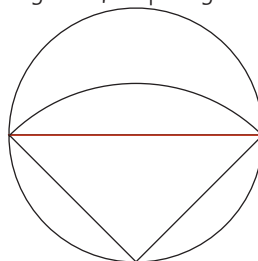
À noter que si on ajoute la deuxième diagonale de ce carré, on voit bien les quatre petits cornets (et boules) de crème glacée dont parle madame F.G.



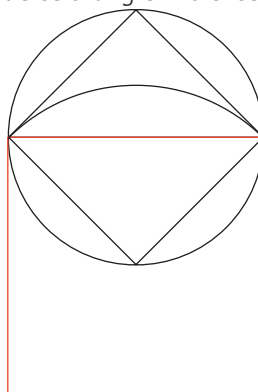
Pour le dire en termes plus précis, nous avons de fait ici un disque partagé en quatre quarts de disque, c'est-à-dire en quatre secteurs circulaires égaux, dont les angles sont de 90° .

Nous allons nous inspirer justement de ces cornets de crème glacée. Revenant main-

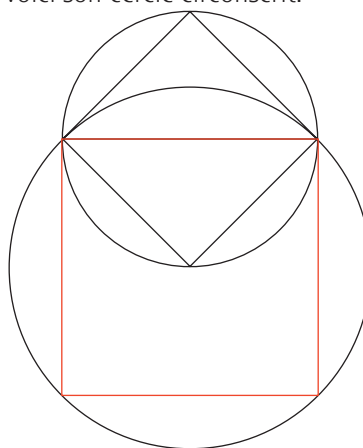
tenant à la figure du cercle circonscrit au triangle de départ (ce triangle étant omis par souci de simplicité sur la figure suivante), on peut ainsi y faire ressortir un nouveau cornet de crème glacée, de plus grande dimension.



On voit qu'il s'agit alors en quelque sorte de quadrupler ce cornet – c'est-à-dire ce secteur circulaire d'angle de 90° –, de manière à produire un grand carré et un grand cercle. Bref, pour le dire en termes plus mathématiques, alors qu'on considérait plus haut le carré dont le côté est le cathète du triangle rectangle isocèle de départ, on recherche maintenant le carré dont le côté est l'*hypoténuse* de ce triangle. Voici ce carré :



et voici son cercle circonscrit.



Nous laissons aux soins du lecteur de visualiser les quatre gros cornets de crème glacée (les quatre secteurs circulaires) que l'on peut

repérer au bas de la dernière figure. Et surtout les quatre grosses boules de crème glacée (les quatre segments circulaires), qui répliquent la courbe au bas de la lunule sous étude.

- b) La figure d'Hippocrate peut maintenant s'interpréter explicitement selon les propos de la proposition VI.31 d'Euclide.



NB : L'usage veut qu'on appelle *base* d'un segment circulaire la corde le définissant.

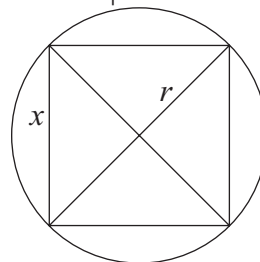
On y observe trois segments circulaires : les deux petits segments circulaires (verts) ayant pour base les cathètes du triangle rectangle, et le grand segment circulaire (orange) dont la base est l'hypoténuse de ce triangle. Notons qu'il y a ici deux carrés en jeu – voir la partie a) – et que ces carrés sont (bien sûr!) des figures semblables. De plus les trois segments circulaires sont obtenus par le truchement des cercles circonscrits à ces carrés, qui sont eux aussi semblables.

Il en résulte donc que les segments circulaires en jeu sont « semblables et semblablement décrits », tel que stipulé par Euclide. On en conclut alors, en vertu de VI.31, que les deux segments circulaires sur les cathètes, pris ensemble, ont même aire que le segment circulaire sur l'hypoténuse.

- c) Comme la discussion qui précède porte sur des cercles circonscrits à des carrés de côtés donnés, on s'intéresse donc d'abord au problème général de déterminer l'aire de segments circulaires répondant à une telle configuration.

Dans ce qui suit, afin de bien cibler les résultats recherchés, nous nous concentrons sur l'aire de l'un des quatre segments circulaires déterminés par la donnée d'un carré et de son cercle circonscrit. À noter qu'un tel segment circulaire correspond donc à un arc d'un quart de cercle – ou si l'on préfère, il s'agit d'un segment de cercle de 90°.

Soit donc un carré de côté x , et appelons r le rayon du cercle qui lui est circonscrit.



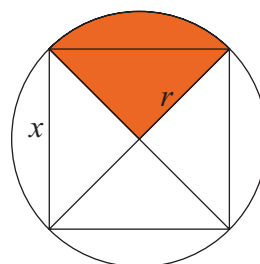
Nous concentrons sur le triangle au haut de la figure, notons tout d'abord que, comme les diagonales du carré correspondent à deux diamètres du cercle circonscrit se coupant à angle droit, on a donc

$$r^2 + r^2 = x^2, \text{ d'où il suit que } r = x \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Nous procédons maintenant en trois étapes afin de trouver l'aire du segment circulaire. À noter que nous visons ici à tout exprimer en termes du paramètre x , qui caractérise le carré de départ – et, dans le cas du résultat d'Hippocrate, le triangle de départ.

- i) *Aire du secteur circulaire (alias l'aire du cornet de crème glacé au complet, avec la boule)*

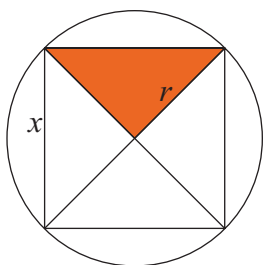
L'aire d'un des quatre secteurs circulaires (ici tous égaux), dans le cercle de rayon r , est bien sûr donné par $\frac{1}{4} \pi r^2$.



Y substituant la valeur qui précède pour r en termes du côté x du carré, on vérifie aisément que cette aire est donnée par

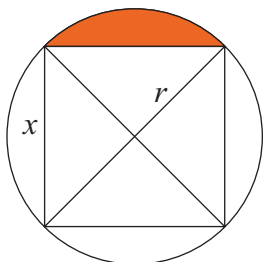
$$\frac{\pi}{4} \left(x \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{\pi}{4} \times x^2 \times \frac{2}{4} = \frac{\pi}{8} x^2.$$

- (ii) *Aire du triangle rectangle isocèle (alias l'aire du cornet de crème glacé, sans la boule)*



Il s'agit évidemment du quart de l'aire du carré, donc $\frac{1}{4}x^2$.

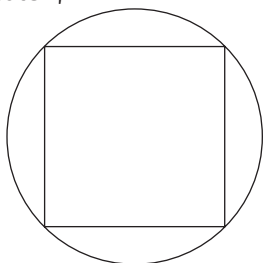
iii) Aire du segment circulaire
(alias l'aire de la boule de crème glacé elle-même)



Le segment correspondant à la partie du secteur circulaire hors du carré, on trouve donc que son aire est donnée par

$$\frac{\pi}{8}x^2 - \frac{1}{4}x^2 = \left(\frac{\pi-2}{8}\right)x^2.$$

Note 5 : Une autre approche, comme le suggère madame É.A. dans le texte, serait la suivante. Considérant le cercle circonscrit à un carré de côté x ,

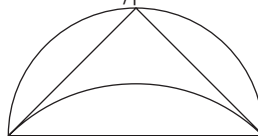


on a que :

- l'aire du cercle est donnée par πr^2 ,
où le rayon r satisfait à l'égalité $r = x\frac{\sqrt{2}}{2}$, et que
- l'aire du carré est (bien sûr!) donnée par x^2 ; considérant alors la couronne comprise tout autour du carré, on a donc que
- l'aire de la couronne est donnée par
$$\frac{\pi}{2}x^2 - x^2 = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)x^2.$$

L'aire d'un segment circulaire s'obtient alors en divisant cette dernière expression par 4.

Revenant maintenant aux préoccupations de madame É.A., il lui faut donc se convaincre, *algébriquement parlant*, que dans la figure suivante, les deux segments circulaires au haut de la figure, déterminés par les cathètes du triangle rectangle isocèle donné, ont la même aire, lorsque pris ensemble, que le segment au bas, construit sur l'hypoténuse.



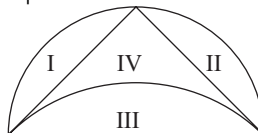
Convenant d'appeler a la longueur des deux cathètes du triangle et c la longueur de son hypoténuse, on sait alors que les deux segments circulaires au haut de la figure ont chacun pour aire

$$\left(\frac{\pi-2}{8}\right)a^2.$$

Faisant la somme de ces deux aires, on trouve
$$\left(\frac{\pi-2}{8}\right)a^2 + \left(\frac{\pi-2}{8}\right)a^2 = \left(\frac{\pi-2}{8}\right)(a^2 + a^2) = \left(\frac{\pi-2}{8}\right)c^2,$$

ce qui correspond bien à l'aire du segment circulaire au bas de la figure, tel que souhaité.

5. Revenons à la figure d'Hippocrate – voir le texte à la p. 10 –, construite à partir d'un triangle rectangle isocèle. Cette figure étant formée de quatre régions, nous représentons, comme précédemment, l'aire de chacune de ces régions par un nombre en chiffres romains.



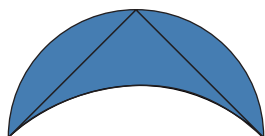
On a vu au problème 4 que la somme des aires des deux segments circulaires ayant pour bases les cathètes est égale à l'aire du segment circulaire construit sur l'hypoténuse. On a donc :

$$I + II = III.$$

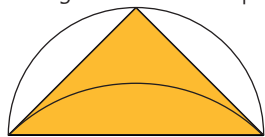
Il suit alors immédiatement que

$$I + II + IV = III + IV.$$

Or le membre du gauche de cette dernière égalité correspond à la lunule elle-même,



alors que celui de droite représente l'aire du triangle rectangle isocèle de départ.



On en conclut, comme Hippocrate, que la lunule et le triangle ont la même aire.



Note 6 : Nous ne possédons pas de textes originaux d'Hippocrate, de sorte que nous ignorons sur quelle méthode il s'appuyait pour justifier ses résultats sur les lunules. Nos connaissances à propos d'Hippocrate proviennent de commentateurs des premiers siècles de notre ère.

Il semble clair cependant qu'Hippocrate était familier avec le fait que les aires de deux cercles sont dans le même rapport que les carrés construits sur leurs diamètres, et aussi que les aires de segments circulaires semblables sont dans le même rapport que les aires des carrés sur leurs bases. Voir à ce sujet B.L. van der Waerden, *Science Awakening*, Oxford University Press, 1961, p. 132.

On observera que ces résultats sont omniprésents dans la discussion qui précède.

Le fait que les aires de cercles sont proportionnelles aux aires des carrés construits sur les diamètres se retrouve tel quel chez Euclide, à la proposition 2 du Livre XII de ses *Éléments*. Ce résultat est habituellement attribué au mathématicien grec Eudoxe (4^e siècle avant notre ère).
