

Les enfants manifestent une curiosité spontanée et une fascination profonde pour les nombres, qu'ils perçoivent comme des clés pour comprendre et organiser le monde qui les entoure. Il leur semble presque inconcevable qu'il puisse subsister des mystères ou des questions irrésolues à leur sujet. En voici un, à la portée de tous les élèves du primaire.

Quand les nombres se reflètent : le palindrome introuvable

Christian Genest
Université McGill

Nombres palindromes

Un nombre palindrome est un nombre entier qui se lit de la même façon de gauche à droite et de droite à gauche dans une base donnée. Par exemple, en base 10 (la numération décimale que nous utilisons tous les jours), des nombres comme 1, 11, 363 ou 8448 sont des palindromes.

Tous les nombres à un chiffre (0 à 9) sont des palindromes. Il existe 9 palindromes à deux chiffres :

11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 et 99.

À trois chiffres, on en compte 90, tels que :

101, 111, 121, ..., 999.

À quatre chiffres, il y en a aussi 90, comme par exemple

1001, 1111, 1221, ..., 9999,

et ainsi de suite. Si on fait le cumul des nombres palindromes inférieurs ou égaux à 10^n , on trouve donc

10 pour $n = 1$,

19 pour $n = 2$,

109 pour $n = 3$,

199 pour $n = 4$,

et ainsi de suite.

Pour des puissances de 10 plus grandes, le nombre de palindromes forme une suite bien connue (la suite A070199 dans l'OEIS). Dans ce décompte, le nombre 0 est inclus.

Des additions ayant un palindrome pour résultat

Choisissons maintenant un nombre au hasard et additionnons-le avec son nombre « miroir » (le nombre obtenu en inversant ses chiffres). Répétons ce processus avec le résultat : dans la plupart des cas, on finit par obtenir un palindrome.

Exemples

Il y a des palindromes dès la première étape, comme

$$12 + 21 = 33.$$

À la deuxième étape,

$$149 + 941 = 1090 ;$$

$$1090 + 901 = 1991.$$

Remarquer ici que quand on lit 1090 de droite à gauche, on obtient 0901, que l'on écrit 901.

Pour un palindrome en trois étapes, on peut penser par exemple à

$$59 + 95 = 154 ;$$

$$154 + 451 = 605 ;$$

$$605 + 506 = 1111.$$

Le mystère 196

Cette méthode fonctionne pour tous les nombres entre 1 et 195. Mais pour le nombre 196, on trouve

$$\begin{aligned}
 196 + 691 &= 887 \\
 887 + 788 &= 1675 \\
 1675 + 5761 &= 7436 \\
 7436 + 6347 &= 13783 \\
 13783 + 38731 &= 52514 \\
 52514 + 41525 &= 94039 \\
 94039 + 93049 &= 187088 \\
 187088 + 880781 &= 1067869 \\
 1067869 + 9687601 &= 107554470 \\
 107554470 + 07455701 &= 18211171 \\
 18211171 + 17111281 &= 35322452 \\
 35322452 + 25422353 &= 60744805 \\
 60744805 + 50844706 &= 111589511
 \end{aligned}$$

....

Toujours pas de palindrome ! En fait, pour le nombre 196, personne ne sait si la procédure finit ou non par mener à un palindrome... C'est un vrai mystère !

En 1987, un programmeur du nom de John Walker a lancé une expérience pour tenter de déterminer si le nombre 196 conduit à un palindrome. Il a utilisé pour ce faire un ordinateur Sun 3/260 et un programme en C qui effectuait les calculs en arrière-plan et enregistrait les résultats régulièrement. Son expérience a duré presque trois ans, jusqu'en mai 1990. Lorsqu'elle est venue à son terme, le programme avait effectué 2 415 836 itérations et le nombre obtenu comptait un million de chiffres, mais le palindrome se faisait encore attendre !

Depuis 1995, plusieurs chercheurs ont poursuivi les recherches. Le Canadien Jason Doucette a entre autres réalisé un nouveau record mondial en poussant le calcul jusqu'à 12,5 millions de chiffres en 2000, record qui a ensuite été battu par l'Américain Wade VanLandingham avec 300 millions de chiffres en 2006. En 2011, le Français Romain Dolbeau a utilisé le calcul distribué pour atteindre 413 millions de chiffres, puis un milliard en 2015. Malgré tous ces efforts, le nombre 196 n'a encore conduit à aucun palindrome. Incroyable, non ?

Les nombres de Lychrel

En général, on appelle « nombre de Lychrel » un nombre entier pour lequel on soupçonne qu'il ne mènera jamais à un palindrome en appliquant la méthode itérative décrite précédemment. À ce jour, on ne sait pas combien il y a de tels nombres, ni si certains des candidats possibles finissent par donner un palindrome après un nombre énorme d'étapes.

Le nombre 196 est le plus petit et le plus connu des candidats au titre de nombre de Lychrel, mais il y en a d'autres. Parmi les nombres entre 0 et 1000, on en compte 13, à savoir 196, 295, 394, 493, 592, 689, 691, 788, 790, 879, 887, 978, 986. Remarquons ici que sauf pour 790, ces candidats sont païrés : 196 et 691, 295 et 592, 394 et 493, etc. La raison est évidente mais fournit quand même un éclairage intéressant sur le phénomène.

En effet, si on prend pour acquis que 196 est un nombre de Lychrel, il faut alors que 691 en soit un lui aussi, car que l'on parte de 196 ou de 691, on trouve $196 + 691 = 887$ à l'étape suivante et tous les éléments subséquents de la suite seront les mêmes. Qui plus est, 887 doit lui-même être un nombre de Lychrel, ainsi d'ailleurs que 788. En prolongeant le raisonnement, on constate que $788 + 887 = 1675$ doit également être un nombre de Lychrel, etc. Observons par ailleurs que

$$295 + 592 = 394 + 493 = 887,$$

et que

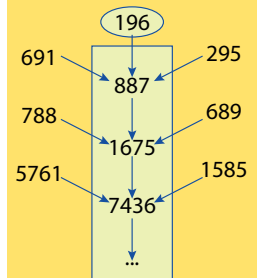
$$689 + 986 = 1675,$$

ce qui explique pourquoi on les soupçonne tous d'être eux aussi des nombres de Lychrel. Mais une subtilité se manifeste concernant 790. Comme

$$790 + 97 = 887,$$

on comprend bien pourquoi il s'inscrit dans la liste. Mais alors pourquoi 97 n'y figure-t-il pas ? Tout simplement parce que si on lit le nombre 97 de droite à gauche, on

Graine et fil



Le nombre 196 est appelé une *graine*; c'est le plus petit nombre engendrant un *fil*, qui regroupe les nombres apparentés, soit

$$\begin{aligned}
 196 + 691 &= 887 \\
 295 + 592 &= 887 \\
 788 + 887 &= 1675 \\
 689 + 986 &= 1675 \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

En fait, on n'est pas certain que 196 est une graine, comme on n'est pas certain qu'il existe des graines et des fils puisqu'on ne connaît avec certitude aucun nombre de Lychrel en base 10.

obtient 79 et non 790 ! Les nombres 79 et 97 conduisent tous les deux au même palindrome, soit 44044, en quatre étapes.

La conjecture de Lychrel

En mathématiques, on appelle « conjecture » un énoncé dont on ne sait pas s'il est vrai ou faux. Dans l'état actuel des calculs, l'énoncé suivant est donc une conjecture :

C_1 : « 196 est un nombre de Lychrel. »

Une autre conjecture, plus générale, serait à l'effet que

C_2 : « Il existe des nombres de Lychrel ».

Si l'énoncé C_1 est démontré, alors C_2 sera vrai. Mais C_2 pourrait être vrai même si C_1 s'avère faux. En effet, il se pourrait qu'à force de calculs sur des ordinateurs de plus en plus puissants, on arrive à montrer que le nombre 196 conduit éventuellement à un palindrome. Ce nombre serait alors retiré de la liste des candidats possibles. Il en irait de même pour 691, puisque l'algorithme d'addition des nombres miroirs les fait tous passer par

$$887 = 196 + 691.$$

Bien d'autres candidats mentionnés plus haut subiraient le même sort (vous pourriez demander à vos élèves lesquels !). Mais cela ne signifierait pas pour autant qu'il n'existe pas, quelque part, un nombre de Lychrel en base 10.

D'ailleurs, aucun ordinateur ne suffira jamais à démontrer la véracité de l'énoncé C_2 . Il faudra pour cela recourir à un argument logique, comme cela a déjà été fait, entre autres, pour les nombres exprimés en base 2 (voir encadré).

C'est aussi un argument logique qui nous permet d'énoncer le fait suivant :

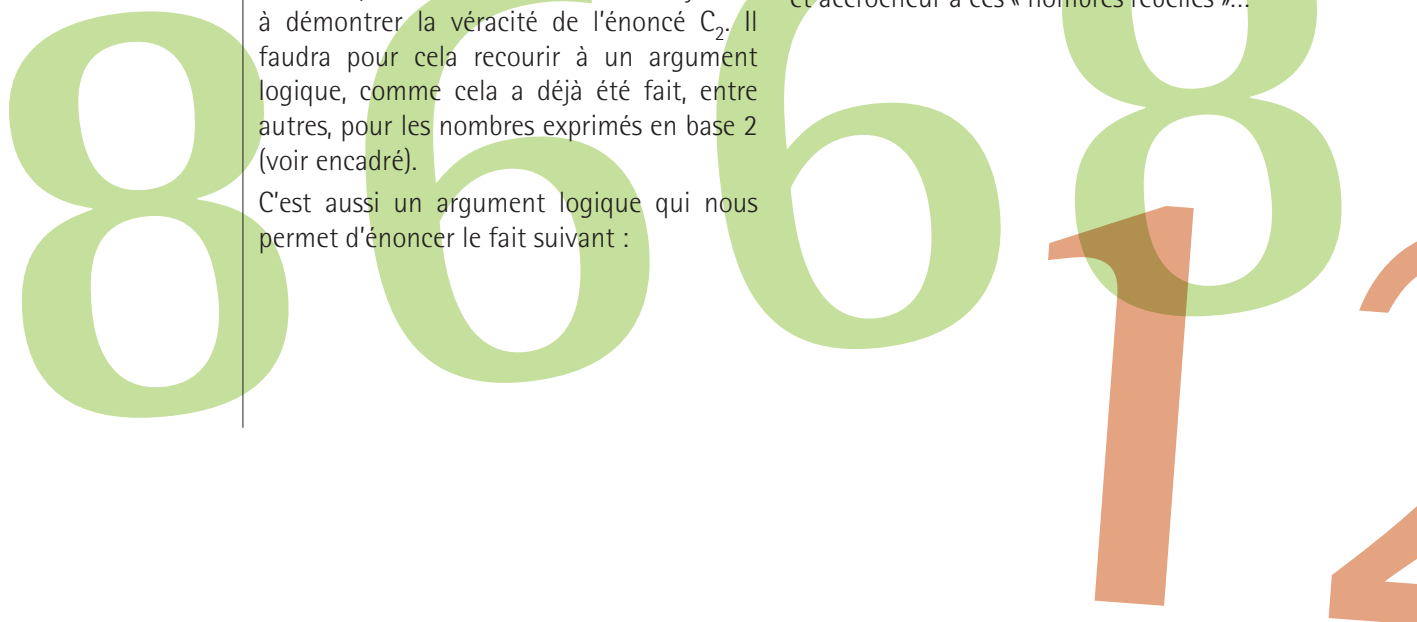
Théorème

S'il existe un nombre de Lychrel en base 10, alors il existe une infinité de tels nombres.

En mathématiques, un « théorème » est une affirmation qui peut être démontrée comme vraie à partir de raisonnements et de simples règles de logique. C'est bien le cas ici : comme on l'a déjà dit, si 196 est un nombre de Lychrel, il en est nécessairement de même pour 691 et pour tous les nombres le long du fil engendré par cette graine. Si 196 n'est pas un nombre de Lychrel mais qu'un autre nombre se qualifie, le même raisonnement s'appliquera et tous les nombres le long du fil engendrés par cette graine seront des nombres de Lychrel. Dans tous les cas, il y en aura forcément un nombre infini, car seule l'obtention d'un palindrome peut y mettre fin !

Mais qui est Lychrel ?

Les conjectures mathématiques sont souvent attribuées à des individus. On serait donc en droit de se demander qui est Lychrel. La réponse est étonnante : il n'y a en fait aucun spécialiste des mathématiques connu de ce nom ! Bien que l'origine du terme soit un peu obscure, plusieurs sources mentionnent qu'il aurait été introduit en 2002 par Wade VanLandingham. En construisant un anagramme approximatif du prénom de sa petite amie nommée Cheryl, celui-ci aurait souhaité donner un nom à la fois romantique et accrocheur à ces « nombres rebelles »...



Calculs de Jason Doucette

Selon les calculs du Néo-Écossais Jason Doucette, environ 80 % de tous les nombres inférieurs à 10 000 se résolvent en 4 étapes ou moins et environ 90 % d'entre eux se résolvent en 7 étapes ou moins. Le nombre 89 est un cas rare : il faut 24 étapes pour qu'il conduise à un palindrome ! C'est celui qui exige le plus d'itérations parmi tous les nombres inférieurs à 10 000 pour lesquels un palindrome a été trouvé.

1. $89 + 98 = 187$
2. $187 + 781 = 968$
3. $968 + 869 = 1837$
4. $1837 + 7381 = 9218$
5. $9218 + 8129 = 17347$
6. $17347 + 74371 = 91718$
7. $91718 + 81719 = 173437$
8. $173437 + 734371 = 907808$
9. $907808 + 808709 = 1716517$
10. $1716517 + 7156171 = 8872688$
11. $8872688 + 8862788 = 17735476$
12. $17735476 + 67453771 = 85189247$
13. $85189247 + 74298158 = 159487405$
14. $159487405 + 504784951 = 664272356$
15. $664272356 + 653272466 = 1317544822$
16. $1317544822 + 2284457131 = 3602001953$
17. $3602001953 + 3591002063 = 7193004016$
18. $7193004016 + 6104003917 = 13297007933$
19. $13297007933 + 33970079231 = 47267087164$
20. $47267087164 + 46178076274 = 93445163438$
21. $93445163438 + 83436154439 = 176881317877$
22. $176881317877 + 778713188671 = 955594506548$
23. $955594506548 + 845605495559 = 180120002107$
24. $180120002107 + 701200021081 = 8813200023188$

Pour des exemples faciles à compléter en classe mais moins laborieux, on peut se rabattre sur

69 (4 étapes ; résultat : 4884)

ou

79 (6 étapes ; résultat : 44044), par exemple.

Base 2 et base 10

En informatique, les nombres sont représentés en base 2, c'est-à-dire exclusivement avec des 0 et des 1. Par exemple, le nombre 17 s'écrit 10001 en base 2, car $1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 17$.

Comme 10001 se lit de la même façon de gauche à droite et de droite à gauche, c'est un palindrome en base 2, mais pas en base 10. En revanche, 6 s'écrit 110 en base 2 et n'est pas un palindrome, mais $110 + 11 = 1001$ (ou $6 + 3 = 9$ en base 10) en est un.

En base 2, on trouve que 10110 (qui correspond à 22 en écriture décimale) est un nombre de Lychrel, car après 4 étapes il devient 10110100, après 8 étapes 1011101000, après 12 étapes 101111010000, et de manière générale, après $4n$ étapes, on obtient un nombre composé de 10, suivi de $n+1$ uns, puis de 01, et enfin de $n+1$ zéros. Le nombre 10110 ne peut donc jamais conduire à un palindrome, ni aucun des autres termes de la suite. Le nombre 10110 est d'ailleurs le plus petit des nombres de Lychrel en base 2.

En raisonnant de façon analogue, le Britannique David Seal a pu démontrer l'existence de nombres de Lychrel dans plusieurs autres bases, dont 11, 17, 20, 26, ainsi que dans toutes les puissances de 2. Toutefois, le problème reste entier en base 10...

