Triplets pythagoriciens

Zia explique à Léo comment cacher tous les triplets pythagoriciens.

André Ross
Professeur retraité

Zia

J'ai quelques questions pour toi. Est-ce que tu connais les triplets pythagoriciens ?

Léo

Bien sûr, ce sont les triplets $(a;\ b;\ c)$ qui sont une solution du théorème de Pythagore

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

comme (3 ; 4 ; 5) où (5 ; 12 ; 13).

Zia

Sais-tu, par exemple, que (3 ; 4 ; 5) et (5 ; 12 ; 13) sont appelés *triplets pythagoriciens primitifs* et leurs multiples, comme (6; 8; 10) ou (15; 36; 39) ne sont pas primitifs ?

Léo

Je ne connaissais pas l'appellation triplets pythagoriciens primitifs.

Zia

Savais-tu qu'on peut associer chaque triplet à un point du quart du cercle trigonométrique ?

Léo

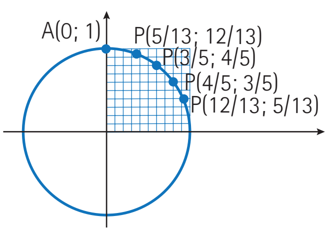
Ça n'a pas rapport, l'équation du cercle trigonométrique est

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Zia

Au lieu de multiplier par un nombre entier positif, tu multiplies par l'inverse multiplicatif du plus grand des nombres du triplet. Tu obtiens alors

$$\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}; 1\right) \text{ et } \left(\frac{5}{13}; \frac{12}{13}; 1\right).$$



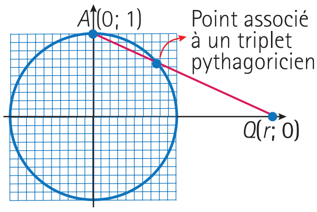
Le point (3/5; 4/5) est bien un point du cercle trigonométrique, tout comme (5/13; 12/13).

Léo

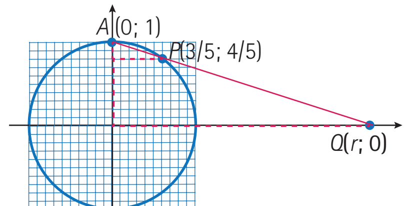
C'est vrai aussi pour les couples (4/5 ; 3/5) et (12/13 ; 5/13) qui correspondent aux triplets (4 ; 3 ; 5) et (12; 5; 13).

Zia

Tu as sans doute remarqué qu'à partir du point A(0 ; 1), on peut tracer une droite passant par le point P associé à un triplet pythagoricien et que cette droite coupe l'axe horizontal en un point Q de coordonnées $(r;\ 0)$.



Essayons de trouver la valeur de r en connaissant le triplet pythagoricien. Prenons le point P(3/5 ; 4/5) qui correspond au triplet (3 ; 4 ; 5), essayons de trouver la valeur de r du point $Q(r;0)$, prolongement de la droite AQ jusqu'à sa rencontre avec l'axe des x.



Le rapport des côtés est le même dans les deux triangles rectangles tracés entre les trois points. On a donc

$$\frac{1-4/5}{0-3/5} = \frac{1-0}{0-x}, \text{ d'où } x = 3.$$

Si je choisis plutôt le point (4/5 ; 3/5) associé au triplet (4 ; 3 ; 5), j'obtiens :

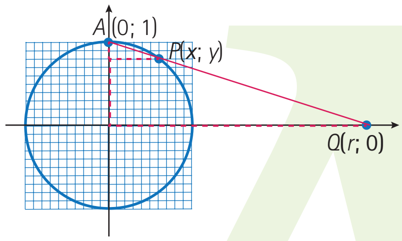
$$\frac{1-3/5}{0-4/5} = \frac{1-0}{0-x}, \text{ d'où } x = 2.$$

Léo

La valeur de r n'est pas toujours un nombre entier. En prenant le point (12/13; 5/13), je trouve $r = 3/2$.

Zia

Supposons que les coordonnées du point associé à un nombre pythagoricien sont $P(x; y)$.



Le rapport des côtés est alors

$$\frac{1-y}{0-x} = \frac{1-0}{0-r}, \text{ d'où } y = 1 - \frac{x}{r},$$

c'est l'équation de la droite APQ.

Léo

Je vois, il faut rechercher le point de rencontre de la droite AQ et du cercle trigonométrique. On a vu en classe qu'il faut substituer les données de l'équation de la droite dans celle du cercle. On obtient

$$x^2 + \left(1 - \frac{x}{r}\right)^2 = 1$$

$$x^2 + 1 - \frac{2x}{r} + \frac{x^2}{r^2} = 1$$

$$x^2 + \frac{x^2}{r^2} - \frac{2x}{r} = 0$$

Zia

C'est une équation quadratique, on peut trouver ses zéros en factorisant, puisque la constante est nulle. On obtient

$$x^2\left(1 + \frac{1}{r^2}\right) = \frac{2x}{r}$$

Ce qui donne $x = 0$ et $x\left(1 + \frac{1}{r^2}\right) = \frac{2}{r}$, d'où

$$x = \frac{2/r}{1 + 1/r^2} = \frac{2/r}{(r^2+1)/r^2} = \frac{2r}{r^2+1}.$$

Qu'est-ce qu'on peut dire de plus ?

Léo

Cette valeur est l'abscisse du point P en la substituant dans l'équation de la droite, on obtient

$$y = 1 - \frac{2r/(r^2+1)}{r} = 1 - \frac{2}{r^2+1}$$

$$= \frac{r^2+1}{r^2+1} - \frac{2}{r^2+1} = \frac{r^2-1}{r^2+1}.$$

Les coordonnées du point sur le cercle trigonométrique sont donc

$$\left(\frac{2r}{r^2+1}; \frac{r^2-1}{r^2+1}\right).$$

Zia

Vérifions que tout fonctionne, si $r = 3$, les coordonnées du point sont

$$\left(\frac{2\times 3}{3^2+1}; \frac{3^2-1}{3^2+1}\right) = \left(\frac{6}{10}; \frac{8}{10}\right) = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right).$$

Et, en posant $r = 2$, on obtient $(4/5; 3/5)$.

Léo

Puisque le point P représente un triplet pythagoricien, ses coordonnées sont des nombres rationnels. Par conséquent, la pente de la droite AQ est un nombre rationnel et, puisqu'un des points de la droite, soit $(0; 1)$, est formé de deux nombres rationnels, les coordonnées du point Q sont des nombres rationnels. Réciproquement, si r est un nombre rationnel, les coordonnées du point P sont des nombres rationnels.

Zia

Puisque r est un nombre rationnel, on peut le représenter par p/q. En substituant dans les coordonnées, on obtient

$$\left(\frac{2pq}{p^2+q^2}; \frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}\right),$$

où p et q, tels que $p > q > 0$ sont des nombres rationnels.

Léo

Prenons le nombre rationnel $r = p/q = 5/2$ qui donne

$$\left(\frac{2pq}{p^2+q^2}; \frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}\right) = \left(\frac{20}{29}; \frac{21}{29}\right).$$

Ce point est donc associé au triplet pythagoricien primitif (20; 21; 29).

Zia

Si j'essaie avec $r = p/q = 7/3$, j'obtiens

$$\left(\frac{2pq}{p^2+q^2}; \frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}\right) = \left(\frac{42}{58}; \frac{40}{58}\right).$$

Ce point est associé au triplet (42; 40; 58), celui-ci n'est pas primitif. Le triplet primitif associé est (21; 20; 29).

Léo

Super! On peut tous les trouver.