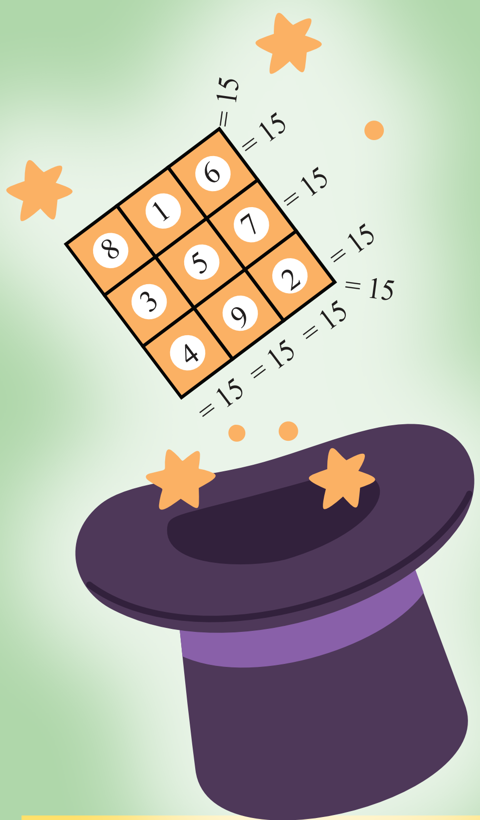
Un carré vraiment magique

Rubrique des Paradoxes

Jean-Paul Delahaye
Université de Lille



Tout le monde connaît les carrés magiques ! En voici un : Neuf nombres sont inscrits sur des pions qui sont rangés dans un carré composé de neuf cases. Il y a un pion par case. Les pions forment huit alignements de trois pions : trois alignements horizontaux, trois alignements verticaux et deux alignements en diagonale. Chacun de ces alignements donne un total de 15 :

			= 15
8	1	6	= 15
3	5	7	= 15
4	9	2	= 15
= 15	= 15	= 15	= 15

Le problème posé est : comment déplacer les nombres de manière qu'il y ait à nouveau un nombre dans chacune des neuf cases du tableau, et que les huit alignements obtenus de trois nombres donnent, cette fois, chacun un total de 16 ? Cela semble impossible, car il ne va pas y avoir assez de points sur les pions pour passer de 15 à 16. Aussi paradoxal que cela paraisse, le problème possède une solution !

Les carrés magiques de Jérôme Cardan

Lune

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Sommes : 15

Mercure

4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

Sommes : 34

Vénus

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Sommes : 65

Soleil

6	32	3	34	35	1
7	11	27	28	8	30
19	14	16	15	23	24
18	20	22	21	17	13
25	29	10	9	26	12
36	5	33	4	2	31

Sommes : 111

Mars

22	47	16	41	10	35	4
5	23	48	17	42	11	29
30	6	24	49	18	36	12
13	31	7	25	43	19	37
38	14	32	1	26	44	20
21	39	8	33	2	27	45
46	15	40	9	34	3	28

Sommes : 175

Jupiter

8	58	59	5	4	62	63	1
49	15	14	52	53	11	10	56
41	23	22	44	45	19	18	48
32	34	35	29	28	38	39	25
40	26	27	37	36	30	31	33
17	47	46	20	21	43	42	24
9	55	54	12	13	51	50	16
64	2	3	61	60	6	7	57

Sommes : 260

Saturne

37	78	29	70	21	62	13	54	5
6	38	79	30	71	22	63	14	46
47	7	39	80	31	72	23	55	15
16	48	8	40	81	32	64	24	56
57	17	49	9	41	73	33	65	25
26	58	18	50	1	42	74	34	66
67	27	59	10	51	2	43	75	35
36	68	19	60	11	52	3	44	76
77	28	69	20	61	12	53	4	45

Sommes : 369

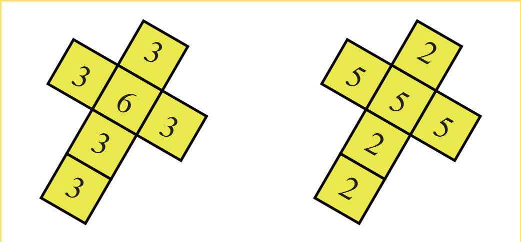
Solution du paradoxe précédent

Le lancer des dés

Julien propose un pari à Alain. « Voici deux dés A et B. Ils possèdent la propriété suivante : en les lançant simultanément, le dé A gagne contre le dé B dans précisément 21 des 36 cas possibles, soit avec une probabilité de 58,33 %.

Les faces de A portent respectivement les numéros 6, 3, 3, 3, 3 et 3. Les faces de B portent les numéros 5, 5, 5, 2, 2, 2. Le dé A gagne quand il obtient 6 – il y a 6 cas sur 36 de ce type – ou quand il obtient 3 et que B obtient 2 – il y a 15 cas sur 36 de ce type – ; le dé A gagne donc dans 21 cas sur 36. Ces dés à 6 faces ne sont pas truqués, chaque face tombe avec la probabilité 1/6. Nous engagerons chacun 100 euros. Tu prendras le dé que tu voudras et je prendrai l'autre. Ensuite, nous lancerons chacun notre dé deux fois de suite. Tu feras la somme des résultats des deux lancers de ton dé. Je ferai la somme des résultats des deux lancers de mon dé. Celui dont le total sera le plus élevé gagnera et emportera les 200 euros. » Alain réfléchit un moment. Il raisonne ainsi : « Le dé A est plus fort que le dé B, puisqu'il gagne dans 58,33 % des lancers et j'ai vérifié le raisonnement, c'est juste. En le lançant deux fois de suite, cela augmente encore son avantage sur le dé B et les chances qu'il a donc de gagner. Le pari que me propose Julien est stupide. Je vais l'accepter et je choisirai le dé A qui m'assurera au moins 58,33 % de chances de gagner ».

Alain accepte le pari et choisit le dé A. Julien s'en réjouit et dit : « C'est parfait, les chances sont de mon côté, j'ai plus de 59 % de chances de gagner ». N'est-ce pas paradoxal ? Comment expliquer cette affirmation de Julien ?



Solution

Lorsqu'on effectue un lancer double :

- le dé A obtient 12 (1 fois) ou 9 (10 fois) ou 6 (25 fois)
- le dé B obtient 10 (9 fois) ou 7 (18 fois) ou 4 (9 fois).

Lorsqu'on lancera deux fois A et deux fois B (ce qui fait 36 x 36 = 1296 cas possibles), B gagnera s'il obtient 10 et que A obtient 9 (10 x 9 = 90 fois), ou s'il obtient 10 et que A obtient 6 (9 x 25 = 225 fois), ou encore s'il obtient 7 et que A obtient 6 (18 x 25 = 450 fois). Le dé B gagnera donc 90 + 225 + 450 = 765 fois sur les 1296 cas possibles qui sont équiprobables puisque les dés ne sont pas truqués.

Le dé B gagnera donc dans 765 cas sur 1296, soit dans 0,59027 % des cas.

Julien a raison de se réjouir, lancer chaque dé deux fois transforme le net avantage du dé A en un désavantage aussi net. Cela est très étonnant, le dé A qui gagnait contre B dans le cas de lancers simples est battu par B dans le cas de lancers doubles ! C'est un exemple de situation où notre intuition nous conduit à des conclusions fausses : il n'est pas vrai que gagner dans le cas de lancers simples assure de gagner dans le cas de lancers doubles. Personne ne réussira jamais à démontrer que « gagner avec des lancers simples » implique « gagner avec des lancers doubles », car l'exemple constitué des dés A et B démontre de manière définitive que ce n'est pas toujours vrai !