Grâce aux travaux de Georg Cantor (1845-1918), l'infini est devenu objet d'étude mathématique. Pour acquérir définitivement ses lettres de noblesse par l'arithmétisation de l'analyse.

Georg Cantor
1845-1918

André Ross
Professeur retraité

Vers l'infini et plus loin encore

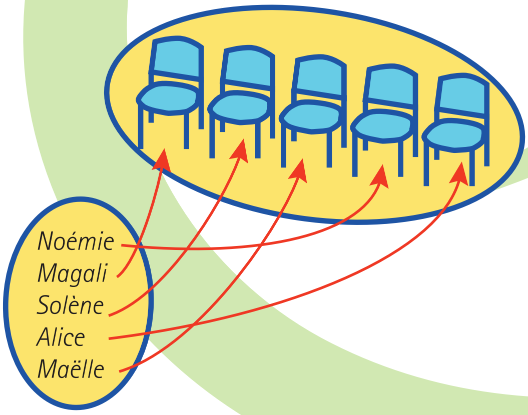
Georg Cantor est né à St-Pétersbourg en Russie où il fréquente l'école primaire. La santé fragile de son père conduit la famille, en quête d'un climat moins rude, à émigrer en Allemagne en 1856. Cantor y fait ses études secondaires. Après des études en mathématiques, il obtient son doctorat de l'université de Berlin en 1867 et débute sa carrière de professeur dans une école de filles à Berlin avant d'être nommé professeur à l'université de Halle en 1870, où il fit carrière. En 1874, il commence à correspondre avec Richard Dedekind (1831-1916) qu'il a rencontré lors d'un séjour en Suisse.

Richard Dedekind
1831-1916

Notion de bijection

Cantor base son étude sur la notion de bijection entre deux ensembles. Voyons un exemple de bijection.

Supposons que cinq personnes se présentent dans une salle d'attente où il y a cinq chaises. Chacune de ces personnes pourra alors choisir une chaise et s'asseoir. Il y a plusieurs bijections possibles, ou plusieurs façons d'assigner une chaise à chacune des personnes, mais on peut assurer que chacune des personnes pourra s'asseoir.



Puisqu'il y a une bijection entre ces deux ensembles, on peut conclure que chacun des ensembles a le même nombre d'éléments. C'est en utilisant cette notion de bijection que Cantor a « classifié » les ensembles infinis.

Ensembles dénombrables

On sait depuis Euclide[1] (vers -325 à –265) que l'ensemble des nombres naturels est infini. De plus, Galilée (1564-1642) avait remarqué que l'ensemble infini des carrés des nombres naturels peut être mis en bijection avec l'ensemble des nombres naturels. Il y a donc autant d'éléments dans les deux ensembles.

$$\begin{array}{llllllll} \mathbb{N} = \{0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\ \ldots\} \\ \ \ \ \ \ \ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \mathrm{P} = \{0 & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36\ \ldots\} \end{array}$$

Bijection entre l'ensemble des nombres naturels et l'ensemble de leurs carrés.

Cantor appelle « *ensemble dénombrable* » un ensemble qui est en bijection avec l'ensemble des nombres naturels. Galilée avait donc constaté que l'ensemble des carrés des nombres naturels est un ensemble dénombrable.

Ce n'est pas le seul ensemble dénombrable, l'ensemble des naturels pairs est lui aussi un ensemble dénombrable comme on peut le voir dans la figure suivante. Avec son correspondant Dedekind, Cantor en vient

1 *Euclide*, Éléments, Livre IX, proposition 20. *«Les nombres premiers sont en plus grand nombre que tout nombre prédéterminé ». Traduction et commentaires. Bernard Vitrac.*

à la conclusion qu'un ensemble est infini s'il peut être mis en bijection avec un de ses sous-ensembles propre, c'est-à-dire un sous-ensemble différent de l'ensemble lui-même.

$\mathbb{N} =$	0	1	2	3	4	5	6	...
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	
$2\mathbb{Z} =$	0	2	4	6	8	10	12	...

Bijection entre l'ensemble des nombres naturels et l'ensemble des pairs.

L'ensemble des entiers est également un ensemble dénombrable comme le montre la disposition suivante.

$\mathbb{N} =$	0	1	2	3	4	5	6	...
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	
$\mathbb{Z} =$	0	1	–1	2	–2	3	–3	...

Bijection entre l'ensemble des nombres naturels et l'ensemble des entiers.

Il existe ainsi plusieurs ensembles pour lesquels on peut définir une bijection avec l'ensemble des nombres naturels. L'ensemble des nombres pairs, l'ensemble des nombres premiers, l'ensemble des nombres triangulaires, l'ensemble des nombres carrés sont des ensembles dénombrables. Mais, existe-t-il des ensembles qui ne sont pas dénombrables ?

L'ensemble des nombres rationnels semble un bon candidat pour être non dénombrable. En effet, l'ensemble des nombres rationnels est un *ensemble dense*, ce qui signifie qu'entre deux nombres rationnels donnés, il est toujours possible de trouver un autre nombre rationnel et en fait, une infinité d'autres nombres rationnels. Par exemple, entre 0 et 1, on trouve les rationnels

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

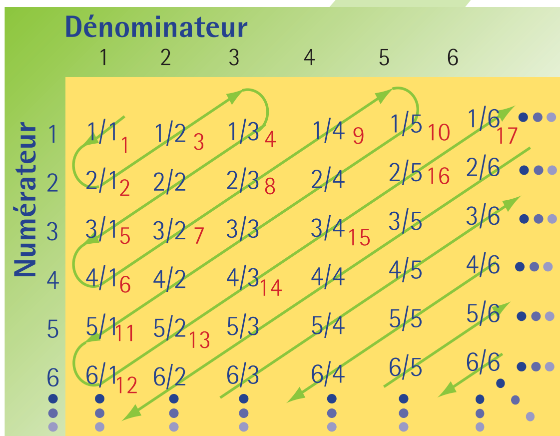
entre 0 et 1/2, on trouve les rationnels

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \ldots, \frac{n}{2n+1}, \ldots$$

entre 0 et 1/4, on trouve les rationnels

$$\frac{1}{5}, \frac{2}{9}, \frac{3}{13}, \frac{4}{17}, \frac{5}{21}, \ldots, \frac{n}{4n+1}, \ldots$$

Intuitivement, cette propriété de densité porte à penser que le nombre d'éléments de l'ensemble des rationnels est plus grande que celui des naturels. Cependant, en 1873, Cantor a montré que ce n'était pas le cas. La difficulté de la démonstration consistait à définir une bijection en tenant compte de la nature des deux ensembles. En effet, il faut s'assurer qu'à chaque nombre rationnel est associé un nombre naturel et un seul et, réciproquement, qu'à chaque nombre naturel est associé un et un seul nombre rationnel. Pour définir cette correspondance, Cantor a disposé les nombres rationnels sous forme de tableau. Les lignes représentent les numérateurs et les colonnes représentent les dénominateurs. On peut écrire tous les nombres rationnels en les disposant comme dans la figure suivante.



Les nombres apparaissant plusieurs fois sous différentes formes, comme 1/2, 2/4, 3/6, représentent le même nombre rationnel. En ne conservant que la forme la plus simple de chacun des nombres du tableau, on peut alors associer un nombre naturel et un seul à chacun des nombres rationnels en suivant le sens des flèches.

La correspondance est donc une bijection et l'ensemble des nombres rationnels est dénombrable.

(Voir vidéo 01-CantorDénombrables]

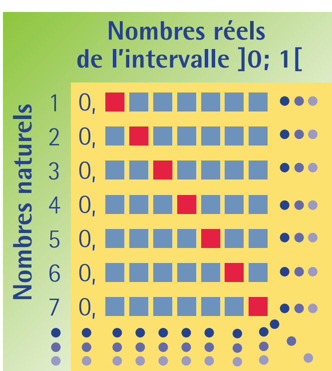
Mais alors, faut-il en conclure que tous les ensembles de nombres sont dénombrables ?

Ensembles non dénombrables

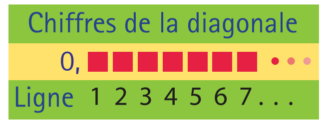
En 1874, Cantor démontre que l'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable. Pour montrer qu'un ensemble est dénombrable, il suffit de définir une bijection entre cet ensemble et l'ensemble des nombres naturels, ce qui signifie que l'on peut «compter» les éléments de cet ensemble. Mais pour montrer qu'un ensemble est non dénombrable, il faut montrer qu'il est impossible de définir une telle bijection. Il faut donc procéder par l'absurde. C'est ce que Cantor a fait pour montrer que l'ensemble des nombres réels de l'intervalle]0; 1[n'est pas dénombrable. La preuve consiste à supposer qu'il existe une bijection entre l'ensemble des nombres naturels et l'ensemble des nombres réels de l'intervalle]0; 1[et montrer que cela entraîne une contradiction. Voici comment il procède.

Il suppose que l'on peut dénombrer les nombres réels de l'intervalle]0; 1[et les exprime sous forme de suites décimales illimitées. Par exemple, 1/3 s'écrit 0,3333..., 4/9 s'écrit 0,4444..., ainsi de suite. On peut alors écrire ces nombres en associant à chacun d'eux un nombre naturel.

Dans le tableau à gauche, chacun des carrés représente un chiffre du nombre exprimé en suite décimale illimitée. Chaque nombre de l'intervalle]0; 1[est alors associé à un nombre naturel par la bijection dont nous avons supposé l'existence par hypothèse. Si on peut montrer qu'il existe au moins un nombre de l'intervalle]0; 1[qui n'apparaît pas dans la liste ci-haut, on aura démontré que la correspondance n'est pas une bijection et que l'ensemble des nombres de l'intervalle]0; 1[n'est pas dénombrable. La démonstration de Cantor consiste à construire un nombre différent de tous ceux apparaissant dans le tableau.



Il considère le nombre formé par les chiffres sur la diagonale. Celui-ci a un développement décimal illimité.

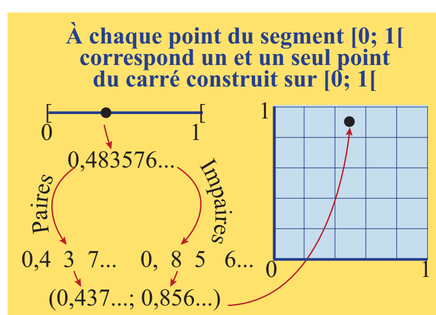


Changeons le premier chiffre de ce nombre. S'il est différent de 5, on le change pour un 5 et s'il est égal à 5, on le change pour un 2. On obtient alors un nombre différent de celui de la ligne 1. Changeons maintenant le deuxième chiffre en appliquant la même procédure. On obtient un nombre différent de celui de la première ligne et de celui de la deuxième ligne du tableau. En poursuivant ainsi, on obtient un nombre différent de chacun des nombres du tableau de correspondance. Par conséquent, ce nombre n'est associé à aucun nombre naturel. Ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle l'ensemble des nombres réels compris entre 0 et 1 est dénombrable. Il faut conclure que la correspondance n'est pas une bijection et que l'ensemble des nombres réels compris entre 0 et 1 n'est pas dénombrable. De plus, puisque l'intervalle]0; 1[est un sous-ensemble propre de l'ensemble des nombres réels on peut conclure que l'ensemble $\mathbb{R}$ est un infini non dénombrable.

(Voir vidéo 02-CantorNonDénombrable).

Ensemble de Cantor

Le 5 janvier 1874, Cantor écrit à Dedekind pour lui expliquer comment il a défini une bijection faisant correspondre à chaque point du segment de droite ouvert [0; 1[, un et un seul point du carré construit sur ce segment. Il précise « je le vois, mais je ne le crois pas ». La figure suivante donne une idée de la façon dont cette correspondance a été définie.

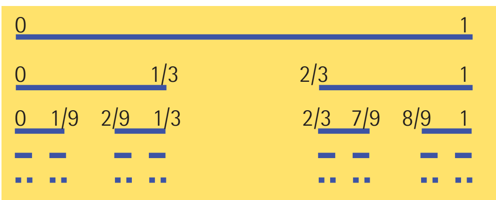


(Voir l'article « Points, Droites et Plans » p. 4 et la vidéo 03-CantorDroitePlan).

Poussières de Cantor

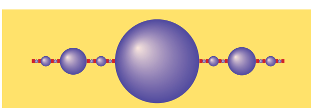
En 1883, Cantor a publié son fameux ensemble triadique. Il prend l'intervalle [0,1] et retire le tiers central en conservant les extrémités.

Ensuite, il enlève le tiers central de chacun des nouveaux segments et répète indéfiniment ce processus. En enlevant ainsi indéfiniment le tiers central, il ne reste que des poussières appelées *Poussières de Cantor*.



Le résultat était troublant à l'époque parce qu'on n'était pas habitué à décomposer ainsi un ensemble, de plus il s'agit d'un ensemble qui contient une quantité non-dénombrable de points.

Il y a plusieurs variantes de l'ensemble de Cantor. Ainsi, en substituant à chaque segment retranché une sphère de diamètre égal à la longueur du segment, on obtient le « collier de Cantor ».



(Voir la vidéo 04-CantorTryadique).

Escalier du diable

La courbe appelée *Escalier du diable* ou *Escalier de Cantor* a été décrite en 1885. Cette fonction est définie à partir de l'ensemble des *Poussières de Cantor.* Voici comment elle est construite. On part du segment de droite $y = x$, où x est élément de l'intervalle [0; 1], il trace le segment de droite joignant les points (0;0) et (1; 1). Il subdivise l'intervalle horizontal en trois sous intervalles et l'intervalle vertical en deux sous intervalles. Il joint alors les extrémités des sous-intervalles impairs et, dans l'intervalle pair il laisse la valeur constante 1/2.

Il subdivise à nouveau en trois parties les sous-intervalles impairs de l'horizontale et en deux parties ceux de l'axe vertical. Il joint alors les extrémités des sous-intervalles impairs et dans l'intervalle pair, il garde les valeurs constantes 1/4 et 3/4.

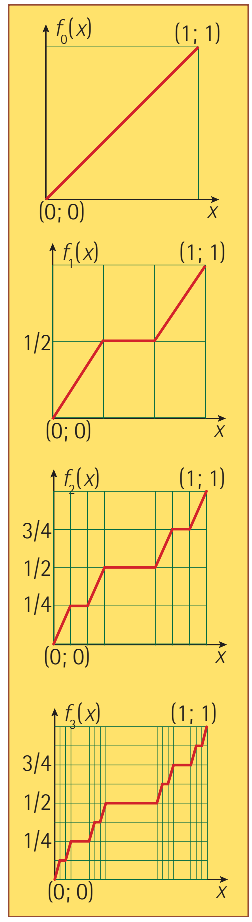
En poursuivant le processus indéfiniment, il obtient une fonction appelée l'*Escalier du diable*.

Cette fonction a des particularités intéressantes, elle est dérivable presque partout et, lorsqu'elle est dérivable, sa dérivée est nulle. La tangente est donc horizontale presque partout, soit sur le complément de l'ensemble de Cantor. Pourtant, elle n'est pas constante puisque l'image de 0 est 0 et celle de 1 est 1. De plus, en tout point dont l'abscisse appartient à l'ensemble de Cantor, la fonction n'est pas dérivable et en ces points, la tangente est verticale.

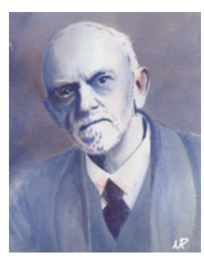
Les travaux de Cantor étant très novateurs ont été mal reçus par une partie des mathématiciens de l'époque. En particulier le mathématicien Leopold Kronecker (1823-1891), qui fut pourtant son professeur à l'université de Berlin, était en désaccord avec les fondements des travaux de Cantor en théorie des ensembles. Cependant, le mathématicien David Hilbert (1862-1943), un des plus grands mathématiciens du XX^e^ siècle, a déclaré « Nul ne doit nous exclure du Paradis que Cantor a créé ».

À partir de 1884, Cantor a fait plusieurs dépressions nerveuses. On a cherché diverses explications à ces crises, on considère maintenant que ces dépressions était dues à un trouble bipolaire.

Étapes de la construction de l'escalier du diable



Leopold Kronecker 1823-1891



David Hilbert 1862-1943