

Section problèmes

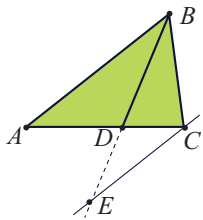
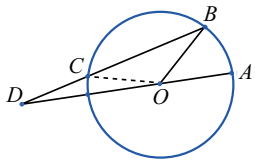
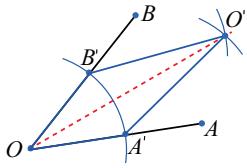


Figure 1:
Preuve du théorème de la bissectrice :
BD est la bissectrice intérieure de l'angle ABC, $AB \parallel EC$.

Une trisection par zigonnage

1. Bissection de l'angle :

Étant donné l'angle AOB , montrer que la droite OO' en est la bissectrice. (Voir la description détaillée de la construction de cette figure à la p. 6 du texte.)

2. Trisection de l'angle :

Étant donné l'angle AOB , on utilise un « zigonneur » (l'emploi de cet outil est décrit à la p. 7) de sorte à obtenir la droite BD passant par le point C , avec CD de longueur égale au rayon r du cercle.

Montrer que l'angle ADB vaut le tiers de l'angle AOB .

Tuyau : L'angle BCO est un angle extérieur au triangle DCO .

Coordonnées bipolaires

1. Preuve du théorème de la bissectrice.

Démontrez le théorème de la bissectrice et sa réciproque en vous aidant de la figure 1, où BD est la bissectrice intérieure de l'angle ABC : $\angle ABD = \angle CBD$. On a tracé la parallèle à AB passant par C , et appelé E son point d'intersection avec la droite BD . Pour la bissectrice extérieure, utilisez la figure 2.

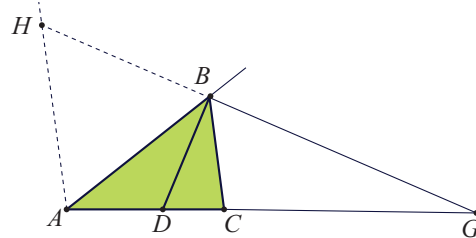
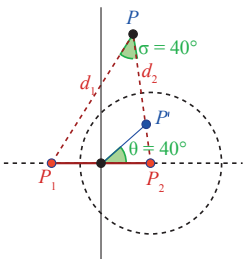


Figure 2:
Preuve du théorème de la bissectrice :
 BG est la bissectrice extérieure de l'angle ABC , $AH \parallel CB$.

2. Quelle inversion ?

Déterminez le centre et le rayon du cercle de l'inversion qui transforme la grille bipolaire de foyers $P_1(-a, 0)$ et $P_2(a, 0)$ en grille polaire. De plus, montrez que la coordonnée bipolaire σ du point P est égale à la coordonnée polaire θ de P' , l'image de P .



Perdu en forêt

1. Dans l'article, on a vu que pour une forêt rectangulaire de largeur 1, si la forêt est grosse, alors le chemin optimal est la ligne droite. Si la forêt est étroite et son diamètre est plus grand ou égal à longueur du chemin de Zalgaller, soit environ 2,2783, alors c'est le chemin de Zalgaller.

Trouvez toutes les longueurs de rectangle pour lesquels l'article n'a pas présenté de solution optimale.

2. Démontrez, pour tout naturel n , qu'une forêt en forme d'un polygone régulier à n côtés est une grosse forêt.

Cavalier contre roi

On considère un (a, b) -cavalier qui se déplace comme décrit dans l'article.

1. Montrer que si $a+b$ est pair, alors le cavalier ne peut atteindre que les cases d'une seule couleur.

2. Montrer que si a et b ne sont pas premiers entre eux, le cavalier ne peut atteindre toutes les cases de l'échiquier.

3. Montrer que si a et b sont premiers entre eux et si $a + b$ est impair, le cavalier peut atteindre toutes les cases.

Indication : Si $\text{pgcd}(a, b) = 1$, le théorème de Bézout garantit l'existence d'entiers x, y tels que $ax + by = 1$. En combinant les coups

$$(\pm a, b) + (\pm a, -b) = (\pm 2a, 0),$$

$$(\pm b, a) + (\pm b, -a) = (\pm 2b, 0),$$

on peut atteindre la case $(\pm 2(ax + y), 0) = (\pm 2, 0)$, et par symétrie $(0, \pm 2)$. On obtient ainsi toutes les cases $(2x, 2y)$.

Si a est impair et b pair (ou l'inverse), alors $(1 - a, -b)$ est de la forme $(2x, 2y)$, et un coup de type (a, b) permet d'atteindre $(1, 0)$ (et $(0, 1)$ par symétrie), d'où l'on peut combiner les déplacements pour atteindre toute case (x, y) à coordonnées entières.