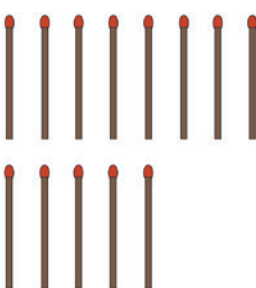


# Section problèmes

## Euclide II.6

Si une droite  $d$  est coupée en deux parties égales et qu'une certaine droite  $e$  lui soit ajoutée en alignement, le rectangle contenu par la droite entière  $d$  plus la droite ajoutée  $e$  et la droite ajoutée  $e$  est, pris avec le carré sur la moitié de  $d$ , égal au carré sur la droite composée de la moitié de  $d$  et de la droite ajoutée  $e$ .<sup>1</sup>



## Balades algébriques du temps jadis

1. En vous inspirant du texte (voir page 8) où al-Khwarizmi décrit sa méthode de résolution de l'équation  $x^2 + 10x = 39$ , donner la solution (positive) générale de  $x^2 + bx = c$ .
2. On s'intéresse à l'identité algébrique élémentaire

$$x - \frac{x+y}{2} = \frac{x-y}{2}.$$

En donner une preuve visuelle en partageant de façon appropriée un segment de longueur  $x + y$  (avec  $x > y$ ).

*Tuyau* : Le segment  $x - y$  joue un rôle important.

3. On s'intéresse à la proposition II.6 des *Éléments* d'Euclide.

Illustrer cette proposition à l'aide d'une figure appropriée, et en donner une interprétation algébrique.

*Tuyau* : Agencer convenablement les trois quadrilatères en jeu – un rectangle et deux carrés.

## Mathématiques des éclipses

1. Dans le modèle planaire, explorer les conditions sur les rayons du Soleil, de la Terre et de la Lune et sur les rayons des orbites de la Terre et de la Lune sous lesquelles une éclipse solaire est totale ou annulaire.
2. Dans le modèle planaire, explorer les conditions sur les rayons du Soleil, de la Terre et de la Lune et sur les rayons des orbites de la Terre et de la Lune interdisant une éclipse lunaire annulaire.

## Jeu de Nim

1. Trouver la stratégie gagnante pour le jeu de Nim à une rangée dans la version misère (chaque joueur prend à son tour de 1 à 3 bâtonnets et celui qui prend le dernier bâtonnet perd).

2. Trouver la stratégie gagnante pour le jeu de Nim à deux rangées dans la version misère (chaque joueur prend à son tour autant de bâtonnets que désiré dans une seule rangée et celui qui prend le dernier bâtonnet perd).
3. Montrer que la stratégie décrite pour le jeu de Nim à un nombre quelconque de rangées dans la version gourmande fonctionne toujours (chaque joueur prend à son tour autant de bâtonnets que désiré dans une seule rangée et celui qui prend le dernier bâtonnet gagne).

## Histoires de dés

1. Si  $X$  et  $Y$  représentent les résultats du jet de deux dés standard indépendants, montrer par énumération que  $P(X > Y) = 15/36 = P(Y > X)$  tandis que  $P(X = Y) = 6/36$ .

Supposons maintenant que  $X$  et  $Y$  représentent les résultats obtenus sur les faces opposées lors du jet d'un seul dé conventionnel. Montrer par énumération qu'on a alors  $P(X > Y) = 1/2 = P(Y > X)$ . Pouvez-vous penser à un réarrangement des points sur les faces du dé qui ferait en sorte que  $P(X > Y) = 5/6$  et  $P(Y > X) = 1/6$  ?

2. Le temps de retour d'un événement est le nombre moyen d'observations nécessaire pour qu'il se produise. Par exemple, la Lune met en moyenne 27 jours, 7 heures, 43 minutes et 12 secondes pour accomplir une orbite autour de la Terre ; c'est sa révolution sidérale. Calculez le temps de retour  $T$  du nombre 6 dans une suite (potentiellement infinie) de jets mutuellement indépendants d'un dé conventionnel, c'est-à-dire sachant que la probabilité que  $T = 1$  est  $1/6$ , la probabilité que  $T = 2$  est  $5/36$ , et ainsi de suite.

1. Bernard Vitrac, *Euclide d'Alexandrie, Les Éléments, volume 1, PUF, 1990, p. 335.* (Texte original légèrement modifié.)