

Retour sur le jeu des noyaux

Dans un récent numéro d'Accromath, un article était consacré au jeu des noyaux, pratiqué par les autochtones d'Amérique du Nord¹.

Christian Genest
Université McGill

Jeffrey R. Stribling
Université Stanford



Louis-Armand de Lom D'Arce, baron de La Hontan



Pierre Rémond de Montmort

Ce jeu avait d'abord été rapporté en 1706 par le Baron de la Hontan (1666-1716) dans le second tome de ses *Mémoires de l'Amérique Septentrionale*, ou *La suite des voyages de Mr. le baron de La Hontan*. La brève description qu'il en donne est la suivante :

« Celui des Noyaux est un jeu de hazard, ils sont noirs d'un côté & blancs de l'autre, on n'y joue qu'avec huit seulement. On les met dans un plat, qu'on pose à terre, après avoir fait sauter ces Noyaux en l'air. Le côté noir est le bon ; le nombre impair gagne, & les 8 blancs ou noirs gagnent double, ce qui n'arrive pas souvent. »

Étudié quelques années plus tard par le mathématicien français Pierre Rémond de Montmort (1678-1719) dans son *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard*, ce jeu se révèle presque équitable, comme le montre un calcul assez simple. Sachant que la personne qui lance les noyaux a misé A unités et que son adversaire en a misé B , le gain espéré du premier vaut $(132B - 126A)/256$ de sorte que si $A = B$, le jeu procure un très léger avantage à la personne qui lance les noyaux¹.

Généralisation

Dans son ouvrage, Montmort propose en outre l'extension suivante du problème :

« L'on suppose que les huit noyaux ont chacun quatre faces, savoir une blanche, une noire, une verte & une rouge. Pierre sera celui qui jette les noyaux, Paul sera l'autre Joueur. »

« Si les noyaux ayant été jettés au hazard, il se trouve les quatre couleurs, Paul donnera B à Pierre. S'il n'y en a que de trois couleurs, Paul lui donnera $3B$; & s'il n'y en a que d'une seule couleur, c'est à dire, si les huit noyaux sont ou tous blancs ou tous noirs, ou tous verts ou tous rouges, Paul lui donnera $4B$; enfin s'il n'y en a que de deux couleurs, Pierre donnera à Paul $2A$. »

« Cela posé, on demande de quel côté est l'avantage, & quel est cet avantage, en supposant que A ait à B un rapport quelconque. »

Montmort écrit alors ce qui suit, sans fournir de détails :

« L'on trouvera ... que si $B = A$, Paul aura de l'avantage à ce jeu ; mais ce ne seroit que de cette fraction $233/16\ 384$, ce qui n'est à peu près que la soixante & dixième partie de l'unité ; & par conséquent afin que la condition de Pierre & de Paul fussent égales, il faudroit que B fût $= 11\ 592A/11\ 359$, c'est à dire que Pierre devoit mettre au jeu onze mil cinq cens cinquante-deux contre Paul onze mil trois cens cinquante-neuf. »

Est-ce bien le cas ?

Cette question, posée de façon énigmatique à la toute fin de l'article¹, laissait entendre que non. De fait, on va montrer ici que la solution, telle qu'énoncée, est erronée. Mais on verra aussi qu'une légère modification de la formulation du problème conduit à une solution très proche de celle annoncée par Montmort.

Résolution du problème original

Pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, le nombre de façons d'obtenir exactement i couleurs parmi 4 est donné par la formule

$$C_4^i \times S(8, i) \times i!,$$

où, en général,

- le coefficient C_k^i donne le nombre de façons de choisir i couleurs parmi k ;
- le nombre de Stirling de deuxième espèce, $S(n, i)$, fournit le nombre de façons de partitionner un ensemble de n éléments en i sous-ensembles non vides ;
- la factorielle $i!$ représente le nombre de permutations de i objets distincts.

1. C. Genest (2024). Le jeu des noyaux. Accromath, 19 (2), 18-21.

On dispose en outre de la formule suivante pour le calcul du terme b) :

$$S(n, i) = \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \frac{j^n}{j!(i-j)!}.$$

Les calculs sont détaillés dans le tableau ci-contre. Noter que le total est $65\,536 = 4^8$, comme il se doit.

Procédant comme dans l'article déjà paru sur le sujet¹, observons maintenant que si Pierre mise A et que Paul mise B , alors le gain algébrique Y de Pierre satisfait aux conditions suivantes :

- Y vaut $4B$ si $i=1$; • Y vaut $-2A$ si $i=2$;
- Y vaut $3B$ si $i=3$; • Y vaut B si $i=4$.

Le gain moyen de Pierre est donc

$$E(Y) = (4 \times 4B + 23\,184 \times 3B + 40\,824 \times B - 1\,524 \times 2A) / 65\,536,$$

ou encore

$$E(Y) = (110\,392B - 3\,048A) / 65\,536.$$

Si $A = B$, c'est donc Pierre qui a l'avantage, et non Paul, comme Montmort l'affirme. De plus, l'avantage de Pierre est énorme car pour rendre le jeu équitable, il faudrait que

$$A/B = 110\,392 / 3\,048 \approx 36,21785.$$

Manifestement, il y a maladresse. Soit Montmort s'est trompé dans ses calculs, soit l'énoncé du problème ne correspond pas à ce qu'il avait en tête.

Une solution possible

Connaissant la réputation de Montmort, mathématicien royal, il semble peu probable qu'il ait commis une faute aussi grossière. Il faut donc chercher ailleurs une explication.

Une option très attrayante consiste à interchanger les paiements correspondant aux cas $i=2$ et $i=3$. On obtient alors la structure de gains suivante :

- Y vaut $4B$ si $i=1$; • Y vaut $3B$ si $i=2$;
- Y vaut $-2A$ si $i=3$; • Y vaut B si $i=4$.

Par suite, on trouve

$$E(Y) = (4 \times 4B + 1\,524 \times 3B + 40\,824 \times B - 23\,184 \times 2A) / 65\,536,$$

ou encore

$$E(Y) = (45\,412B - 46\,368A) / 65\,536.$$

Si $A = B$, c'est alors bel et bien Paul qui a l'avantage, comme Montmort l'affirme. De plus, le jeu s'avère équitable lorsque $A/B = 45\,412 / 46\,368 = 11\,353 / 11\,592$.

Cette solution se rapproche beaucoup de celles proposées par Montmort, selon que l'on se fie à son expression en chiffres ou en lettres.

Conclusion

De toute évidence, la solution du problème tel que formulé par Montmort est erronée. Toutefois, elle devient correcte sous les trois conditions suivantes :

a) On interchange les paiements pour les cas $i=2$ et $i=3$.

b) On remplace un 9 par un 3 dans la représentation chiffrée de la solution de Montmort, c'est-à-dire que l'on remplace $A/B = 11\,359 / 11\,592$ par $A/B = 11\,353 / 11\,592$.

c) On fait fi de la formulation en mots de sa solution.

Les énoncés b) et c) sont raisonnables puisque, d'une part, il est assez facile de confondre un 3 et un 9 à l'écrit, et que d'autre part, la réponse en lettres a suivi et non précédé le calcul numérique.

Quant à l'énoncé a), il semble d'autant plus plausible que si $A = B$, l'avantage de Paul est de l'ordre de $239 / 16\,384 \approx 0,01458$, qui est également très proche de la valeur annoncée par Montmort, soit $233 / 16\,384 \approx 0,01422$. Encore une fois, il semble qu'un 9 et un 3 aient été confondus. Mais dans un cas comme dans l'autre, on remarque, à l'instar de Montmort, que ceci

« n'est à peu près que la soixante & dixième partie de l'unité »,

puisque $1/70 \approx 0,01428$.

D'aucuns s'étonneront peut-être que des fautes se glissent parfois dans les ouvrages de mathématiques. Cela pourra même leur paraître d'autant plus improbable lorsque l'auteur est célèbre. Cependant, nul n'est à l'abri d'une distraction et, comme le rappelle le dicton latin, *Errare humanum est... perseverare diabolicum!*

Termes				
i	a	b	c	Produit
1	4	1	1	4
2	6	127	2	1 524
3	4	966	6	23 184
4	1	1 701	24	40 824
Σ				65 536

