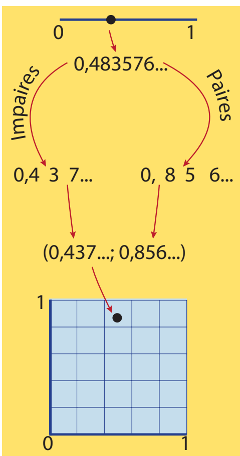
Points, droites et plans (suite)

Zia et Léo échangent sur la démonstration de Georg Cantor à l'effet que le segment ouvert [0; 1[contient autant de points que le carré construit sur ce segment.

André Ross
Professeur retraité



Léo

J'ai parlé à ma prof de maths de la démonstration que tu m'as présentée lors de notre dernière discussion, à l'effet qu'il y a autant de points dans le segment [0; 1[que dans le carré construit sur ce segment.

Zia

Tu parles de la démonstration où on décompose la partie décimale d'un nombre en deux parties selon la position des chiffres de ce développement (voir image). Qu'en pense ton enseignante ?

Léo

Elle dit que cette explication est incomplète. Selon elle, il faut préciser comment gérer les nombres selon leur développement[1] :

- Pour les nombres rationnels, dont le développement est soit fini, soit infini périodique, elle indique de regarder particulièrement les nombres ayant un développement infini périodique se terminant par 9.
- Puis de regarder plus précisément les nombres irrationnels, dont le développement est infini sans être périodique.

1. *La méthode présentée dans la première partie est la méthode initiale de Cantor, qu'il a par la suite modifiée pour répondre aux objections de Dedekind. Voir* Buildings Cantor's bijection, *Simon Nicolay et Laurent Simons, Université de Liège, Institut de Mathématique*
https://www.researchgate.net/publication/265414991_Building_Cantor's_Bijection

Développement rationnel

Zia

Voyons ceux qui ont un développement infini périodique. Prenons par exemple $x = 0{,}333\,333\ldots$ en le multipliant par 10, j'obtiens

$$10x = 3{,}333\,333\ldots$$

Et en soustrayant alors $x = 0{,}333\,333\ldots$ de $10x$, j'ai alors

$$9x = 3{,}333\,333\ldots - 0{,}333\,333\ldots = 3.$$

J'obtiens l'expression rationnelle donnant la valeur de x, puisqu'à partir de $9x = 3$, je tire $x = 1/3$. Je peux faire la même chose avec, par exemple, $0{,}077\,777\ldots$ et obtenir que $x = 7/90$.

Léo

Dans l'énumération des éléments d'un ensemble, on n'accepte pas les répétitions. Que l'on écrive 0,333 333... ou 1/3 ou encore 0,077 777 ... plutôt que 7/90, ça ne change rien.

Zia

Tu as raison, mais ça pose problème lorsque la période est composée de 9. Posons $x = 0{,}999\,999\ldots$ alors $10x = 9{,}999\,999\ldots$, et en lui soustrayant $x = 0{,}999\,999\ldots$, on a $9x = 9$. Donc $x = 1$.

Léo

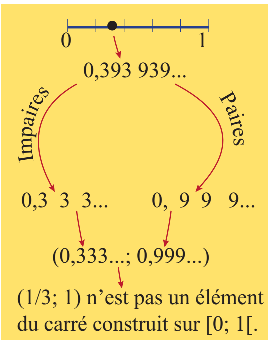
Je vois! 1 n'est pas un élément du segment de droite [0; 1[. Le point 0,999 999 ... ne fait donc pas partie des développements admissibles dans notre énumération.

Zia

Mais il faut aussi tenir compte qu'un développement comme 0,999 999... peut être obtenu en scindant le nombre choisi sur le segment de droite [0; 1[.

Léo

En effet, mais prenons plutôt le point 0,$\overline{39}$ = 0,393 939... (illustration ci-bas). En scindant la partie décimale en prenant les décimales en position impaire pour former un premier développement, j'ai 0,333..., et les décimales en position paire pour le second développement infini donnent 0,999... Avec ces deux développements, j'obtiens donc le couple de coordonnées



$$(0,\overline{3};\ 0,\overline{9}) = (3/9; 1) = (1/3; 1).$$

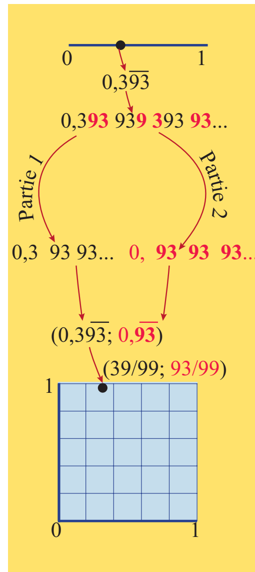
Cependant, le correspondant (1/3; 1) n'est pas un couple du carré construit sur le segment [0; 1[. Là, on a un problème !

Zia

Ce qui signifie qu'il faut modifier la façon de scinder le point choisi au départ.

Léo

Oui ! Imposons une restriction sur le choix des coupures. Supposons que j'ajoute que la coupure ne peut pas être après un 9. Pour identifier les coupures à faire, j'alterne les couleurs noir et rouge, 0,$\overline{39}$ =0,393 939 393 ... et, après avoir scindé, j'ai le couple (0,3$\overline{93}$; 0,$\overline{93}$). Ce point est bien un élément du carré. En effet, en l'exprimant sous forme rationnelle, ce point est (39/99; 93/99) (Illustration ci-contre).

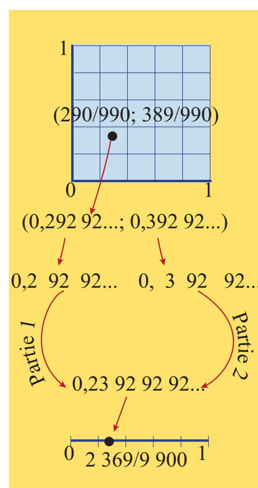


Zia

Regardons ce que ça donne avec 0,23$\overline{92}$. En alternant les couleurs de ce nombre, j'obtiens 0,23 92 92 92 92 ..., d'où (0,2$\overline{92}$; 0,3$\overline{92}$). Ce point est bien dans le carré construit sur [0; 1[que l'on peut exprimer sous forme rationnelle pour obtenir (290/990; 389/990).

Léo

Super ! Ça marche aussi dans l'autre sens (illustration ci-contre). Supposons que je choisis le point (290/990; 389/990). En exprimant les composantes sous forme de développements infinis, j'obtiens alors le point (0,292 92 92 ... ; 0,392 92 92 ...). En combinant les composantes sous la contrainte que les coupures ne sont pas après les 9, j'ai donc 0,23 92 92 92 92 ... C'est un point unique sur le segment [0;1[que je peux exprimer sous forme rationnelle, pour obtenir 2 369/9 900. (Illustration en bas de page à droite).



Développement irrationnel

Zia

Un nombre ayant un développement infini non périodique, peut-il poser un problème ?

Léo

Oui, en le scindant, on peut obtenir une partie ayant un développement infini non périodique et une partie périodique se terminant par des 9.

Prenons sur [0; 1[le point associé à l'irrationnel 0,1949 2919393959692949 ... En écrivant en noir les décimales impaires et en rouge les décimales paires, j'aurais

0,1949 2919393959692949 ...

auquel je ferais correspondre

(0,142 133 562 4...; 0,999 999 999...).

Ce point n'est pas dans le carré construit sur le segment [0; 1[. Mais si j'impose que les coupures ne peuvent pas être après un 9, j'obtiens alors

0,1949 2919393959692949 ...

auquel je fais correspondre le point

(0,192 939 592 ...; 0,949 193 969 ...)

Zia

On fractionne de la même façon que pour les rationnels.

Il faut donc préciser que le développement décimal du nombre ne se termine pas par des 9 et que dans la scission de celui-ci, la coupure ne doit pas être aprés un 9.

Zia

En respectant cette contrainte, l'application est injective et bijective, c'est donc une bijection et on a autant de points dans le segment de droite [0; 1[que dans le carré construit sur ce segment.