

Hiver-printemps 2025

Solutions

Balades algébriques du temps jadis

1. S'agissant du contexte aujourd'hui représenté par le truchement de l'équation quadratique $x^2 + 10x = 39$, al-Khwarizmi s'exprime comme suit, en mots :

Un carré et dix de ses racines sont égaux à trente-neuf.

Et il en décrit la solution en ces termes (voir l'article d'Accromath, p. 8) :

La règle est de prendre la moitié des racines, soit cinq, que tu multiplies par elle-même. Cela donne vingt-cinq. En y ajoutant trente-neuf, tu obtiens soixante-quatre. Tu prends la racine, qui est huit, et enlève-lui la moitié du nombre des racines, qui est cinq. Il reste donc trois, qui est la racine.

Dénotant par x la solution recherchée et transcrivant mot à mot en symboles arithmétiques la démarche proposée par al-Khwarizmi, on peut donc écrire

$$x = \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 39} - \frac{10}{2}.$$

c'est-à-dire plus précisément

$$x = \sqrt{5^2 + 39} - 5 = \sqrt{64} - 5.$$

Et on obtient ainsi $x = 8 - 5 = 3$.

Les « gestes algébriques » qui précèdent correspondent bien au cadre géométrique des deux figures de la p. 8 du texte.

Passant au cas général,

« *Un carré et b de ses racines sont égaux à un nombre c* »,

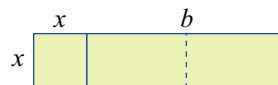
la méthode d'al-Khwarizmi peut se voir de la manière suivante, en remplaçant les valeurs numériques qu'il utilise par les coefficients b et c de l'équation quadratique $x^2 + bx = c$:

La règle est de prendre la moitié des racines, soit $b/2$, que tu multiplies par elle-même. Cela donne $(b/2)^2$. En y ajoutant c , tu obtiens $(b/2)^2 + c$. Tu prends la racine,¹ et enlève-lui la moitié du nombre des racines, qui est $b/2$.

La racine recherchée, c'est-à-dire le côté x du carré de départ, peut donc s'exprimer de manière générale comme

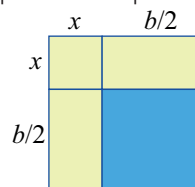
$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}. \quad (1)$$

La justification géométrique fournie par al-Khwarizmi en support à sa méthode, dans son traité *Kitab al-jabr wa'l-muqabala* (voir la section *Pour en savoir plus!*), peut se transposer comme suit au cas général. Partant d'une figure d'aire c , formée d'un carré de côté x jumelé à un rectangle de côtés b et x , on divise ce dernier rectangle en deux rectangles de côtés $\frac{b}{2}$ et x .



On peut alors réorganiser ces pièces de sorte à obtenir une figure en forme de « L » inversé – en vert pâle sur la figure suivante. (Une telle pratique remonte aux Mésopotamiens de l'Antiquité.)²

Ne perdons pas de vue que ce « L » est d'aire c .



Il est alors possible, en y ajoutant un carré (bleu) de côté $\frac{b}{2}$, d'obtenir un grand carré d'aire $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$ et donc de côté $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$. (On a ainsi « complété le carré », comme le veut le jargon scolaire.) Mais ce même côté étant de la forme $x + \frac{b}{2}$, on obtient alors immédiatement x , tel que donné par l'égalité (1) ci-haut.

1. Entendre, la racine carrée du nombre (ou de l'expression algébrique) ainsi obtenu.
2. Voir à ce propos Bernard R. Hodgson, « Tours de Babel... et tours de Bagdad. » Accromath, vol. 13, été-automne 2018, pp. 24-27 – et en particulier la discussion du premier problème de la tablette BM 13901 (pp. 24-26).

Note 1 :

Récrivant l'égalité $x^2 + bx = c$ sous la forme $x^2 + bx - c = 0$, on obtient une équation quadratique de discriminant $b^2 + 4c$. Appliquant la formule usuelle à cette équation, on voit que sa racine positive est donnée par

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2},$$

ce qui correspond bien à la valeur de x donnée en (1) ci-haut.

On aura compris que dans toute la discussion qui précède, on suppose que les coefficients b et c sont positifs. Une telle restriction est tout à fait dans l'esprit du cadre numérique de l'époque d'al-Khwarizmi.

2. L'identité en cause est bien sûr immédiate sur le plan algébrique, comme le montre la suite d'égalités suivante :

$$\begin{aligned} x - \frac{x+y}{2} &= x - \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2} \right) = x - \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \\ &= \frac{x}{2} - \frac{y}{2} = \frac{x-y}{2}. \end{aligned}$$

Le but de ce problème est de faire ressortir que le fait géométrique sous-jacent, vu en termes de longueur de segments, est connu depuis fort longtemps, et ce en faisant appel à une démarche qui est purement géométrique.

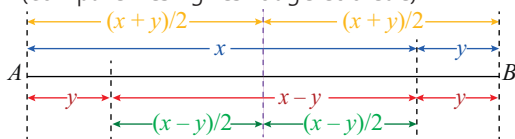
La figure qui suit (que nous allons construire pas à pas) montre un segment AB de longueur $x + y$. Dans un premier temps, on y voit (en bleu) les deux longueurs x et y .

(À noter que nous supposons ici que $x > y$, car nous avons besoin de la différence $x - y$, qui doit être une longueur de segment géométrique, donc positive. Le cas $x = y$ ne présente pas d'intérêt en l'occurrence.)

Une manière de faire ressortir la longueur $x - y$ est de reproduire au point A un segment de longueur y . Un segment de longueur $x - y$ est alors créé (en rouge), en lien avec le fait que

$$y + (x - y) = x$$

(comparer les lignes rouge et bleue).



De la symétrie de la ligne rouge (divisée en trois parties $y / (x - y) / y$), il découle que le trait ver-

tical hachuré (violet) dressé au milieu du segment AB coupe le segment de longueur $x - y$ lui-même en deux parties égales, ce que l'on indique à la ligne verte.

Or ce même trait violet coupant bien sûr le segment AB en deux parties égales (voir la ligne orange), il en ressort immédiatement que

$$x - \frac{x+y}{2} = \frac{x-y}{2},$$

tel que désiré. (Comparer à cet effet la longueur x de la ligne bleue avec la partie gauche de la ligne orange et la partie droite de la ligne verte.)

Note 2 :

L'identification et la mise en œuvre des résultats géométriques discutés ici remontent notamment aux méthodes développées en Mésopotamie environ 2000 ans avant notre ère. Voir à ce propos mon texte d'*Accromath* mentionné à la note infra-paginale 2 ci-haut, et en particulier la discussion autour de la tablette YBC 4663, aux pp. 26-27.

Tel que mentionné dans le présent article d'*Accromath* (p. 8), un tel emploi de méthodes géométriques en vue de résoudre des problèmes d'algèbre a fortement influencé al-Khwarizmi, plus de 2500 ans plus tard.

3. Dans le texte d'Euclide II.6, il est question de deux segments de droite d et e dont on fait d'abord la somme $d + e$, puis à l'aide desquelles on construit dans un premier temps

(α) un rectangle de côtés $d + e$ et e .

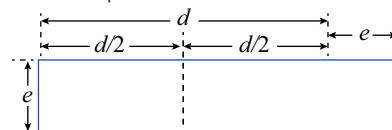
On y considère aussi deux carrés, à savoir :

(β) le carré de côté $\frac{d}{2}$, et

(γ) le carré de côté $\frac{d}{2} + e$.

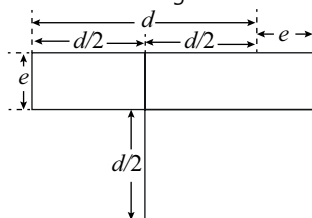
Il s'agit donc de bâtir une figure englobant de manière appropriée les trois quadrilatères (α), (β) et (γ).

Partant de (α), le rectangle $d + e$ par e , sur lequel on marque la moitié de d ,



il faut donc voir comment y ajouter astucieusement les deux carrés (β) et (γ).

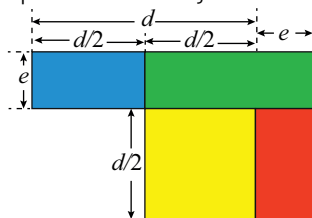
Considérant d'abord le carré (γ) de côté $\frac{d}{2} + e$, on peut en venir à la figure suivante,



dans laquelle le carré (γ) chevauche partiellement le rectangle initial.

On cherchera ensuite à repérer « joliment » dans ce cadre le carré (β) de côté $\frac{d}{2}$ de sorte à pouvoir l'ajouter au rectangle (α).

La figure suivante (semblable à celle utilisée par Euclide) permet finalement de bien repérer les trois quadrilatères en jeu.



On y voit :

- le grand rectangle (α), en bleu et vert, de côtés $d + e$ et e ,
- le carré jaune (β), de côté $\frac{d}{2}$, et
- le grand carré (γ) de côté $\frac{d}{2} + e$, composé des trois régions verte, jaune et rouge.

Or les rectangles bleu et rouge sont manifestement congruents, étant tous deux de côtés $\frac{d}{2}$ et e . Le résultat II.6 d'Euclide est donc ainsi vérifié.

Autrement dit, en termes des couleurs des régions en jeu, l'énoncé de II.6 équivaut à

« bleu + vert + jaune = rouge + vert + jaune ».

Pour ce qui est de l'interprétation algébrique de II.6, insistons sur le fait qu'Euclide s'intéresse ici à l'aire des quadrilatères en cause. Sa proposition affirme donc que $(\alpha) + (\beta) = (\gamma)$, les figures étant considérées selon leur aire. Elle revient ainsi à l'identité algébrique suivante :

$$(d + e) \times e + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{d}{2} + e\right)^2, \quad (2)$$

dont la validation en utilisant le symbolisme moderne est des plus élémentaires.

Note 3 :

Dans l'égalité (2), posons $x = d + e$ et $y = e$. Il s'ensuit alors que $d = x - y$ et que $\frac{d}{2} + e = \frac{x + y}{2}$, de sorte que (2) peut se récrire sous la forme

$$xy + \left(\frac{x - y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x + y}{2}\right)^2.$$

On reconnaît ici l'interprétation algébrique de la proposition II.5 des *Éléments* d'Euclide – voir à ce propos la discussion dans l'article d'*Accromath*, p. 9.

Autrement dit, en termes algébriques modernes, les deux propositions II.5 et II.6 sont équivalentes. Mais ce n'est bien sûr pas ainsi qu'Euclide voyait les choses. Bien que les démonstrations géométriques qu'il donne de ces deux propositions aient des points en commun, elles constituent pour lui des cas de figure distincts. (Voir à ce propos la discussion dans Bernard Vitrac, *Euclide d'Alexandrie, Les Éléments*, volume 1. PUF, 1990, pp. 336-338.)

Note 4 :

Les énoncés des propositions II.1, II.5 et II.6 d'Euclide, tels que cités dans l'article d'*Accromath* et dans cet exercice, utilisent l'expression « le rectangle contenu par » tel ou tel segment. C'est là la façon retenue par Euclide pour parler du lien entre un rectangle et ses côtés.

C'est à la définition 1 du Livre II qu'Euclide introduit ce vocabulaire, en stipulant qu'un « rectangle est dit être contenu par deux des droites contenant un des angles droits » (Bernard Vitrac, *op. cit.*, p. 325).

Note 5 :

Une dernière remarque, à propos de la traduction en français du texte d'Euclide.

Tel qu'indiqué dans la note infrapaginale de la p. 44 d'*Accromath*, l'énoncé de la proposition II.6 est tiré de l'édition de Bernard Vitrac (p. 335), mais avec de (très!) légères modifications.

Le texte de II.6, tel que reproduit dans Vitrac, se lit comme suit :

Si une ligne droite est coupée en deux parties égales et qu'une certaine droite lui soit ajoutée en alignement, le rectangle contenu par la droite entière plus la droite ajoutée et la droite

ajoutée, est, pris avec le carré sur sa moitié, égal au carré sur la droite composée de sa moitié et de la droite ajoutée.

J'ai cherché, dans la version reproduite dans *Accromath*, à préciser un peu les données en dénotant par d la droite de départ (la droite « entière ») et par e la droite « ajoutée ». Cela aide peut-être à mieux comprendre la phrase « pris avec le carré sur sa moitié ». (La moitié de quoi? La moitié de la droite entière, d .)

Je suis cependant conscient que mon énoncé de la p. 44 peut conserver une certaine ambiguïté dans ses derniers mots : « la droite composée de la moitié de d et de la droite ajoutée e ». Encore une fois, la moitié de quoi? Est-ce :

- [la moitié de d], donc $\frac{d}{2}$, de sorte qu'on s'intéresse à la droite $\frac{d}{2} + e$?
- [la moitié de d et de la droite ajoutée e], c'est-à-dire $\frac{d+e}{2}$, de sorte qu'on s'intéresserait alors à la droite $\frac{d+e}{2}$?

L'utilisation du mot « composé » suggère sans doute que c'est la première version qui prévaut...

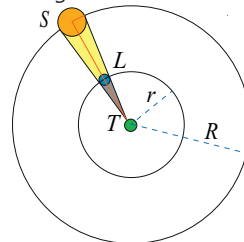
Cette situation illustre clairement une difficulté intrinsèque de l'« algèbre rhétorique », pour reprendre l'expression mentionnée à la p. 8 du texte d'*Accromath*. Une algèbre en mots, sans les symboles littéraux usuels (x, y, z, a, b, \dots), peut facilement devenir confuse. La clarté d'expression et la facilité de manipulation qu'introduit le symbolisme qui nous est aujourd'hui familier constituent, de manière évidente, un atout absolument essentiel dans nos démarches algébriques.

De manière plus générale, on ne saurait imaginer, par exemple, le développement du calcul différentiel et intégral sans la présence d'un symbolisme clair et efficace. C'est là qu'ont joué un rôle essentiel de pionniers des mathématiciens tels François Viète (1540-1603), mentionné dans l'introduction de l'article, ou encore René Descartes (1596-1650) et Pierre de Fermat (env. 1601-1665), pour ne nommer que ceux-là. Isaac Newton (1642-1727) et Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) pouvaient ainsi prendre appui sur un cadre symbolique déjà bien établi, quand ils ont conçu et créé leur nouveau « calcul ».

Mathématiques des éclipses

1. Soit r , le rayon de l'orbite lunaire et R , celui de l'orbite solaire. Soit l, t et s , les rayons respectifs de la Lune, de la Terre et du Soleil.

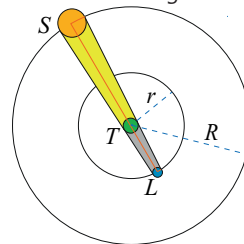
L'éclipse solaire est totale si le Soleil est complètement contenu dans le cône d'ombre de la Lune. Le cas limite entre éclipse totale et éclipse partielle est quand le cône d'ombre de la Lune est tangent au Soleil.



La distance entre le centre du Soleil et le sommet du cône est $R - t$, et celle entre le sommet du cône et le centre de la Lune est $r - t$. En regardant des triangles semblables au cas limite, on a donc $\frac{s}{R-t} = \frac{l}{r-t}$. L'éclipse est totale si $\frac{s}{R-t} \leq \frac{l}{r-t}$ et partielle si $\frac{s}{R-t} > \frac{l}{r-t}$.

2. Soit r , le rayon de l'orbite lunaire et R , celui de l'orbite solaire. Soit l, t et s , les rayons respectifs de la Lune, de la Terre et du Soleil.

L'éclipse lunaire est totale si la Lune est complètement contenue dans le cône d'ombre de la Terre. Le cas limite entre éclipse totale et éclipse partielle est quand la tangente au Soleil et à la Terre est aussi tangente à la Lune.



Soit X , la distance entre le centre de la Terre et le sommet du cône qui est en dehors de la figure. En regardant des triangles semblables on a $\frac{t}{X} = \frac{s}{X+R}$, d'où on tire $X = \frac{Xt}{s-t}$.

Maintenant, on a aussi $\frac{t}{X} = \frac{l}{X-r}$, ce qui donne, en remplaçant X par sa valeur :

$$\frac{1}{R} = \frac{l}{Rt - r(s-t)}$$

L'éclipse reste totale si $\frac{t}{X} \geq \frac{l}{X-r}$, ce qui donne $\frac{1}{R} \geq \frac{l}{Rt - r(s-t)}$.

Jeu de Nim

1. Le joueur A est en position gagnante s'il doit jouer lorsque le reste de la division par 4 du nombre de bâtonnets est différent de 1. Sa stratégie gagnante est de prendre un nombre de bâtonnets de sorte à ramener ce reste à 1, donc 1 bâtonnet si le reste est 2, 2 bâtonnets si le reste est 3 et 3 bâtonnets si le reste est 0. Le joueur B doit nécessairement ramener le reste à un nombre différent de 1. Etc.
2. La stratégie est la même que pour le jeu gourmand sauf dans les derniers coups. Le joueur A est en position gagnante s'il doit jouer quand les deux rangées n'ont pas le même nombre de bâtonnets. Il ramène les deux rangées au même nombre de bâtonnets. Lorsqu'il reste 2 bâtonnets dans chaque rangée, le joueur B a deux choix : soit prendre 1 bâtonnet, soit en prendre 2. Si B prend un bâtonnet, A prend les deux bâtonnets de l'autre rangée et B prend le dernier. Si B prend deux bâtonnets, A en prend un bâtonnet de l'autre rangée et B prend le dernier.
3. Pour la solution de ce numéro il faut utiliser que tout nombre $N < 2^n$ s'écrit de manière unique comme une somme de puissances distinctes 2^i de 2: $i < n$, où les indices de i apparaissant dans la somme caractérisent le nombre N (c'est équivalent à l'écriture en binaire des nombres entiers).

Dans cette variante du jeu de Nim, on décompose les nombres de bâtonnets de chaque rangée en somme de puissances distinctes de 2 et on compte combien de fois chaque puissance de 2 apparaît dans l'ensemble des rangées. Le joueur A est en position gagnante s'il doit jouer lorsqu'au moins une puissance de 2 apparaît un nombre impair de fois. Soit 2^i la plus grande puissance de 2 qui apparaît un nombre impair de fois. La stratégie de A est alors d'enlever des bâtonnets dans la rangée qui contient 2^i et qui a le plus de bâtonnets, soit N , parmi les rangées contenant 2^i . Dans cette rangée

- a) il enlève 2^i bâtonnets;
- b) si 2^j , où $j < i$ est une autre puissance de 2 qui apparaît un nombre impair de fois, il enlève 2^j bâtonnets si 2^j apparaît dans l'écriture de N , et il rajoute 2^j bâtonnets si 2^j n'apparaît pas dans l'écriture de N .

La somme des puissances 2^j pour $j < i$ vaut $2^i - 1$

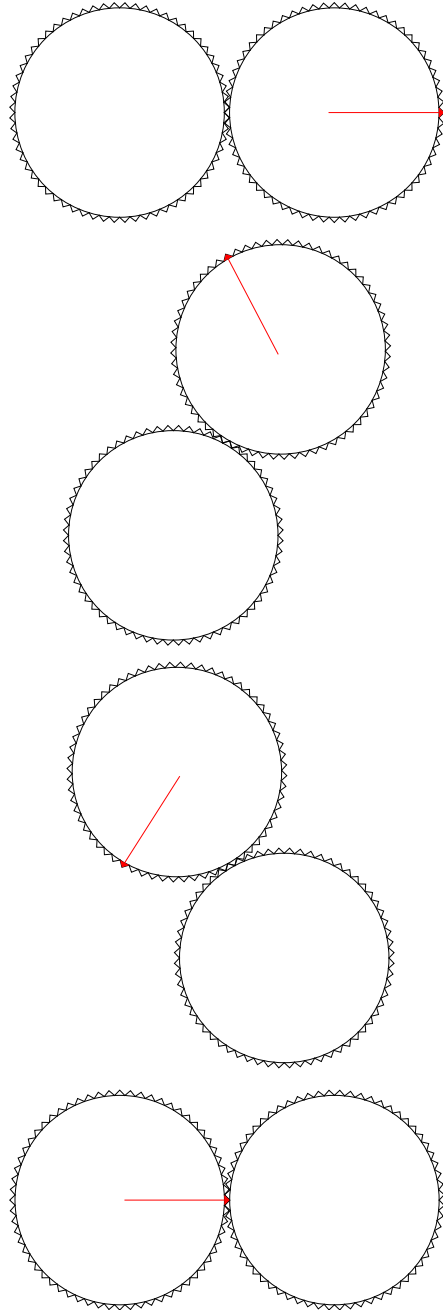
et donc, au total, le joueur A aura enlevé des bâtonnets dans la rangée et, ce faisant, il aura ramené toutes les occurrences des puissances de 2 à un nombre pair d'occurrences. Lorsque B joue, il ne peut enlever des bâtonnets que dans une seule rangée. Donc, il change la parité des puissances de 2 affectées par le nombre de bâtonnets qu'il enlève et, par suite, au moins une puissance de 2 apparaît un nombre impair de fois. En itérant, on va se retrouver avec deux rangées, et si les puissances 2^i apparaissent en nombre pair, c'est que les deux rangées ont le même nombre d'éléments, le cas qu'on connaît déjà.

Histoires de dés

1. Si X et Y représentent les résultats du jet de deux dés standard indépendants, montrer par énumération que $P(X > Y) = 15/36 = P(Y > X)$ tandis que $P(X = Y) = 6/36$. Supposons maintenant que X et Y représentent les résultats obtenus sur les faces opposées lors du jet d'un seul dé conventionnel. Montrer par énumération qu'on a alors $P(X > Y) = 1/2 = P(Y > X)$. Pouvez-vous penser à un réarrangement des points sur les faces du dé qui ferait en sorte que $P(X > Y) = 5/6$ et $P(Y > X) = 1/6$?
2. Le temps de retour d'un événement est le nombre moyen d'observations nécessaire pour qu'il se produise. Par exemple, la Lune met en moyenne 27 jours, 7 heures, 43 minutes et 12 secondes pour accomplir une orbite autour de la Terre ; c'est sa révolution sidérale. Calculez le temps de retour T du nombre 6 dans une suite (potentiellement infinie) de jets mutuellement indépendants d'un dé conventionnel, c'est-à-dire sachant que la probabilité que $T = 1$ est $1/6$, la probabilité que $T = 2$ est $1/36$, et ainsi de suite.

Le cœur dans tous ses états

2. Voici quatre captures tracées avec des roues dentées (!) pour montrer qu'il n'y a pas glissement.



Après avoir effectué une demi-rotation, l'ours regardera vers la droite comme dans la position initiale. (Voir la vidéo intitulée Cardioïde02).



3. Les coordonnées du point $i = m - 1$ sont $(\cos\theta_{m-1}, \sin\theta_{m-1})$ où $\theta_{m-1} = (m-1)\pi/m$.

Le point $2i \bmod n = n - 2$ où $n = 2m$ lui, a comme coordonnées $(\cos\theta_{n-2}, \sin\theta_{n-2})$ où $\theta_{n-2} = (n-2)\pi/m$. L'équation paramétrique (de paramètre t) le joignant est

$$t(\cos\theta_{m-1}, \sin\theta_{m-1}) + (1-t)(\cos\theta_{n-2}, \sin\theta_{n-2}).$$

Il est possible de calculer l'équation de la droite liant les points $m+1$ et 2, mais par symétrie, le point d'intersection des deux cordes reposera sur l'axe des x . Ainsi, le point d'intersection sera déterminé pour la droite ci-dessus par la valeur de $t = t_0$ où la seconde coordonnée s'annule :

$$t_0 \sin\theta_{m-1} + (1-t_0) \sin\theta_{n-2} = 0.$$

c'est-à-dire en

$$t_0 = \frac{\sin\theta_{n-2}}{\sin\theta_{n-2} - \sin\theta_{m-1}}.$$

La coordonnée horizontale du point d'intersection est donc, après un peu de calcul

$$\begin{aligned} & t_0 \cos\theta_{m-1} + (1-t_0) \cos\theta_{n-2} \\ &= \cos\theta_{n-2} + \frac{\cos\theta_{m-1} - \cos\theta_{n-2}}{1 - \sin\theta_{m-1}/\sin\theta_{n-2}}. \end{aligned}$$

Lorsque $m \rightarrow \infty$, les angles $\theta_{m-1} \rightarrow \pi$ et $\theta_{n-2} \rightarrow 2\pi$ et le numérateur devient -2 . Pour simplifier le dénominateur, il faut réécrire

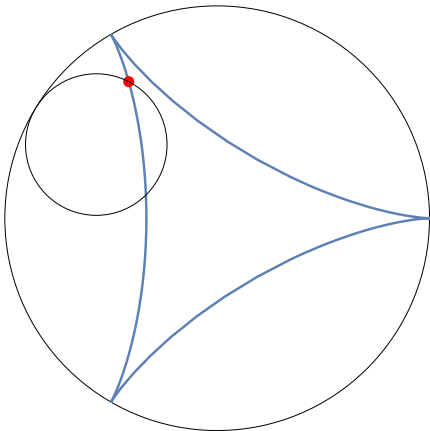
$$\begin{aligned} \sin\theta_{m-1} &= \sin\left(\frac{(m-1)\pi}{m}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{m}\right) \\ &= -\sin\left(-\frac{\pi}{m}\right) \rightarrow \frac{\pi}{m}, \end{aligned}$$

où la dernière étape suit du fait que $\sin x$ est presque égal à x lorsque x est petit. De même $\sin\theta_{n-2} \rightarrow -\frac{2\pi}{m}$. Remplaçant ces expressions dans l'expression de la coordonnée horizontale

du point d'intersection, on trouve que cette coordonnée est simplement $-1/3$.

4. Le triangle ORT est isocèle. Son angle $\angle ROT$ est donc égal à $\omega - \theta = \pi - 2\alpha$. Puisque $\theta = \pi - 2\alpha$ (considérer le triangle isocèle ORS), alors $\omega = 2\theta$. Ainsi l'enveloppe des cordes de Cremona est la cardioïde !
5. La courbe deltoïde est obtenue en faisant tourner un cercle de rayon $2/3$ à l'intérieur d'un cercle de rayon 2 centré en l'origine. Supposons qu'au départ la plume située au pourtour du petit cercle soit située au point $(1, 0)$. Au cours d'une rotation complète ramenant le petit cercle en son point d'origine, la plume touchera le grand cercle en trois points d'angle au centre $0, 2\pi/3$ et $4\pi/3$. Entre les deux premiers points, le petit cercle aura tourné autour de son centre d'un angle $4\pi/3$ dans le sens horaire. En copiant l'argument utilisé pour obtenir le paramétrage de la cardioïde, on obtient celui pour la deltoïde :

$$\frac{4}{3}(\cos\theta, \sin\theta) + \frac{2}{3}(\cos 2\theta, \sin 2\theta).$$



(Voir la vidéo intitulée Cardioïde02.)