

Un sofa doit être déplacé d'un bout à l'autre d'un couloir d'un mètre de largeur. S'il y a un angle droit le long du trajet, quelles sont la forme et l'aire du plus grand sofa que l'on puisse faire passer sans qu'il soit soulevé du sol ?

Le problème du sofa

Christian Genest
Université McGill

Christiane Rousseau
Université de Montréal



Leo Moser



Jineon Baek

C'est à Leo Moser, mathématicien canadien d'origine autrichienne, que l'on doit la formulation du « problème du sofa », sorte de puzzle géométrique qui s'énonce comme suit. Imaginons un couloir ayant un mètre de largeur et comportant un angle droit, tel qu'illustré à la figure 1. Supposons que l'on veuille déplacer un sofa d'un bout à l'autre de ce couloir en le faisant glisser seulement, c'est-à-dire sans le soulever du sol. Quelle forme ce sofa doit-il avoir si l'on souhaite que son aire soit la plus grande possible ? Plusieurs articles de recherche ont été publiés sur le sujet et la solution finale vient d'être annoncée par Jineon Baek en décembre 2024.

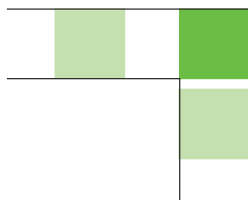


Figure 1. Couloir d'une largeur de 1 m ayant un angle droit et trois positions successives d'un sofa carré ayant 1 m de côté poussé le long du couloir.

Deux solutions très simples mais pas optimales

De toute évidence, un sofa carré faisant 1 m de côté peut aisément passer le coin, tel qu'indiqué sur la figure 1. L'aire maximale est donc au moins égale à $A = 1 \text{ m}^2$. Toutefois, on peut facilement faire mieux.

Considérons par exemple un sofa en forme de demi-disque de rayon 1 m, tel qu'illustré à la figure 2. Lorsqu'on le fait glisser à l'horizontale le long du couloir, il finit par toucher le mur du fond. À ce moment précis, le centre de son segment droit touche aussi l'angle droit du coin, tel qu'indiqué sur la figure 2. Il peut alors pivoter d'un quart

de tour autour de ce point et poursuivre ensuite son chemin. Ce demi-disque a pour aire $A = \pi/2 \approx 1,5708 \text{ m}^2$, ce qui est déjà nettement mieux qu'avec le carré de 1 m^2 .

Peut-on faire encore mieux ? Il se trouve que oui, comme le mathématicien britannique John Hammersley l'a montré dès 1968 en proposant un sofa d'aire $A = 2,2074 \text{ m}^2$.

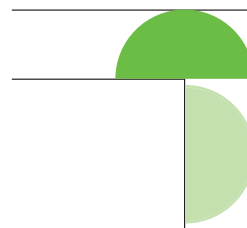


Figure 2. Deux positions successives d'un sofa en forme de demi-disque de rayon 1 m poussé et pivoté le long d'un couloir d'une largeur de 1 m.

Le sofa de Hammersley

Pour concevoir sa solution, Hammersley a eu l'idée de séparer le demi-disque de rayon 1 en deux quarts de disque et d'insérer un rectangle de longueur L et de hauteur 1 entre les deux. Un tel sofa est illustré à la figure 3, mais il est clair qu'il ne peut pas franchir le



coin à moins que l'on ne rogne une partie de la base du rectangle, tel que représenté dans la figure par le triangle rectangle ABC pour un angle de rotation donné.

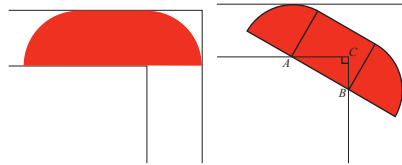


Figure 3. Deux positions successives d'un sofa composé d'un rectangle de dimension $L \times 1 \text{ m}^2$ et de deux quarts de disque de rayon 1 m dans un couloir d'une largeur de 1 m.

Remarquons que l'hypoténuse AB est de longueur L , quel que soit l'angle de rotation. En effet, les deux extrémités étant des quarts de disque, leurs points de tangence au couloir se situent à 1 mètre de A du côté gauche et à 1 mètre de B du côté droit. En particulier lorsque le sofa pivote en « roulant » le long des quarts de disque tout en restant tangent aux deux murs extérieurs, les points A et B parcourent les murs intérieurs du couloir, puisqu'il mesure 1 mètre de largeur.

En plaçant le segment AB à l'horizontale, comme dans la figure 4, on peut plus facilement déterminer quelle est la réunion de tous les triangles ABC . Il s'agit tout simplement du demi-disque de diamètre AB puisqu'un angle inscrit dans un demi-cercle est un angle droit. Il en résulte le sofa de Hammersley, illustré à la figure 5.

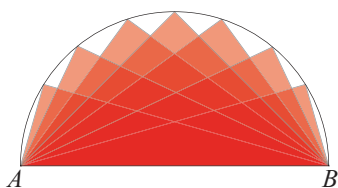


Figure 4. Demi-cercle de diamètre AB de longueur L et série de triangles rectangles inscrits.

Pour que le sofa de Hammersley soit d'un seul tenant, il faut bien sûr que $L \in [0; 2]$. Il reste alors à déterminer la valeur de L qui maximise l'aire du sofa. Notons d'abord que les deux extrémités étant des quarts de disque de rayon 1, la somme de leurs aires est égale à $\pi/2$. Remarquons ensuite que la partie

centrale est un rectangle d'aire L , duquel on a soustrait un demi-disque de rayon $L/2 \leq 1$ et donc d'aire $\pi L^2/8$. L'aire du segment central est donc égale à $L - \pi L^2/8$.

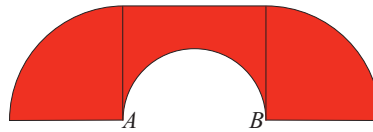


Figure 5. Le sofa de Hammersley de longueur $L+2$, composé de deux quarts de disque de rayon 1 et d'une région centrale telle que la distance entre A et B vaut L .

Au final, l'aire du sofa de Hammersley avec région centrale de longueur L est

$$A=f(L) = L - \pi L^2/8 + \pi/2. \quad (1)$$

L'expression (1) est une fonction quadratique de L . En différentiant la fonction f par rapport à L , on trouve $f'(L) = 1 - \pi L/4 = 0$ si et seulement si $L = 4/\pi$. Cette valeur correspond bien à un maximum de la fonction, puisque $f''(L) = -\pi/4$ pour tout $L \in [0; 2]$. Par conséquent, l'aire maximale d'un sofa de Hammersley vaut

$$A=f(\pi/4) = 2/\pi + \pi/2 \approx 2,20742.$$

L'aire de ce sofa est donc bien plus grande que celles des deux solutions précédentes.

La figure 6 fournit une représentation dynamique du pivotement du sofa de Hammersley autour du coin d'un couloir de largeur 1 m. Comme on peut le constater, le sofa touche aux quatre murs du couloir en chacune des positions pendant son pivotement autour du coin. Comme il n'y a aucune marge de manœuvre pour l'agrandir, le sofa de Hammersley semble être la solution optimale.

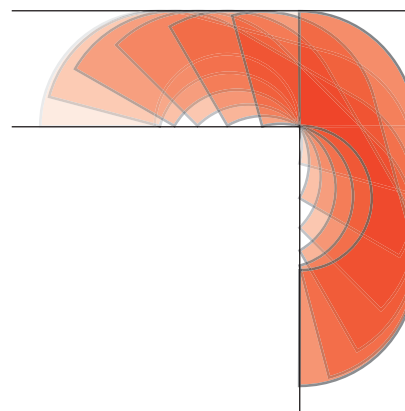


Figure 6. Représentation dynamique du pivotement d'un sofa de Hammersley, composé de deux quarts de disque de rayon 1 et d'un segment central de longueur $L = \pi/4$ tel que l'aire du sofa vaut $2/\pi + \pi/2 \approx 2,20742$.



John Hammersley





Joseph Gerver

L'aire du sofa de Hammersley n'est pas optimale

On a longtemps cru que l'aire du sofa de Hammersley était la plus grande possible. Ce n'est qu'en 1992 qu'un mathématicien américain du nom de Joseph Gerver, professeur à l'Université Rutgers, au New Jersey, a proposé un sofa dont l'aire dépasse celle du sofa de Hammersley d'environ 0,55 %, soit $2,219\,531\,668\,871\dots\text{m}^2$.

La figure 7 présente une image superposée des sofas de Hammersley et de Gerver. Pour passer du sofa de Hammersley au sofa de Gerver, il faut enlever les régions bleues et ajouter les régions roses. En y regardant de près, on constate que l'ensemble des régions bleues a une aire inférieure à l'ensemble des régions roses.

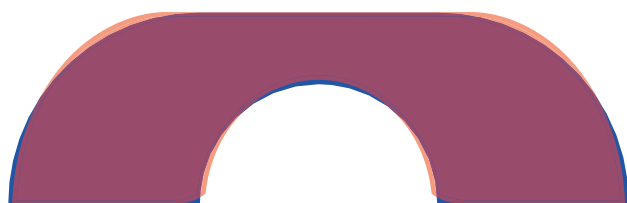


Figure 7

Sofas de Hammersley et de Gerver superposés. Les régions bleues sont celles où le sofa de Hammersley est plus grand que celui de Gerver ; les régions roses sont celles où le sofa de Gerver est plus grand que celui de Hammersley.

Intuition de Gerver

Avant de décrire plus précisément la solution de Gerver, examinons l'intuition qui l'a guidé dans ses travaux. Pour ce faire, considérons la figure 8, dans laquelle les lettres A , B , C , D désignent les quatre murs du couloir, et X dénote le coin inférieur.

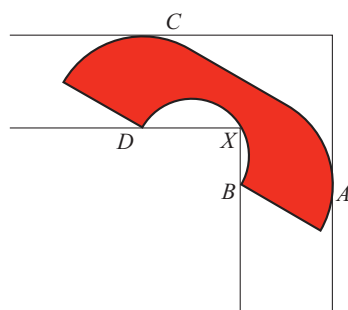


Figure 8

Un sofa de Hammersley en rotation dans un couloir de largeur 1 m.

Observons que dès qu'il amorce le passage du coin, le sofa de Hammersley est tangent aux murs extérieurs A et C . En même temps, sa base touche les murs intérieurs B et D , ainsi

que le coin X . Il n'y a donc aucune marge de manœuvre pour agrandir le sofa sans changer sa forme.

En revanche, bien que le sofa de Hammersley touche aux quatre murs du couloir en tout temps durant son pivotement, ses points de contact font des angles droits aux murs B et D . Gerver s'est alors dit qu'en rognant un peu ces coins et en procédant à d'autres ajustements, on pourrait peut-être augmenter un peu l'aire du sofa.

Gerver s'est donc attelé à la construction d'un sofa qui, pendant tout son mouvement, sera tangent aux murs extérieurs A et C . Cependant, pour maximiser l'aire sur l'ensemble du mouvement, il ne sera pas possible que le sofa touche en chaque position à la fois aux deux murs intérieurs B et D et au coin X .

Changement de point de vue

L'une des difficultés inhérentes au problème est le fait que les équations définissant les contours du sofa changent au fur et à mesure que celui-ci pivote. Or, ces équations sont plus complexes que celles délimitant le couloir. En faisant tourner les murs plutôt que le sofa, on simplifie donc énormément les calculs. Aussi, à l'instar de Gerver et Hammersley, nous allons opter pour un repère fixe par rapport au sofa.

La figure 9 illustre la rotation du couloir autour du sofa de Hammersley. Quel que soit $\theta \in [0; 90^\circ]$, on fait tourner le couloir d'un angle θ et on le translate de telle sorte qu'il contienne le sofa. Ainsi, pour qu'un sofa ait une aire (localement) maximale, il faut qu'il corresponde à l'intersection de tous ces couloirs tournés et translattés. Sinon, on pourrait identifier une portion d'aire extérieure au sofa et incluse dans tous les couloirs. Cette portion pourrait alors être ajoutée au sofa pour en augmenter l'aire.

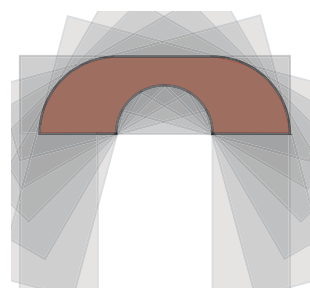


Figure 9. Rotation du couloir autour du sofa de Hammersley.

Remarquons que, pour chaque angle $\theta \in [0; 90^\circ]$, la position du couloir est uniquement déterminée par la position $X(\theta)$ du coin intérieur. La courbe décrite par $X(\theta)$ pour $\theta \in [0; 90^\circ]$ est appelée *chemin de rotation*. Pour le sofa de Hammersley, ce chemin n'est autre que le demi-cercle de rayon $2/\pi$ sur la frontière inférieure du sofa.

Le sofa de Gerver

La figure 10 donne une représentation du sofa de Gerver. Sa frontière comporte quatre coins étiquetés F, F', G, G' sur la figure, ainsi que 18 segments identifiés en chiffres romains. À la différence du sofa de Hammersley, il n'y a pas d'angle droit aux voisinages de F, F', G et G' .

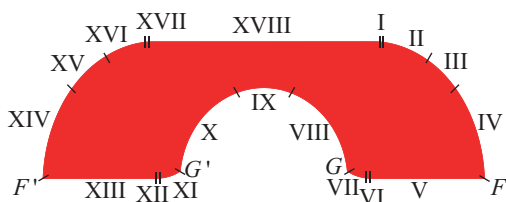


Figure 10
Le sofa de Gerver, les 18 segments et les 4 coins de sa frontière.

Dans le sofa de Gerver, les différentes portions de la frontière correspondent aux différentes manières dont le sofa touche les murs du couloir selon son angle. On peut s'en rendre compte en observant la figure 11,

qui montre certaines rotations du sofa. On voit bien le rôle des 18 portions de courbe de la frontière du sofa de Gerver. D'une portion de courbe à l'autre, le type de contact du sofa avec les bords du couloir change : sur certaines portions, il y a quatre points de tangence ou de contact en un point, sur d'autres il n'y en a que trois. Sur certaines portions du parcours, le coin intérieur du couloir touche au sofa, sur d'autres non!. Voir l'encadré pour de plus amples détails.

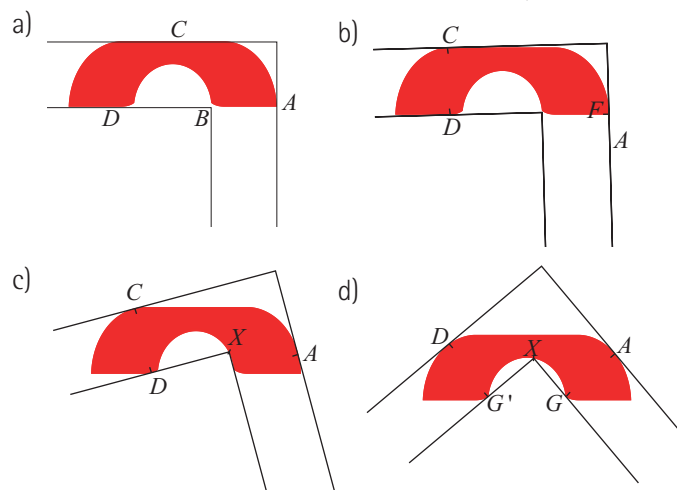


Figure 11. Un sofa de Gerver en rotation dans un couloir de largeur 1 m.

1. Une animation de la rotation du couloir autour du sofa de Gerver peut être visualisée sur le site suivant :

<https://blogs.ams.org/visualinsight/2015/01/15/hammersley-sofa/>

Description de la frontière du sofa de Gerver

Tel qu'indiqué à la figure 10, la frontière du sofa comporte 18 portions de courbes et quatre coins F, F', G, G' qui sont successivement en contact avec les murs du couloir pendant un intervalle de temps. Ces 22 morceaux sont liés par groupes de trois, quatre ou cinq, selon les contacts des quatre murs et du coin avec le sofa. On peut les présenter en ordre d'occurrence lorsque le sofa tourne dans le sens négatif d'un angle $\theta \in [0; \pi/2]$, partant du couloir horizontal pour aboutir dans le couloir vertical. Deux angles sont utilisés pour donner les changements de régime

Angle	ϕ	α
Radians	0,039177	0,681301
Degrés	2,24468°	39,0357°

Les différents régimes apparaissent dans le tableau suivant :

Régime	Valeur de θ	Contact au point				
		A	B	C	D	X
1 (fig.11a)	$\theta = 0$	F		XVIII	XIII	
2 (fig.11b)	$\theta \in [0; \phi]$	F		XVII	XII	
3 (fig.11c)	$\theta \in [\phi; \alpha]$	IV		XVI	XI	VIII
4 (fig.11d)	$\theta \in [\alpha; \pi/2 - \alpha]$	III	G	XV	G'	IX
5	$\theta \in [\pi/2 - \alpha; \pi/2 - \phi]$	II	VII	XIV		X
6	$\theta \in [\pi/2 - \phi; \pi/2]$	I		F'		
7	$\theta = \pi/2$	XVIII	X	F'		

Les cas 5, 6 et 7 sont les symétriques des cas 3, 2 et 1 respectivement.

Construction du sofa de Gerver

Pour construire son sofa, Gerver l'a considéré comme fixe et a fait tourner le couloir autour de lui. Il a procédé par approximations successives, en considérant, non pas tous les angles, mais des angles

$$\left\{ 0; \frac{\pi}{2n}, \frac{2\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}, \dots, \frac{(n-1)\pi}{2n}, \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Pour chaque entier n , on veut choisir les couloirs de telle sorte que leur intersection ait l'aire la plus large possible. Cette intersection d'un nombre fini de couloirs est un polygone.

Une borne supérieure

Déjà, le cas $n = 2$ est instructif. Il nous permet de montrer que l'aire maximale d'un sofa qui passe le coin est strictement inférieure à $2\sqrt{2} \approx 2,828$.

En effet, le sofa se trouve au départ dans la branche horizontale du couloir. Pour qu'il puisse tourner le coin de 45° , il doit être contenu dans l'intersection du couloir de largeur 1 et d'une translation du couloir tourné de 45° ; voir figure 12.

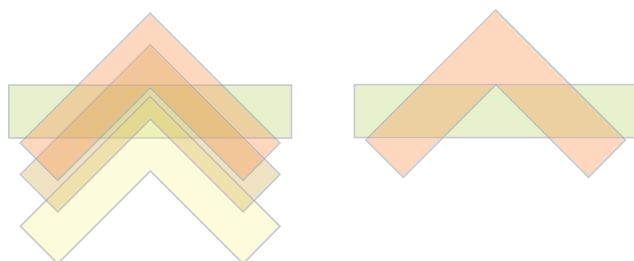


Figure 12. Translations d'un couloir horizontal tourné de 45° .

En regardant la figure, on peut noter que plus le sommet du couloir est haut, plus l'aire de son intersection avec le couloir horizontal (en vert) est grande. L'intersection a la plus grande aire lorsque le coin intérieur du couloir tourné de 45° coïncide avec le sommet du couloir horizontal.

Une telle position est impossible parce que le sofa serait alors scindé en deux morceaux. Cependant, on peut s'en approcher aussi près que l'on veut avec un sofa très mince en son centre. L'aire maximale d'un sofa passant le coin doit alors être inférieure à l'aire de cette intersection, qui est la réunion de deux lo-

sanges de hauteur 1 et d'angle aigu, 45° . La base a donc longueur $\sqrt{2}$ et l'aire de chaque losange est $\sqrt{2}$. Ainsi, l'aire de l'intersection des deux couloirs est-elle de $2\sqrt{2} \approx 2,828$.

Le sofa de Gerver: cas limite

Gerver a conçu sa solution comme une limite de sofas de forme polygonale ayant un nombre de plus en plus grand de côtés. Un exemple de tel sofa est donné à la figure 13. Gerver a aussi montré qu'une condition nécessaire pour que le sofa limite ait une aire maximale est de pouvoir l'approcher avec des sofas en forme de *polygone équilibré*.

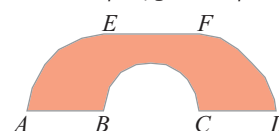


Figure 13. Un sofa de forme polygonale.

Un polygone est *équilibré* si, dès qu'il a des côtés parallèles dans une direction donnée, ceux-ci sont alors contenus dans exactement deux droites et si les sommes des longueurs sur chacune des droites sont égales.

À titre d'exemple, le polygone de la figure 13, dont les sommets A, B, C, D, E, F sont en fait les coins du sofa de Hammersley, n'est pas équilibré. En effet, les segments AB et CD d'une part, et EF d'autre part sont situés sur deux droites parallèles. Cependant, la somme des longueurs des segments AB et CD est égale à 2, alors que la longueur du segment EF est $4/\pi$.

Puisqu'il en est de même pour le sofa de Hammersley, ce dernier ne saurait être la limite de polygones équilibrés, ce qui permet déjà de conclure qu'il n'a pas une aire maximale. Et, en pratique, c'est ce que Gerver a vu : en rognant les coins en B et C , ce qui enlève un peu d'aire, on peut ajouter plus d'aire le long des arcs opposés AE et DF que ce qu'on a enlevé.

Pourquoi des polygones équilibrés ?

Sur la figure 14, le polygone intersection en a) n'est pas équilibré. En effet, considérons les deux côtés verticaux : le côté gauche est plus long que le droit. Comme les deux côtés sont parallèles, ils font partie d'une même branche d'un des couloirs. En déplaçant légèrement ce couloir vers la gauche, comme en b), on constate que la nouvelle aire est augmentée de l'aire d'un trapèze à gauche et diminuée de l'aire d'un trapèze à droite. Le trapèze côté gauche est plus haut que celui côté droit et les deux trapèzes ont même largeur. Ainsi, si la largeur est petite, le trapèze à gauche a une plus grande aire que celui à droite. Résultat : on a augmenté l'aire du polygone intersection en déplaçant un couloir vers la gauche.

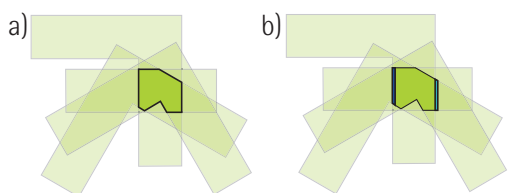


Figure 14. Intersection de polygones.

Au final, la démarche de Gerver a consisté à déterminer des polygones d'aire maximale ayant les contacts décrits dans les sept groupes et à prendre la limite lorsque le nombre de côtés augmente. En 2018, le mathématicien Dan Romik, affilié à l'Université de Californie à Davis, a réécrit la démonstration de Gerver en exprimant les différentes contraintes de contact sous forme d'équations différentielles, une pour chaque groupe, et en montrant que le sofa de Gerver est une solution de ces équations différentielles.

L'aire du sofa de Gerver est-elle maximale ?

Au moment d'écrire ces lignes, on pense que oui. Le mathématicien coréen Jineon Baek, qui a proposé une démonstration dans sa thèse, l'a soutenue avec succès. Son argument, qui fait l'objet d'un article de près de 120 pages, est considéré comme crédible par la communauté scientifique. Toutefois, l'article est encore en cours de validation.



Dan Romik

