Calculer une racine carrée de tête?

Roméo, excité d'avoir tout juste appris une nouvelle astuce mathématique, va voir sa cousine Clara pour la lui montrer.

Tommy Mastromonaco
UQÀM

Roméo

Clara, aimerais-tu voir un tour de magie?

Clara

Bien sûr, montre-moi!

Roméo

Donne-moi un nombre au hasard entre 10 et 100.

Clara

Disons 37.

Roméo

Eh bien, je t'affirme que la racine de ce nombre est d'environ… 6,083.

Clara

Ah oui? Attends un peu que je sorte ma calculatrice… la racine carrée de 37 est 6,0828… Mais comment as-tu fait?

Roméo

Un magicien ne révèle jamais ses secrets! Mais comme je ne suis pas réellement un magicien, je vais te l'expliquer. Ma prof de maths m'a appris un truc pour calculer mentalement une valeur approximative d'une racine carrée. Voici comment j'ai fait.

D'abord, j'ai cherché le carré parfait le plus proche du nombre 37. C'est 36, dont la racine carrée est 6. Ensuite, j'ai calculé la différence entre le nombre de départ et le carré parfait, soit ici 37 – 36 = 1, puis j'ai divisé ce résultat par 2 et par la racine du carré parfait, 6. J'obtiens ainsi 1 divisé par 2 divisé par 6, soit 1/12. Pour terminer, j'ai tout simplement ajouté 1/12 à 6, pour obtenir 6 et 1/12, qui est environ 6,083.

Clara

C'est fascinant! Mais qu'arrive-t-il si le carré parfait le plus proche est plus grand que le nombre de départ, comme avec 23 par exemple?

Roméo

C'est une bonne question. Dans ce cas, je fais exactement la même chose, mais à la dernière étape, je soustrais la fraction au lieu de l'ajouter.

Clara

Donc, si j'ai bien compris, pour la racine carrée de 23, le calcul est le suivant. Ici, le nombre carré le plus proche de 23 est 25, dont la racine carrée est 5. J'ai 25 – 23 = 2, donc la fraction à calculer est 2 divisé par 2, que je divise par 5, soit 1/5. Enfin, je la soustrais à 5, ce qui me donne 5 – 1/5 = 4,8.

Vérifions avec la calculatrice. Je trouve que la racine carrée de 23 est 4,7958… Encore une fois, c'est très proche.

Roméo

J'aimerais tellement savoir pourquoi ça fonctionne !

Clara

Je crois qu'on peut le découvrir par nous-mêmes. Prenons n comme étant le nombre dont on souhaite calculer $\sqrt{n}$, et c comme étant un carré parfait proche de n. Autrement dit, n est approximativement égal à c

$$n \approx c.$$

Essaie d'exprimer ton calcul avec ces variables.

Roméo

D'accord. Je fais d'abord la différence $n - c$ que je divise par 2 et par la racine de c. J'obtiens

$$\frac{n-c}{2\sqrt{c}}.$$

Enfin, j'ajoute $\sqrt{c}$ à ce résultat, ce qui me donne

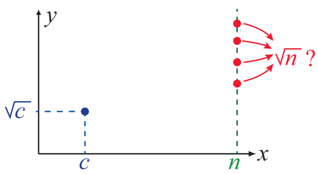
$$\sqrt{c}+\frac{n-c}{2\sqrt{c}}.$$

Clara

Parfait. Ce qu'on déduit de tout cela, c'est que $$\sqrt{n} \approx \sqrt{c} + \frac{n-c}{2\sqrt{c}}.$$

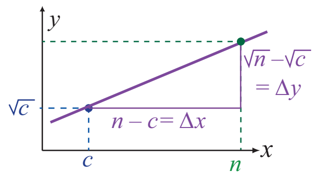
vu que ce calcul donne un résultat très proche de $\sqrt{n}$. Essayons de voir pourquoi cette approximation fonctionne. Gardons cette expression de côté pour le moment. Pour simplifier, supposons que $n > c$. Plaçons sur le plan cartésien les points de coordonnées $(c;\sqrt{c})$ et $(n;\sqrt{n})$.

Roméo



On ne connaît pas l'ordonnée du point $(n;\sqrt{n})$ vu que c'est précisément ce qu'on cherche à calculer.

Clara



Exact. Relions ces deux points par une droite, et construisons un triangle rectangle dont la longueur de la projection horizontale est $n - c$, et la longueur de la projection verticale est $\sqrt{n} - \sqrt{c}$, qui elle est inconnue.

Roméo

Attends un peu… si on arrive à déterminer la pente de cette droite, on peut alors déduire la longueur de la droite horizontale, et donc trouver $\sqrt{n}$!

Clara

Et quelle est la pente de cette droite?

Roméo

C'est $$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{c}}{n-c}.$$

Cela ne nous aide pas beaucoup…

Clara

Mais bien sûr! Essayons de transformer algébriquement cette fraction. Il y a une différence de radicaux au numérateur. Faisons apparaître le conjugué :

$$\frac{\sqrt{n}-\sqrt{c}}{n-c} = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{c}}{n-c} \times \frac{\sqrt{n}+\sqrt{c}}{\sqrt{n}+\sqrt{c}}.$$

Au numérateur, on obtient une différence de carrée de la forme
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2,$$
avec $a = \sqrt{n}$ et $b = \sqrt{c}$. Le numérateur est donc
$$\begin{aligned}(\sqrt{n}-\sqrt{c})(\sqrt{n}+\sqrt{c}) &= (\sqrt{n})^2 - (\sqrt{c})^2\\ &= n - c.\end{aligned}$$

Ainsi, la pente devient
$$\begin{aligned} m = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{c}}{n-c} &= \frac{n-c}{(n-c)(\sqrt{n}+\sqrt{c})}\\ &= \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{c}}.\end{aligned}$$

Roméo

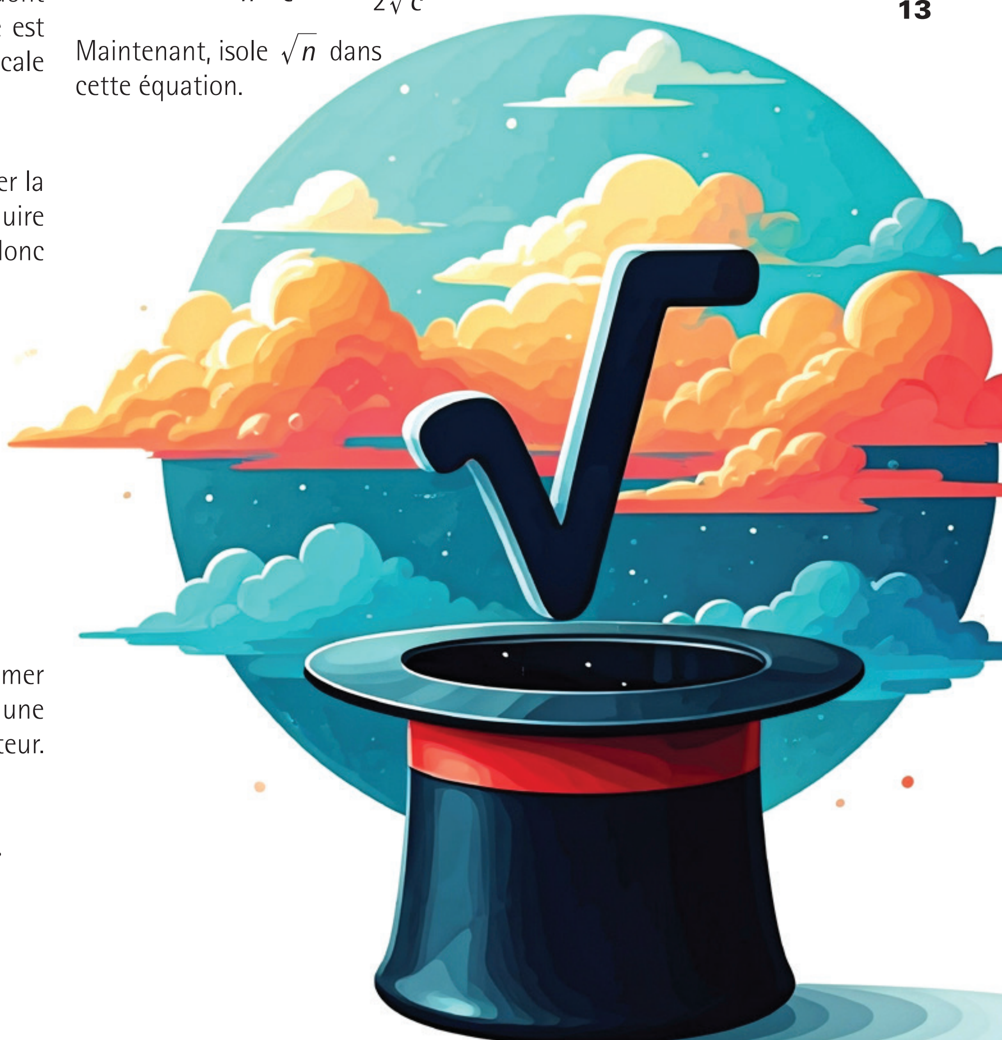
Et que fait-on avec cela, maintenant?

Clara

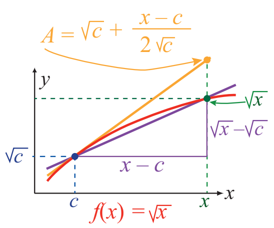
Puisque que $n \approx c$, alors $\sqrt{n} \approx \sqrt{c}$. On va ainsi approximer la pente de la droite en remplaçant l'inconnue $\sqrt{n}$ par $\sqrt{c}$:
$$\frac{\sqrt{n}-\sqrt{c}}{n-c} \approx \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{c}} = \frac{1}{2\sqrt{c}}.$$

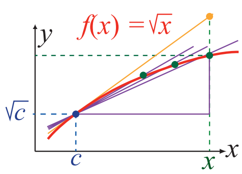
Autrement dit,
$$\frac{\sqrt{n}-\sqrt{c}}{n-c} \approx \frac{1}{2\sqrt{c}}.$$

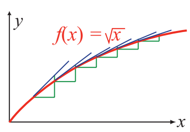
Maintenant, isole $\sqrt{n}$ dans cette équation.



1. *Voir également* Extraction d'une racine dans un carré, *par Bernard Hodgson,* Accromαth, *volume 1, 2006, p. 16.*







Roméo

D'accord. Je multiple chaque côté de l'expression par $n - c$, ce qui donne

$$\sqrt{n} - \sqrt{c} \approx \frac{n-c}{2\sqrt{c}},$$

Et j'ajoute $\sqrt{c}$ de chaque côté :

$$\sqrt{n} \approx \sqrt{c} + \frac{n-c}{2\sqrt{c}}.$$

Eh! C'est exactement mon calcul!

Clara

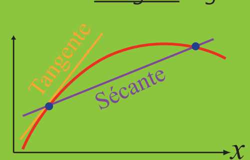
Tout à fait, et on l'a déduit avec seulement quelques manipulations algébriques. Mais ce n'est pas tout! Reprenons le schéma de tout à l'heure. Traçons la courbe de la fonction racine carrée $f(x) = \sqrt{x}$. Prenons x au lieu de n, et la variable A pour dénoter l'approximation

$$A = \sqrt{c} + \frac{x-c}{2\sqrt{c}}.$$

La droite dont nous voulions approximer la pente est la *droite sécante* reliant les points $(c; \sqrt{c})$ et $(x; \sqrt{x})$. La pente approximative $1/2\sqrt{c}$ que nous avons obtenu est celle de la *droite tangente* au point $(c; \sqrt{c})$, et qui relie les points $(c; \sqrt{c})$ et $(x; A)$. Rappelle-toi que l'approximation donnée par ton calcul repose sur l'approximation $\sqrt{x} \approx \sqrt{c}$ que l'on a utilisé pour déterminer la pente approximative. Dans ce cas, plus x et c sont rapprochés, alors plus $\sqrt{x}$ et $\sqrt{c}$ sont proches, et donc l'approximation est de plus en plus précise. Par conséquent, le calcul est plus juste lorsque le carré parfait est proche du nombre de départ!

Les droites sécantes et tangentes

On dit qu'une droite est sécante à une courbe lorsqu'elle intercepte la courbe en deux points. Autrement dit, elle « sépare » ou « coupe » la courbe (sécante vient du latin <u>secans</u> qui signifie « coupant »). Une droite est dite tangente à une courbe en un point lorsqu'elle touche la courbe seulement en ce point au voisinage du point (tangente vient du latin <u>tangere</u> signifiant « toucher ».)



Roméo

Graphiquement, cela correspond à ce que les droites sécantes se rapprochent de plus en plus de la droite tangente au point $(c; \sqrt{c})$, incluant leur pente!

Clara

Exactement. Je te fais remarquer qu'on peut tracer une droite tangente en plusieurs points de la fonction, pas seulement au point $(c; \sqrt{c})$. Ces droites tangentes sont essentielles parce qu'elles nous informent sur la croissance de la fonction! Regarde attentivement la pente de ces droites.

Roméo

Elles deviennent de moins en moins pentues à mesure que x augmente; leur pente diminue.

Clara

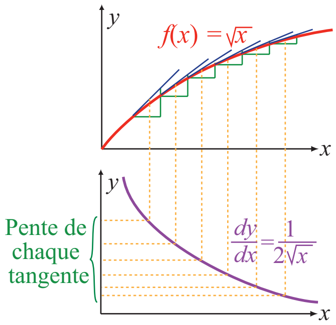
Et que peux-tu dire de la croissance de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$?

Roméo

Elle est croissante, mais moins quand x est élevé.

Clara

J'en déduis que la pente d'une tangente en un point mesure la croissance de la fonction en ce point! Vu qu'il est possible de tracer la tangente en chaque point de la courbe, on arrive dans ce cas à mesurer sa croissance en chaque point. Autrement dit, nous pouvons générer une fonction, à partir de la fonction de départ $f(x) = \sqrt{x}$, qui indique en tout point la croissance de cette fonction. On l'appelle la « dérivée de f ». Elle est écrite souvent de différentes manières : parfois f', ou bien $\dfrac{df}{dx}$ ou alors $\dfrac{dy}{dx}$, justement pour bien mettre en évidence qu'elle provient de la pente $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ d'une droite tangente.



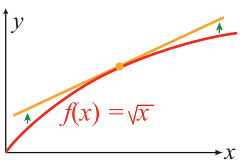
Roméo

Est-ce qu'on connaît la dérivée de la fonction racine carrée?

Clara

Bien sûr : on l'a déjà calculée! Rappelle-toi que la pente de la tangente de cette fonction au point $(c;\sqrt{c})$ est $m = 1/2\sqrt{c}$. Autrement dit, pour $x = c$, la dérivée de f est égale à $m = 1/2\sqrt{c}$. Ici, c peut bien être n'importe quel nombre réel positif! La dérivée de f est par conséquent

$$f\,'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$



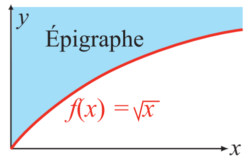
La fonction dérivée est positive lorsque f est croissante, parce que les tangentes sont de pente positive. Et la dérivée est décroissante en x, c'est-à-dire que la pente des tangentes diminue quand x augmente. Ceci fait en sorte que les droites tangentes sont toutes au-dessus de la courbe de f; on dit que la fonction f est concave. Puisque l'approximation A de la racine carrée d'un nombre n est sur l'une de ces droites tangentes, alors l'approximation sera toujours supérieure à la valeur exacte, peu importe que le nombre n soit inférieur ou supérieur au carré parfait c. Ton calcul sera toujours au-dessus de la vraie racine carrée.

Roméo

Je me souviens d'un cours de géométrie dans lequel on avait appris la différence entre des figures géométriques concaves et convexes. Y a-t-il un lien entre cela et les fonctions concaves?

Clara

Certainement. Regarde la zone au-dessus de la courbe d'une fonction concave comme la fonction racine carrée : cette zone, que l'on appelle *épigraphe*, forme une figure géométrique concave!



Roméo

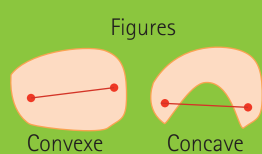
J'ignorais qu'il se cachait autant de choses derrière le tour de magie de ma prof.

Clara

En effet, et ce tour est magique non pas parce qu'il est inexpliqué et mystérieux, mais justement parce qu'on peut l'expliquer si simplement. C'est là que réside toute la beauté des mathématiques! Nous avons réussi à comprendre le fonctionnement de ce calcul tout en découvrant des objets et des concepts qui ont une étendue si vaste dans beaucoup de domaines!

Figures convexes et concaves

Une figure géométrique est *convexe* si tout segment reliant deux points quelconques de la figure reste à l'intérieur de cette figure. Au contraire, une figure géométrique est *concave* s'il existe un segment formé par deux points de la figure qui quitte cette figure.



Il est facile de se convaincre que l'épigraphe de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est une figure concave. Il suffit de déterminer deux points de l'épigraphe dont le lien quitte la figure.