

Le lancer des dés

Rubrique des Paradoxes

Jean-Paul Delahaye
Université de Lille



Le même Julien que dans l'énoncé précédent propose à nouveau un pari à Alain. « Voici deux dés A et B. Ils possèdent la propriété suivante: en les lançant simultanément, le dé A gagne contre le dé B dans précisément 21 des 36 cas possibles, soit avec une probabilité de 58,33 %. Les faces de A portent respectivement les numéros 6, 3, 3, 3, 3 et 3. Les faces de B portent, elles, les numéros 5, 5, 5, 2, 2, 2. Le dé A gagne quand il obtient 6 – il y a 6 cas sur 36 de ce type – ou quand il obtient 3 et que B obtient 2 – il y a 15 cas sur 36 de ce type – ; le dé A gagne donc dans 21 cas sur 36, ce qui fait 58,33 %. Je précise que ces dés à 6 faces ne sont pas truqués, chaque face tombe avec la probabilité 1/6. Voici le pari que je propose. Nous engagerons chacun 100 euros. Tu prendras le dé que tu

voudras et je prendrai l'autre. Ensuite, nous lancerons chacun notre dé deux fois de suite. Tu feras la somme des résultats des deux lancers de ton dé. Je ferai la somme des résultats des deux lancers de mon dé. Celui dont le total sera le plus élevé gagnera et emportera les 200 euros. »

Alain réfléchit un moment. Il raisonne ainsi : « Le dé A est plus fort que le dé B, puisqu'il gagne dans 58,33 % des lancers et j'ai vérifié le raisonnement, c'est juste. En le lançant deux fois de suite, cela augmente encore son avantage sur le dé B et les chances qu'il a donc de gagner. Le pari que me propose Julien est stupide. Je vais l'accepter et je choisirai le dé A qui m'assurera au moins 58,33 % de chances de gagner. »

Alain accepte le pari et choisit le dé A.

Julien s'en réjouit et dit : « C'est parfait, les chances sont de mon côté, j'ai plus de 59 % de chances de gagner ».

N'est-ce pas paradoxal ? Comment expliquer cette affirmation de Julien ?

Solution du paradoxe précédent

La longueur des fleuves

Julien adore les paris et les chiffres. Durant le cours de géographie, il s'ennuie et propose à son voisin Alain de parier sur les nombres que va mentionner le professeur qui est en train d'expliquer les réseaux hydrographiques terrestres. Julien propose à Alain de miser vingt euros sur les neuf prochains nombres qui seront mentionnés (des longueurs de fleuves ou de rivières). Julien dit à Pierre : - « On ne considérera que le premier chiffre significatif des longueurs des cours d'eau mentionnés. Je prends le paquet des trois premiers chiffres $A = \{1, 2, 3\}$ et je te laisse le paquet des six autres chiffres $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Celui qui, dans les neuf nombres qui vont venir, aura le plus souvent un premier chiffre dans son paquet gagnera et recevra donc vingt euros de l'autre. Si les longueurs mentionnées sont par exemple 243 km, 876 km, 1222 km, 92 km, 4330 km, 982 km, 3445 km, 2122 km, 832 km, dont les

premiers chiffres sont 2, 8, 1, 9, 4, 9, 3, 2, 8, tu auras gagné, puisqu'il y a cinq chiffres du paquet B et quatre du paquet A ». Alain est enchanté, il va certainement gagner les vingt euros car, ayant en sa faveur le paquet B de 6 chiffres alors que Julien n'en a que 3 dans le paquet A, il a toutes les chances de gagner. C'est une illusion et Julien – qui est un rusé parieur – a, en réalité, une probabilité de gagner égale à 73,77 %. Cela semble paradoxal. Saurez-vous expliquer et justifier ce 73,77 % ?

ii) Supposons que c'est vrai pour $n=0, 1, \dots, k$, c'est-à-dire que la dérivée de la fonction $x \rightarrow x^n$ est nulle :

$$(x^n)' = 0 \text{ pour } n=0, 1, \dots, k.$$

Utilisons maintenant la formule de dérivation d'un produit $(uv)' = u'v + uv'$. On a : $(x^{k+1})' = (x \cdot x^k)' = x' \cdot x^k + x \cdot (x^k)'$

On obtient 0 car, d'après l'hypothèse de récurrence, on a $x' = (x^1)' = 0$ (on utilise

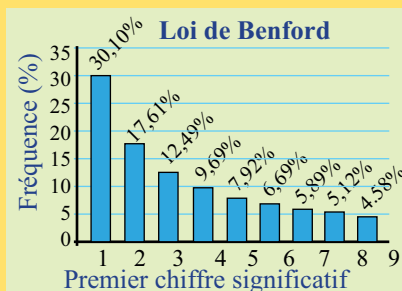
Solution du paradoxe précédent (suite)

l'hypothèse avec $n=1$) et $(x^k)' = 0$ (on utilise l'hypothèse avec $n=k$).

Nous avons donc $(x^{k+1})' = 0$, ce que nous souhaitons. Qu'est-ce qui cloche ?

Solution

La solution est liée à ce qu'on nomme la *loi de Benford*. Celle-ci indique que la probabilité qu'un nombre provenant d'une donnée comme la longueur d'un fleuve, ou la population d'une ville (et cela vaut aussi pour bien d'autres données statistiques), commence par le chiffre i est égale à $\log_{10}(1 + 1/i)$. Concrètement, quand une longueur de cours d'eau est mentionnée, il y a donc 30,1 % de chance que le premier chiffre de cette longueur soit « 1 ». Les autres probabilités sont données dans le tableau ci-dessous :



Cette loi étonnante a été vérifiée empiriquement et elle possède des explications mathématiques diverses, sujets aujourd'hui encore de travaux de recherche. Voir par exemple :

https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_de_Benford

La probabilité pour que le premier chiffre d'un nombre que va citer le professeur soit un « 1 », un « 2 » ou un « 3 » est donc :

$$a = (\log_{10}(1 + 1) + \log_{10}(1 + 1/2) + \log_{10}(1 + 1/3)) = 0,60205.$$

La probabilité pour que ce soit l'un des autres chiffres est obtenue est celle de l'évènement complémentaire :

$$b = 1 - a = 0,39795.$$

Si on ne prenait en compte qu'un seul nombre, Julien gagnerait avec une probabilité de 60,205%. Cependant, le pari prend en compte neuf nombres et non pas un seul. La probabilité pour que Ju-

lien gagne est donc la probabilité pour que, parmi les 9 nombres que va citer le professeur, il y en ait 5, 6, 7, 8 ou 9 dans le paquet $A = \{1, 2, 3\}$. Les méthodes usuelles pour traiter ce type de questions (loi de Bernoulli, loi binomiale) donnent que cette probabilité est :

$$a^9 + (9!/8!)a^8b + (9!/7!2!)a^7b^2 + (9!/6!3!)a^6b^3 + (9!/5!4!)a^5b^4 = 0,7377$$

(Sur la loi binomiale, voir par exemple :

http://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_binomiale)

La loi binomiale

La loi binomiale est une loi de probabilité discrète définie par deux paramètres : n le nombre d'expériences réalisées, et p la probabilité de succès. La probabilité de l'échec est parfois notée $q = (1 - p)$. La loi binomiale décrit une suite d'expériences appelées *épreuve de Bernoulli*. La variable aléatoire X représente la somme k de succès pour les n répétitions de l'expérience et sa probabilité est :

$$\Pr(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Dans cette expression le coefficient est,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Ainsi, la probabilité d'obtenir un 6 deux fois en lançant un dé trois fois de suite est :

$$\Pr(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^1.$$

Lorsque $p = 1/2$, comme dans le lancer d'une pièce de monnaie,

la loi binomiale tend vers la loi normale.

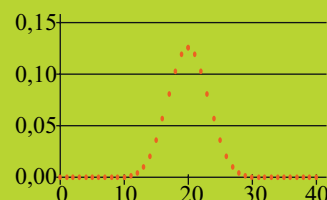


Diagramme de Bernoulli. trois lancers d'un dé

