*Imaginez un interrogatoire de police un peu particulier. Deux suspects, Alice et Bob, sont amenés dans des salles distinctes du poste de police et questionnés séparément par des inspecteurs. Le crime qu'on leur reproche est la « pratique de la magie ». Il parait que les deux complices sont capables de télépathie. Rien de moins.*

# Jeu de couleurs, jeu de quantas

**Claude Crépeau**
École de technologie supérieure (ETS)
Institut national de recherche en sciences et technologies du numérique (INRIA)

Les inspecteurs ont donc pour mission de démontrer qu'Alice et Bob sont en mesure d'accomplir une tâche que seule la communication pourrait leur permettre de réaliser, bien qu'on les ait maintenus séparés à tout moment. Alice et Bob sont bons joueurs; ils acceptent le défi de démontrer leur talent, mais sont convaincus qu'aucun juge (suffisamment instruit) n'acceptera de les condamner… Alice et Bob ont un tour de magie où ils arrivent à gagner systématiquement à un jeu simple qu'on appelle le jeu RVB. Ce jeu consiste à donner une couleur $A$ parmi « rouge», «vert » ou « bleu » à Alice et une telle couleur $B$ à Bob indépendamment[1]. Face à la couleur $A$, Alice doit répondre immédiatement une couleur $A'$ telle que $A' \neq A$ et Bob une couleur $B'$ telle que $B' \neq B$. Jusque là rien de bien difficile. Néanmoins, pour gagner le jeu, Alice et Bob doivent en plus répondre de façon à ce que $A' \neq B'$ sans pouvoir se consulter…

Pensez à cette situation un peu. Comment Alice et Bob peuvent-ils avoir $A \neq A' \neq B' \neq B$ tout le temps? Je parie que d'ici quelques minutes vous aurez trouvé une façon pour Alice et Bob de gagner 8 fois sur 9 à ce jeu. Je parie aussi que vous n'arriverez pas à faire mieux. Pour ne pas gâcher votre plaisir d'essayer par vous-même, n'allez pas lire tout de suite l'encadré *Le jeu des couleurs*, où je vous donne une telle stratégie conjointe pour Alice et Bob. Mais à quoi Alice et Bob ont-ils droit s'ils ne peuvent pas se parler?

On dit qu'une stratégie conjointe est *locale déterministe* si Alice et Bob peuvent se mettre d'accord avant le début du jeu sur deux fonctions $F_A$ et $F_B$ telles que $A' = F_A(A)$ et $B' = F_B(B)$.

1. *La paire (A, B) est choisie au hasard uniformément parmi les 9 paires possibles.*

Il est assez facile de trouver deux fonctions telles que 8 des 9 couples de couleurs ($A$, $B$) satisfont $A \neq F_A(A) \neq F_B(B) \neq B$. De plus, il est assez facile de se convaincre qu'aucune paire de fonctions ne peut réussir cet exploit plus de 8 fois sur 9. On dit alors que la *valeur classique* du jeu RVB est de 8/9. Pour être le plus inclusif possible et afin de considérer des stratégies pour Alice et Bob qui pourraient faire intervenir du hasard, en plus de leurs paires de fonctions, on leur donne la possibilité d'avoir partagé au moment de se séparer de nombreux résultats de tirages à pile ou face, autant que bon leur semble. Les stratégies résultant de cet ensemble de ressources sont tout simplement dites *locales*.

• École de technologie supérieure (ETS) • Institut national de recherche en sciences et technologies du numérique (INRIA)

## Le jeu des couleurs

Considérez les fonctions :

$F_A$(bleu) = $F_A$(vert) = rouge,

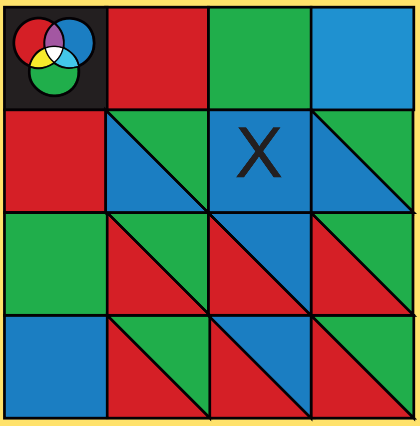
$F_B$(bleu) = $F_B$(rouge) = vert,

et $F_A$(rouge) = $F_B$(vert) = bleu.

Vous pouvez vérifier que $F_A(A) \neq A$, $F_B(B) \neq B$ tout le temps et que $F_A(A) \neq F_B(B)$ sauf pour le cas $A$ = rouge et $B$ = *vert*. On aura donc

$$A \neq F_A(A) \neq F_B(B) \neq B,$$

sauf dans ce dernier cas (marqué du X dans la table ci-bas).




$A$ est sur la première colonne et $F_A(A)$ sur les triangles inférieurs et B sur la première rangée et $F_B(B)$ sur les triangles supérieurs.

Avec un peu plus de travail, on arrive à se convaincre qu'aucune stratégie locale ne peut gagner au jeu RVB plus de 8 fois sur 9. Point à la ligne. L'introduction du hasard permet à Alice et Bob de transformer une stratégie déterministe qui gagne pour 8 des 9 paires de couleurs, en une stratégie qui gagne 8 fois sur 9 pour chaque paire $(A, B)$, mais sans plus. Faut-il alors conclure que si Alice et Bob réussissent à gagner tout le temps au jeu RVB c'est la preuve qu'ils communiquent?

Eh bien non. Supposons qu'au lieu de se limiter aux ressources locales décrites ci-haut[2], on permet à Alice et Bob de s'équiper de mémoires quantiques dans lesquelles ils ont préalablement partagé des états quantiques intriqués de leur choix et qu'on leur permet d'apporter avec eux leur mémoire quantique pour l'interrogatoire. Il s'avère que dans un tel contexte Alice et Bob (voir l'encadré : *Utiliser une mémoire quantique pour jouer au jeu RVB*) seront capables de faire des mesures[3] $\prod_R$, $\prod_V$ et $\prod_B$ sur leur mémoire quantique dont les résultats vont leur permettre de gagner au jeu RVB avec probabilité 11/12. C'est-à-dire 1/36 de mieux qu'avec n'importe quelle stratégie locale. Ce qui se cache derrière cette affirmation est ce que les physiciens appellent le « *théorème de Bell* » publié par John Stewart Bell en 1964 [Be64] où celui-ci démontra que la physique quantique, si elle est juste, implique qu'il est possible de corréler des variables de façon quantique plus *fortement* que de façon classique.

Ce n'est qu'à partir des années 70-80 que des expériences un tant soit peu concluantes sur le sujet ont permis d'établir la supériorité de la physique quantique en cette matière. Le prix Nobel de physique de 2022 aux chercheurs Alain Aspect, John Clauser, et Anton Zeilinger a été attribué pour la réalisation expérimentale de démonstrations établissant que Bell avait bel et bien raison. Personne n'a démontré en laboratoire que l'on peut gagner au jeu RVB plus de 8 fois sur 9 en moyenne, mais ce n'est qu'une question de temps. Avec un ordinateur quantique général, une telle démonstration sera un jeu d'enfant.

2. *Ces ressources sont $F_A$, $F_B$ et un nombre arbitraire de résultats de tirages à pile ou face.*
3. *Le projecteur $\Pi_X$ sert à mesurer quand Alice ou Bob reçoit la couleur X comme donnée.*

*John Stewart Bell*

*Alain Aspect*

*John Clauser*

*Anton Zeilinger*

Avec des mémoires et des appareils de mesure quantiques, il s'avère donc qu'Alice et Bob peuvent gagner 11 fois sur 12 au jeu RVB (voir les deux prochains encadrés), mais il s'avère également qu'on ne peut pas faire mieux. (Ne cherchez pas une preuve simple de cette impossibilité; la seule preuve connue est assez compliquée [CRC19]). On dit dans ce cas que la *valeur quantique* du jeu RVB est de 11/12. Alors, reposons donc la question: « Faut-il conclure que si Alice et Bob réussissent à gagner tout le temps au jeu RVB c'est la preuve qu'ils communiquent ? »

Toute cette histoire se rend finalement devant le juge. Heureusement pour Alice et Bob, celui-ci est plutôt féru de physique. Les policiers présentent le cadre où ils ont réalisé l'interrogatoire et le constat qu'Alice et

## Utiliser une mémoire quantique pour jouer au jeu RVB

Alice et Bob commencent par se munir d'un état intriqué $|\psi^-\rangle$ qui est une juxtaposition de deux qubits, et que l'on peut visualiser comme un vecteur dans l'espace à quatre dimensions complexes[4]:

$$|\psi^-\rangle = (R, S) = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle.$$

Nos deux complices se partagent $|\psi^-\rangle$: Alice obtient le premier qubit, $R$, et Bob, le second, $S$. Notons que R correspond au 0 de $|01\rangle$ et au 1 de $|10\rangle$, alors que $S$ correspond au 1 de $|01\rangle$ et au 0 de $|10\rangle$. Alice et Bob emmagasinent chacun leur qubit dans leur unité de mémoire quantique portable respective en attendant de le mesurer ultérieurement. Remarquons aussi que le choix de $|\psi^-\rangle$ n'est pas arbitraire ici car il est le seul état quantique ayant les bonnes propriétés mathématiques permettant d'obtenir le résultat escompté.

Les qubits $R$ et $S$ sont conjointement dans un état superposé. Mais, surtout, ils se trouvent corrélés par l'intrication de $|\psi^-\rangle$. Ceci signifie qu'ils ne se comportent pas de manière indépendante et que tout ce qui se passe sur l'un se répercute sur la description de l'autre : c'est le fameux phénomène d'intrication identifié par Einstein, Podolsky et Rosen dès 1935 [EPR35].

Alice et Bob vont chacun vouloir regarder leur qubit dans une base. Mais, la base choisie va dépendre de la couleur de $A$ pour $R$, et de la couleur de $B$ pour $S$. Pour la couleur « rouge » on choisit la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, pour la couleur « vert », la base $\{|v^-\rangle, |w^-\rangle\}$, et pour la couleur « bleu », la base $\{|v^+\rangle, |w^+\rangle\}$, où

$$|v^+\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle,$$

$$|v^-\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle,$$

$$|w^+\rangle = \frac{1}{2}|1\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle,$$

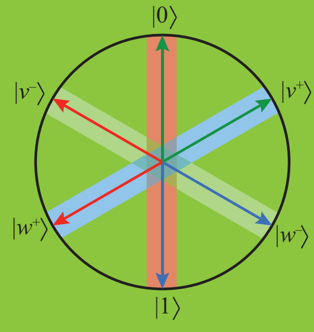
$$\text{et} \quad |w^-\rangle = \frac{1}{2}|1\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle.$$

Alice va mesurer $R$ et Bob $S$ selon l'un des trois projecteurs suivants

$$\Pi_R = |0\rangle\, vs\, |1\rangle$$
$$\Pi_V = |v^-\rangle\, vs\, |w^-\rangle$$
$$\Pi_B = |v^+\rangle\, vs\, |w^+\rangle.$$

La mesure va donner l'un des vecteurs de la base.

Les trois projecteurs sont organisés dans le plan tels qu'illustré dans la figure ci-bas. Le projecteur $\Pi_R$ est sur fond rouge, et ses deux valeurs possibles de sortie sont pour « vert » et pour « bleu ». On interprète les deux autres projecteurs de la même façon: le projecteur $\Pi_V$ est sur fond vert et le projecteur $\Pi_B$ est sur fond bleu.




4. *Pour la notion de qubits et la notation, vous pouvez vous référer à l'article « La Mécanique quantique : quand les mots échouent, les maths parlent »,* Accromath *20.2*

Bob ont gagné tout le temps, quand questionnés séparément et indépendamment. Les policiers ont bien pris soin de brouiller les ondes durant les interrogatoires pour être sûrs qu'Alice et Bob ne communiquent pas entre eux. Néanmoins, le juge n'est pas convaincu hors de tout doute raisonnable. Il connait bien les possibilités dues à la physique quantique et le fait que gagner plus de 8/9 du temps n'est pas une preuve. Il sait que de gagner plus de 11/12 du temps n'est pas une preuve non plus. Pour constituer une preuve, il faudrait que « la seule façon possible de gagner au jeu RVB tout le temps soit grâce à la communication ». Une façon de prouver cela serait de démontrer que toute stratégie permettant de réaliser cet exploit permettrait aussi à Alice et Bob de communiquer entre eux.

## Gagner 11 fois sur 12

Les mesures $\prod_R$, $\prod_V$ et $\prod_B$ donnent clairement toujours des résultats tels que $A' \neq A$ et $B' \neq B$, car la couleur $X$ n'est jamais un résultat possible du projecteur $\prod_X$. Quand on mesure un même projecteur (demande « laquelle de ces deux valeurs es-tu ? ») sur les qubits $V$ et $W$ de $|\psi^-\rangle$, les réponses opposées seront toujours produites: c'est la magie unique à cet état. Donc, quand $A = B$, on aura que $\Pr[A' \neq B' | A = B] = 1$ (3 des 9 cas). Quand au contraire $A \neq B$, on aura que $\Pr[A' \neq B' | A \neq B] = 7/8$ (6 des 9 cas). Voyons les détails.

Afin de bien comprendre la suite, vous pouvez vérifier que

$$\begin{aligned} |\psi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}|v^- w^-\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|w^- v^-\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}|v^+ w^+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|w^+ v^+\rangle. \end{aligned}$$

Prenons par exemple les cas $A$ = « rouge » et $B$ = « vert » :

- Si Alice mesure son qubit $R$ selon l'opérateur $\prod_R$ et (avec probabilité 1/2) obtient $|0\rangle$ ($A'$ = « vert »), alors le qubit de Bob se comportera comme $|1\rangle$. Lorsque Bob mesurera son qubit $S$ avec $\prod_V$, il obtiendra $B' \neq B = A'$ dans les deux cas possibles.
- Si au contraire Alice mesure son qubit $R$ selon l'opérateur $\prod_R$ et (avec probabilité 1/2) obtient $|1\rangle$ ($A'$ = « bleu »), alors le qubit $S$ de Bob se comportera comme $|0\rangle$. On travaille avec les demi-angles car les vecteurs orthogonaux sont à 180° l'un de l'autre dans cette figure. Comme les options $|0\rangle$ et $|v^-\rangle$ forment un angle de 60° entre eux, quand $|0\rangle$ sera observé selon $\prod_V$, il se comportera comme $|v^-\rangle$ (soit $B'$ = « vert » $\neq A'$), avec probabilité $3/4 = \cos^2 30°$. Sinon, il se comportera comme $|w^-\rangle$ (soit $B'$ = « bleu » = $A'$).
- Donc, dans cet exemple, la probabilité que $B' \neq A'$ vaut 1/2 x (1 + 3/4).

Dans l'exemple précédent, c'est Alice qui a mesuré son qubit en premier. Supposons que ce soit plutôt Bob qui fasse la première mesure et voyons qu'on obtient la même probabilité. Comme $B$ = « vert », Bob doit obligatoirement utiliser l'opérateur $\prod_V$ et, en mesurant son qubit $S$, il obtiendra nécessairement une des deux réponses $|v^-\rangle$ ou $|w^-\rangle$ avec probabilité 1/2 pour chacune.

- S'il obtient $|v^-\rangle$ ($B'$ = « rouge »), alors le qubit $R$ d'Alice se comportera comme $|w^-\rangle$. Lorsque Alice le mesurera avec $\prod_R$, elle obtiendra $A' \neq A = B'$ dans les deux cas possibles.
- Si au contraire Bob obtient $|w^-\rangle$ ($B'$ = « bleu »), alors le qubit $V$ d'Alice se comportera comme $|v^-\rangle$. Comme les options $|0\rangle$ et $|v^-\rangle$ forment un angle de 60° entre eux, quand $|v^-\rangle$ sera observé selon $\prod_R$, il se comportera comme $|0\rangle$ (soit $A'$ = « vert » $\neq B'$), avec probabilité $3/4 = \cos^2 30°$. Sinon, il se comportera comme $|1\rangle$ (soit $A'$ = « bleu » = $B'$).

Les cinq autres cas sont identiques. La probabilité que $B' \neq A'$ pour l'ensemble de ces six cas vaut :

$$6/9 \times 1/2 \times (1 + 3/4).$$

Ce qui donne bel et bien

$$3/9 \times 1 + 6/9 \times 7/8 = 11/12.$$

Pour en avoir le coeur net, le juge propose aux policiers de réaliser un interrogatoire un peu plus sophistiqué, inspiré de la physique relativiste. Alice et Bob seront séparés dans deux postes de police situés à plusieurs kilomètres l'un de l'autre. Les enquêteurs auront synchronisé leurs montres de façon très précise. Les paires de questions seront posées exactement en même temps à Alice et Bob. L'un comme l'autre devra répondre immédiatement à la question qui lui est posée, et ceci assez rapidement pour qu'il soit physiquement impossible, à des vitesses de communication inférieures ou égales à celle de la lumière, de connaitre les deux questions avant de répondre.

L'expérience que je viens de décrire ressemble assez à celle qu'Alain Aspect a réalisée en 1981 [AGR81]. Si l'on croit que, selon la relativité restreinte, il est impossible de communiquer plus rapidement qu'à la vitesse de la lumière, nous sommes forcés de croire qu'Alice et Bob ne peuvent communiquer avant de répondre à leur question respective. Des expériences similaires ont été réalisées en laboratoire depuis à plusieurs reprises.

Un grand interrogatoire public est donc mis sur pied et Alice et Bob réussissent haut la main à gagner à tous les coups, même dans ces conditions extrêmes. Le juge est ravi de pouvoir démontrer sa subtile connaissance de la logique élémentaire et affirme qu'il est prêt à rendre son verdict. « Non coupables », s'exclame-t-il. Dans la version longue de son jugement, on peut ensuite lire: « Bien que je ne comprenne pas comment Alice et Bob ont fait pour gagner tout le temps au jeu RVB, le simple fait de gagner au jeu ne constitute pas en soit un acte de communication. » En effet, le jeu RVB est un exemple de ce que l'on appelle un *jeu non signalant*. C'est-à-dire où l'on peut identifier une corrélation permettant de gagner au jeu, mais ne permettant pas de communiquer. On dit alors que la *valeur non signalante* (voir l'encadré : *Ici on ne signale pas*) du jeu RVB est de 1.

Le mystère plane. La magie opère. L'exploit d'Alice et Bob n'a jamais été réalisé en pratique pour la simple et bonne raison que notre modèle actuel de la physique ne connait rien de plus puissant que les corrélations quantiques (mis à part la communication). Les corrélations non signalantes supra-quantiques existent sur papier, mais pas en laboratoire. Nous n'avons strictement aucune idée, comment en réalité on pourrait corréler des systèmes physiques de façon supérieure aux quantiques. Néanmoins, l'existence de telles corrélations ne serait pas en contradiction avec la relativité restreinte. On peut voir cette situation comme un vide entre ce que peut accomplir la physique quantique et ce que ne permet pas la relativité restreinte. Toute démonstration de l'existence d'une corrélation non signalante supra-quantique impliquerait que la physique quantique est incomplète et tout résultat d'impossibilité de telles corrélations impliquerait que l'énoncé selon lequel « aucune communication ne peut se produire plus vite que la vitesse de la lumière » doit être remplacé par un énoncé plus général qu'« aucune corrélation supra-quantique ne peut se propager plus vite que la vitesse de la lumière ». Dans un cas comme dans l'autre, ce serait une immense percée pour la physique telle que nous la connaissons. Peut-être qu'Alice et Bob connaissent déjà la réponse à cette énigme, mais pour le moment ils refusent de nous la communiquer…

• École de technologie supérieure (ETS) • Institut national de recherche en sciences et technologies du numérique (INRIA)

## Ici on ne signale pas

Soit $A$, $B$ des valeurs d'entrées et $A'$, $B'$ des valeurs de sortie. Soit $C$ une corrélation établissant les probabilités de chaque paire en sortie $(A', B')$ étant donné $(A, B)$ en entrée. On écrit $(A', B') = C(A, B)$.

En termes simples, $C$ est non signalante si le fait de changer la valeur de $B$ ne change pas la distribution marginale de $A'|A$ et pareillement pour $A$ et $B'|B$.

En termes mathématiques, $C$ est *non signalante* si pour tout $a$, $a'$, $b$, $b'$, $u$, $v$ on a que

$$\Pr[A'=a'|A=a,\ B=u] = \Pr[A'=a'|A=a,\ B=v]\ (*)$$

et

$$\Pr[B'=b'|B=b,\ A=u] = \Pr[B'=b'|B=b,\ A=v]\ (**).$$

Il n'existe en théorie qu'une seule stratégie gagnante pour Alice et Bob et qui soit non-signalante. Décrivons-la dans les deux cas $A = B$ et $A \neq B$.

Le cas $A = B$. Dans ce cas, Alice et Bob répondent le couple $(A', B')$ tiré conjointement à pile ou face, dans l'une ou l'autre des deux seules combinaisons gagnantes utilisant les deux couleurs différentes de $A$ (et $B$). Voici deux exemples :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $A = B$ | $A$ | $A'$ | $B'$ | $B$ |
| | $A$ | $A'$ | $B'$ | $B$ |

Dans le cas contraire, $A \neq B$ , il y a trois combinaisons gagnantes $(A', B')$, dont la combinaison $(A', B') = (B, A)$. Pour que la stratégie soit non-signalante Alice et Bob ne doivent jamais utiliser cette réponse.

Les deux autres réponses possibles sont celles où, soit Alice, soit Bob, répond la couleur de l'autre, et l'autre répond la troisième couleur. Encore une fois, la réponse est le couple $(A', B')$ tiré conjointement à pile ou face, dans l'une ou l'autre des deux combinaisons gagnantes utilisant la troisième couleur. Voici deux exemples:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $A \neq B$ | $A$ | $A'$ | $B'$ | $B$ |
| | $A$ | $A'$ | $B'$ | $B$ |

Trois choses sont à discuter :

1. Cette stratégie est non-signalante.
2. Cette stratégie est la seule possible.
3. Cette stratégie est-elle réalisable en pratique sans communiquer?

Discutons ces questions:

1. Cette stratégie est non-signalante. Dans cette stratégie, quel que soit le couple $(A, B)$, il y a toujours exactement deux réponses possibles $(A'_1, B'_1)$ et $(A'_2, B'_2)$, telles que $A'_1 \neq A'_2$ et $B'_1 \neq B'_2$. Donc, toutes les probabilités conditionnelles apparaissant en (*) et (**) valent 1/2, ce qui garantit que la stratégie satisfait à (*) et (**).
2. Cette stratégie gagnante est la seule possible qui soit non-signalante. En effet, quand $A = B$, il y a deux réponses gagnantes possibles, et quand $A \neq B$ il y en a trois. Lorsqu'on change la valeur de $B$ dans (*) on peut passer du cas $A = B$ au cas $A \neq B$ ou le contraire. La seule manière que les probabilités restent égales pour toutes les valeurs de B est qu'il n'y ait que deux réponses possibles pour chaque couple $(A, B)$. On peut aussi se convaincre que toutes les probabilités doivent être égales à 1/2 pour pouvoir satisfaire à (*) et (**).
3. Cette stratégie est-elle réalisable en pratique sans communiquer ? Pour le moment on ne connait pas de façon physique pour Alice et Bob de l'utiliser sans pour autant communiquer. C'est une question actuellement ouverte. La recherche se poursuit.