

Déterminer des aires presque sans calculs, simplement en faisant des dessins, c'est ce que propose le calcul intégral visuel, ou encore la méthode de Mamikon. Cette méthode introduite en 1959 par le physicien arménien Mamikon A. Mnatsakanian, alors âgé de 17 ans, permet de calculer des aires balayées par des segments tangents à une courbe.

Calcul intégral

Christiane Rousseau
Université de Montréal

Regardons l'aire d'une couronne entre deux cercles concentriques. Vous savez la calculer comme différence de l'aire des deux cercles.

L'aire est donnée par

$$A = \pi R_2^2 - \pi R_1^2.$$

Cette formule ne nous apprend pas grand-chose.

Réécrivons-la comme

$$A = \pi(R_2^2 - R_1^2).$$

Posons

$$r = \sqrt{R_2^2 - R_1^2}.$$

Alors $A = \pi r^2$. Surprise : cette aire est l'aire d'un cercle de rayon r ! Quel est ce r ?

C'est la longueur d'une corde tangente au premier cercle jusqu'au deuxième cercle.

Pourquoi ? C'est la question qu'a posée Mamikon et pour laquelle il propose l'explication suivante. On découpe cette aire en secteurs très minces déterminés par des tangentes à la couronne intérieure.

On translate tous ces secteurs à l'origine et on voit que cette aire est à peu près égale à l'aire du cercle dont le rayon est la longueur r de la corde. À la limite quand les secteurs deviennent infiniment petits on a égalité.

Ce qui est remarquable c'est que le résultat ne dépend pas des rayons R_1 et R_2 des deux cercles, mais seulement de la longueur

de la corde tangente au cercle intérieur. On peut donc trouver toute une famille de couronnes ayant la même aire, une pour chaque valeur de R_1 , la première étant le cercle de rayon r , ($R_1 = 0$) et, pour chaque valeur de R_1 , on prend $R_2 = \sqrt{R_1^2 + r^2}$.

C'est là qu'on peut se mettre à réfléchir. Qu'a-t-on fait ? On s'est promené le long du cercle intérieur et, ce faisant, on a balayé avec un vecteur tangent d'une longueur fixe, r , une région en forme de couronne : cette couronne c'est le *balayage tangent*. Ensuite, on a ramené tous les vecteurs tangents à la même origine. Ce faisant, ces rayons ont balayé une région qu'on appellera *balayage translaté*, qui se trouve être un cercle de rayon r . Et on a conclu que l'aire de la couronne est égale à l'aire du cercle. Avec le langage introduit :

L'aire du balayage tangent est égale à l'aire du balayage translaté.

C'est la grande idée de Mamikon qui explore jusqu'où on peut pousser ce principe et le transforme en théorème dans une variété de contextes.

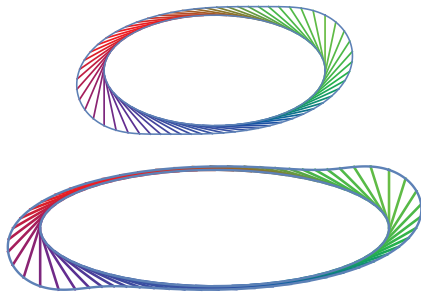
Question 1 :

Peut-on remplacer le cercle intérieur par une courbe plus compliquée ?

Oui ! Si la courbe intérieure est convexe. La condition de convexité garantit que la courbe décrite par l'extrémité du vecteur tangent entoure la courbe initiale. Le résultat de Mamikon est que l'aire balayée par le vecteur tangent est égale à l'aire du cercle de rayon r .

Voici deux exemples de couronnes balayées par un vecteur tangent de longueur 1 pour deux ellipses de demi-axes 2 et 1 pour la première, et 3 et 1 pour la seconde. Dans les deux cas, l'aire de la couronne est égale à π .

visuel

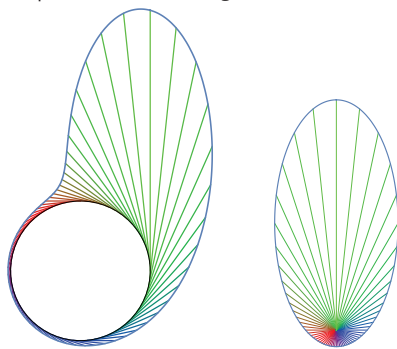


Question 2 :

Peut-on faire varier la longueur du vecteur tangent lorsqu'on parcourt la courbe ?

Oui ! On peut généraliser la méthode à ce cas. Rappelons-nous la démarche ci-dessus : on a remarqué que l'aire de la région en forme de couronne balayée par le vecteur tangent (le balayage tangent) a la même aire que celle du balayage translaté.

Ainsi, l'aire de la couronne de gauche est la même que l'aire de la région de droite.



Ici l'exemple a été construit de telle sorte que la figure de droite soit une ellipse de demi-axes 1 et 2, et donc d'aire 2π , ce qui donne que l'aire de la couronne de gauche est 2π . Sur la figure de gauche le cercle central est de rayon 1, mais on obtiendrait la même aire pour la couronne avec un cercle central d'un autre rayon.

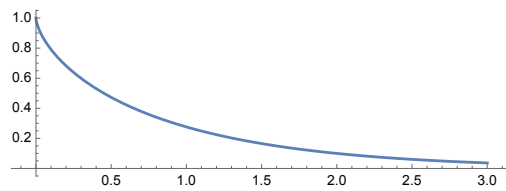
De plus, la courbe sur laquelle on promène un vecteur tangent n'a pas besoin d'être fermée. Voyons un exemple avec la tractrice.

Aire sous la tractrice

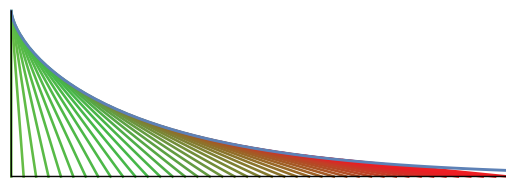
Prenons un point P partant de l'origine et se déplaçant sur l'axe des x à vitesse constante 1. Donc, à l'instant t , le point P est en $P_t = (t, 0)$. Soit Q , un point de position initiale $(0, 1)$ et dont la position est Q_t au temps t . La tractrice est la courbe décrite par Q_t de telle sorte que

- à tout instant, Q_t se dirige vers P_t ,
- le vecteur $\overrightarrow{Q_t P_t}$ est de longueur 1,

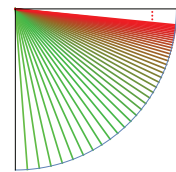
c'est-à-dire que Q poursuit P en se déplaçant à la vitesse 1.



On veut calculer l'aire sous la tractrice. Il n'existe pas de formule simple pour la courbe comme fonction de x , seulement des équations paramétriques obtenues en résolvant un système d'équations différentielles. Mais, avec le théorème de Mamikon, on peut se passer de ces équations. En effet, les vecteurs $\overrightarrow{Q_t P_t}$ sont des vecteurs tangents de longueur 1. Si on les translate tous au même point, le balayage translaté est simplement un quart de cercle de rayon 1.



On voit bien que le quart de cercle serait complet si on prolongeait la tractrice jusqu'à l'infini. Donc, sans aucun calcul, on obtient que l'aire sous la tractrice est égale à $\pi/4$!

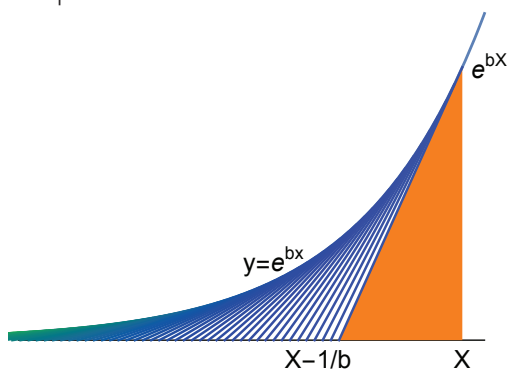
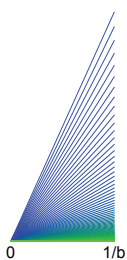


L'aire sous l'exponentielle

On veut calculer l'aire sous le graphe de la fonction $f(x) = be^{bx}$ entre $-\infty$ et X . La seule chose qu'on va utiliser est que

$$f'(x) = b f(x) = be^{bx}.$$

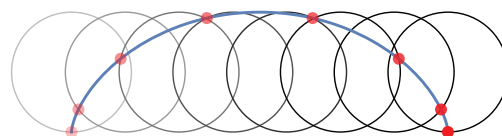
Regardons la tangente à la courbe en un point $(x, f(x))$. Le point est à la hauteur e^{bx} et la pente est $b e^{bx}$. Donc, la tangente coupe l'axe horizontal à une distance $1/b$ à gauche de x . (Cette longueur $1/b$ est appelée la *sous-tangente*.) Ce qui est remarquable, c'est que la longueur de la sous-tangente est indépendante de x !



L'aire sous la courbe au-dessus de $]-\infty, X]$ est l'aire balayée par les segments de tangente entre l'axe horizontal et la courbe à laquelle on ajoute l'aire du triangle orange. Par le théorème de Mamikon, l'aire balayée par les segments de tangente est la même que l'aire du balayage translaté, et cette aire est exactement la même que celle du triangle orange. Donc, sans calculs autres que la longueur de la sous-tangente, on obtient que l'aire sous la courbe est égale à deux fois l'aire du triangle orange, soit $\frac{1}{b} e^{bX}$.

L'aire sous la cycloïde

La cycloïde est la courbe dessinée par un point marqué d'un cercle qui roule sans glisser le long d'une droite. En pratique, prenons un cercle de rayon 1, dont le centre se déplace vers la droite, le long de la droite $y=1$, à la vitesse 1 en partant de $(0,1)$. La cycloïde est la courbe décrite par le point $(0,0)$. On notera par P_t sa position au temps t .



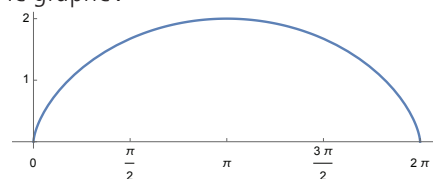
Lorsque le centre du cercle est en $(t, 1)$, la roue a parcouru une longueur de t , qui est donc la longueur de l'arc de cercle entre le point de tangence de la roue, $X_t = (t, 0)$ au temps t et le point P_t (voir aussi figure page 39). Donc, la roue a tourné d'un angle $-t$. Pour $t=0$ le point marqué est en $P_0 = (0, 0)$, ce qui correspond à l'angle $-\pi/2$. Donc, au temps t , le point P_t est en $P_t = (\cos(-t - \frac{\pi}{2}), \sin(-t - \frac{\pi}{2})) + (t, 1)$.

En tirant parti des identités trigonométriques $\cos(-t - \frac{\pi}{2}) = -\sin t$ et $\sin(-t - \frac{\pi}{2}) = -\cos t$, d'où les équations paramétriques pour P_t :

$$x(t) = t - \sin t,$$

$$y(t) = 1 - \cos t.$$

et le graphe :

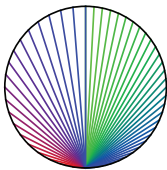


On veut calculer l'aire A sous la courbe. Remarquons que la courbe est inscrite dans le rectangle $[0, 2\pi] \times [0, 2]$, dont l'aire est 4π . La méthode de Mamikon va permettre de montrer que l'aire au-dessus de la courbe est égale à l'aire d'un cercle de rayon 1, soit π , ce qui donnera $A = 3\pi$.

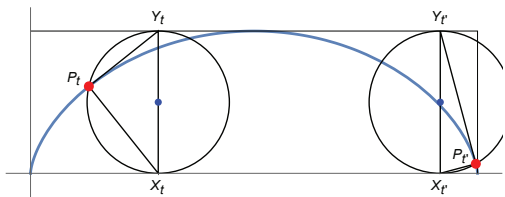
Pour cela, on va regarder cette zone comme un balayage tangent.



Et on verra qu'en ramenant tous les segments tangents à une même origine, ce sont les cordes d'un cercle passant par un point.



Pourquoi l'argument fonctionne-t-il?



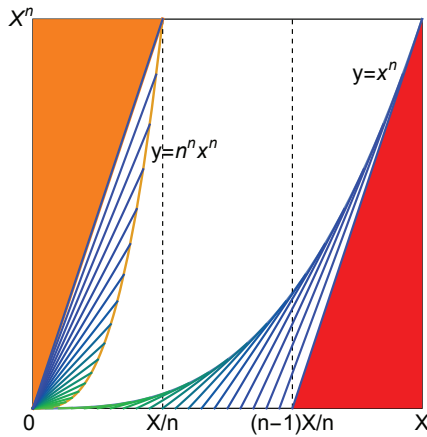
Regardons la figure, et le point marqué P_t sur le cercle au temps t . Le cercle est tangent à l'axe x au point $X_t = (t, 0)$. On voudrait montrer que la tangente à la cycloïde en P_t coupe le haut du rectangle à la verticale de X_t , soit au point $Y_t = (t, 2)$. Ceci signifiera que l'angle $\angle X_t P_t Y_t$ est droit (parce qu'inscrit dans un demi-cercle) et que la corde $P_t Y_t$ balaie le demi-disque. On ramènera ensuite tous les points P_t à l'origine, ce qui terminera la preuve. Donc, il reste seulement à montrer que

la tangente à la cycloïde en P_t coupe le haut du rectangle en $Y_t = (t, 2)$.

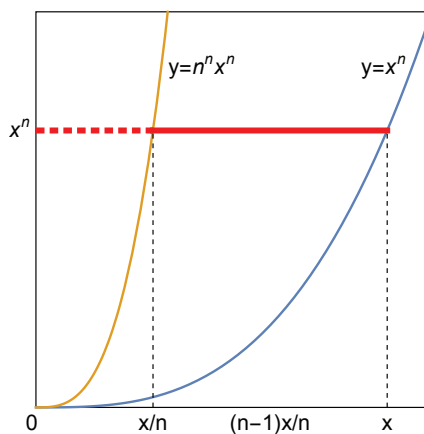
Comme le vecteur $\vec{P_t Y_t}$ est perpendiculaire au vecteur $\vec{X_t P_t}$, il suffit de montrer que le vecteur tangent à la cycloïde en P_t est perpendiculaire à $\vec{X_t P_t} = (-\sin t, 1 - \cos t)$, ce qui est le cas puisque $P_t' = (1 - \cos t, \sin t)$.

L'aire sous la courbe $y = x^n$ au-dessus de $[0, X]$

Sans connaître l'intégration il est possible de montrer que cette aire, A vaut $A = x^{n+1}/(n+1)$. Pour cela, on regarde les graphes des deux courbes $y = x^n$ et $y = n^n x^n$ dans le rectangle $[0, X] \times [0, X^n]$ (le dessin correspond à $n = 3$).

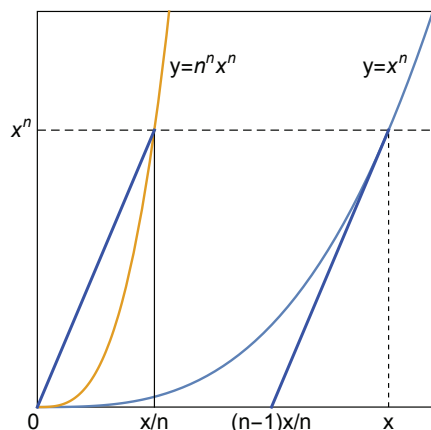


Remarquons que si on prend des tranches horizontales (en rouge sur la figure ci-dessous) la longueur de la portion de coupe au-dessus de $y = x^n$ vaut n fois la longueur de la portion de coupe au-dessus de $y = n^n x^n$ (la partie pointillée de la tranche rouge). Donc dans le rectangle $[0, X] \times [0, X^n]$, l'aire au-dessus de $y = x^n$ vaut n fois l'aire au-dessus de $y = n^n x^n$.



Par suite, l'aire entre les deux courbes vaut $(n - 1)$ fois l'aire au-dessus de $y = n^n x^n$. On va montrer par la méthode de Mamikon que l'aire au-dessus de $y = n^n x^n$ est égale à

l'aire A sous la courbe $y=x^n$. Ainsi, l'aire du rectangle $[0, X] \times [0, X^n]$ sera égale à $(n+1)$ fois l'aire sous la courbe $y=x^n$. Comme l'aire du rectangle est X^{n+1} , l'aire sous la courbe vaudra bien $A = X^{n+1}/(n+1)$.



Pour terminer la preuve, il suffit de montrer que dans la figure en haut à droite de la page 39, l'aire balayée au-dessus de $y=n^n x^n$ est égale à l'aire balayée sous $y=x^n$. Cette dernière est balayée par les segments tangents entre la courbe et l'axe horizontal. Par la méthode de Mamikon, cette aire est égale à l'aire du balayage tangent. Voyons que le balayage tangent est précisément la partie balayée au-dessus de $y=n^n x^n$. Regardons les deux segments se terminant à la hauteur x^n . Ce sont les segments bleus sur la figure : ils ont tous deux la même pente soit $n x^{n-1}$. Donc, le segment de gauche est bien le translaté à l'origine du segment de droite, ce qui termine la preuve.

Et si la courbe n'est pas convexe?

Jusqu'à présent on a vu des exemples où la courbe est convexe, ce qui a pour résultat que tous les vecteurs tangents sont du même côté de la courbe. Mais, ce n'est plus le cas si la courbe n'est pas convexe. Le théorème de Mamikon se généralise à ce cas, mais à condition de donner un signe à l'aire : elle est positive quand elle est d'un côté de la courbe et négative de l'autre. On a encore que l'aire (signée) balayée par un vecteur tangent le long d'une courbe est égale à l'aire (signée) du balayage translaté.

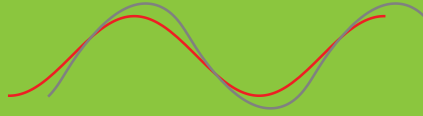
Mamikon A. Mnatsakanian (1942- 2021)

Mamikon A. Mnatsakanian, appelé simplement Mamikon, a inventé la méthode alors qu'il étudiait au premier cycle à l'université d'Erevan. Il a montré sa méthode à des mathématiciens soviétiques qui n'ont pas cru qu'une méthode aussi élémentaire pouvait fonctionner. Mamikon a ensuite fait un doctorat en physique pour devenir professeur d'astrophysique à l'université d'Erevan, et expert international en théorie du transfert radiatif.

Mamikon s'est retrouvé coincé aux États-Unis sans visa lors de la chute de l'Union soviétique. Avec l'aide de mathématiciens américains qui ont découvert ses méthodes, il a obtenu le statut d'étranger aux capacités extraordinaires. Ce fut le début d'une longue collaboration avec le mathématicien américain Tom Apostol. En Californie, il a développé son calcul intégral visuel comme outil d'enseignement, et cet outil a reçu des prix et un accueil enthousiaste dans les écoles et universités californiennes.

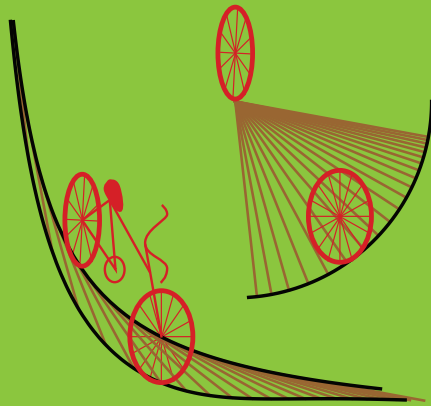
Les traces laissées par les roues d'une bicyclette

Si vous vous promenez à vélo et que vous n'allez pas en ligne droite, vos deux roues laissent des traces distinctes. Celles-ci se coupent si vous slalomez.

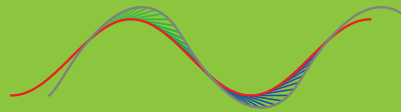


Au vu de ces traces, pouvez-vous dire si la bicyclette allait vers la gauche ou vers la droite?

Le vecteur \vec{v} joignant les points de contact des deux roues avec le sol est toujours tangent à la trace de la roue arrière : ce vecteur est parallèle au vecteur joignant vos deux essieux et de même longueur. Il serait de longueur constante pour une potence avant verticale. Comme la potence avant a un petit angle avec la verticale pour éviter que le vélo ne vire trop brusquement, le vecteur \vec{v} est un peu plus court quand vous tournez, mais à l'œil c'est presque négligeable.



Cela veut dire qu'il est possible, en regardant des traces de vélo, non seulement de distinguer la trace de la roue avant de celle de la roue arrière, mais même de déduire dans quel sens se déplaçait le vélo! En effet, il n'y a qu'une manière de dessiner un balayage tangent de longueur presque constante entre les deux traces de roues.



Sur la figure, ce balayage est tangent à la courbe rouge. La roue arrière a donc laissé la trace rouge, et la roue avant, la trace grise. La bicyclette se déplaçait vers la droite.

On trouve dans la littérature que l'aire entre les deux traces des deux roues est balayée par le vecteur \vec{v} . Cela n'est pas tout à fait exact, il y a de petites erreurs au voisinage des points d'intersection des traces des roues. Le balayage tangent a une largeur non nulle près de ces points d'intersection. Donc, le théorème de Mamikon ne permet qu'un calcul approximatif de l'aire entre deux intersections des traces de roues. La prochaine fois que vous verrez des traces de vélo, amusez-vous à déterminer laquelle est la trace de la roue arrière et dans quel sens se déplaçait le vélo!