

Section problèmes

Points, droites et plans (suite)

- Déterminer quelles sont, selon la méthode finale de Cantor, les coordonnées du point associé à
 - $0,\overline{6} = 0,666\dots$
 - $0,0\overline{8} = 0,088\dots$
 - $0,5\overline{9} = 0,599\dots$
 - $0,4\overline{95} = 0,49595\dots$
 - $0,79392909590989097996\dots$
 - $0,1949195992969959396\dots$

Dialogue géométrico-algébrique à saveur hippocratique

- Étant donné un triangle rectangle, montrer que le point milieu de son hypoténuse est équidistant des trois sommets du triangle.
Tuyau: Introduire le rectangle dont l'une des diagonales est l'hypoténuse du triangle donné, et tirer profit des propriétés des diagonales d'un rectangle.
 - En conclure que le cercle ayant pour diamètre l'hypoténuse d'un triangle rectangle est circonscrit à ce triangle (et donc qu'il passe par le sommet de l'angle droit).
- Nous reprenons la démonstration du résultat du #1-b en utilisant maintenant la notion d'angle inscrit dans un demi-cercle (et donc sous-tendant le diamètre).

- Montrer que tout angle inscrit dans un demi-cercle est droit.
- En prenant appui sur la partie a), montrer que tout angle sous-tendant le diamètre d'un demi-cercle et dont le sommet est à l'intérieur de celui-ci est plus grand qu'un angle droit.
- Montrer de même que tout angle sous-tendant le diamètre d'un demi-cercle et dont le sommet est à l'extérieur de celui-ci est plus petit qu'un angle droit.

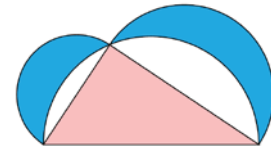
1. Bernard Vitrac, *Euclide d'Alexandrie, Les Éléments, volume 2. PUF, 1994, p. 236.*

- En conclure (comme au #1-b) que le demi-cercle construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle passe forcément par le sommet de l'angle droit.

Tuyau: Supposer au contraire que le sommet de l'angle droit n'est pas sur le demi-cercle.

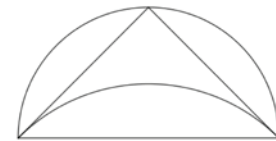
Remarque: On pourrait aussi travailler à partir des résultats généraux sur un angle quelconque dans un cercle : *angle inscrit, angle intérieur et angle extérieur.*

- Du #1-b, il découle que la figure qui suit correspond bien au cas de deux lunules construites à partir des demi-cercles sur les trois côtés d'un triangle rectangle.



En prenant appui sur ce fait, et aussi sur la relation entre les aires des trois demi-cercles en jeu, démontrer le résultat d'Hippocrate affirmant que *la somme des aires des deux lunules construites sur les cathètes d'un triangle rectangle est égale à l'aire du triangle lui-même.*

- On s'intéresse au résultat d'Hippocrate à propos d'un triangle rectangle isocèle sur lequel on considère une lunule unique, telle que décrite dans le texte.
 - La figure ci-dessous sous-entend deux cercles, chacun étant circonscrit à un certain carré. Caractériser ces cercles et ces carrés et donner une figure les illustrant.



- En vous appuyant sur la proposition VI.31 des *Éléments* d'Euclide (voir l'encadré), donner la relation entre les aires des trois segments circulaires de la figure qui précède.
 - À l'aide des formules usuelles pour les aires, caractériser algébriquement la relation entre les trois aires de la partie b) – comme le souhaite Madame É.A. (p. 11).
- En prenant appui sur le #4, démontrer le résultat d'Hippocrate affirmant que *l'aire de la lunule ainsi construite à partir d'un triangle rectangle isocèle est égale à l'aire du triangle lui-même.*

Euclide VI.31

Dans les triangles rectangles, la figure sur le côté sous-tendant l'angle droit est égale aux figures sur les côtés contenant l'angle droit, semblables et semblablement décrites.¹