

La cardioïde, la courbe du cœur, apparaît d'abord dans les écrits du mathématicien français Louis Carré (1663–1711) et son nom lui est donné par Giovanni de Castiglione (1708–1791). Cependant, cette « courbe du cœur » fait partie d'une famille de courbes dont l'existence est connue d'Étienne Pascal (1588–1651), le papa de Blaise (1623–1662). Et il est possible que son étude ait commencé auparavant; Albrecht Dürer (1471–1528) indique dans un de ses livres daté de 1525 comment la tracer! Après cinq siècles d'histoire, les mathématiciens lui ont découvert bien des propriétés et je ne pourrai en couvrir que quelques-unes¹. Le mot tous dans mon titre est un peu une menterie, je le concède ...

Le CŒUR dans tous ses états

Yvan Saint-Aubin
Université de Montréal

Un café comme première étape



La cardioïde est une courbe mathématique et un phénomène physique. Dans la vie de tous les jours, elle se manifeste par exemple dans une tasse. Il n'est pas trop difficile de reproduire cette courbe physique. De toutes mes tentatives, voici la plus convaincante.²

Ce sont les rayons lumineux réfléchis par les parois d'un cylindre qui créent cette courbe. En physique, elle se nomme une caustique (l'endroit où c'est brûlant!). Mais je devance mon propos. Il est bien possible que vous l'ayez déjà vue à la surface de votre boisson chaude matinale. Je vous suggère de la reproduire. Voici les indications pour le faire.

Exercice 1 : choisissez une tasse dont les parois sont bien verticales et pas trop profondes; tamisez l'éclairage de la pièce où vous êtes; utilisez une lampe de poche (celle de votre téléphone par exemple) pour éclairer l'intérieur de la tasse. La lumière doit être sur le bord de la tasse. Une courbe lumineuse devrait apparaître au fond de la tasse ou à la surface du liquide qui s'y trouve.

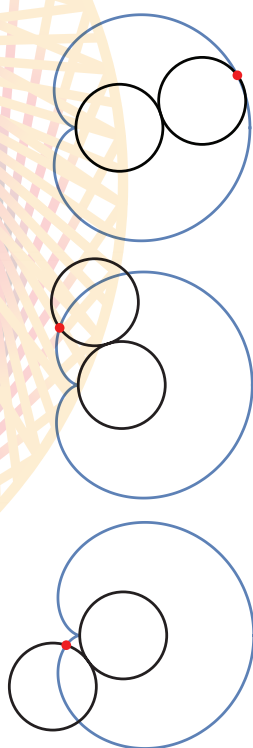
Prérequis : quelques tasses (une petite dose d'expérimentation pourrait être nécessaire) et de la débrouillardise.

Tracer une cardioïde à l'aide de pièces de monnaie

Quittons pour l'instant l'expérimentation physique. Une façon amusante de tracer (mathématiquement) une cardioïde utilise deux pièces de monnaie (ou deux cercles) identiques : une est maintenue fixe, alors que la seconde roule sans glisser sur la première. Cette seconde porte une plume en un point de sa périphérie. Dans les trois captures, page suivante, le point rouge représente la plume et la cardioïde est la courbe en bleu.

Cette construction permet de trouver une description paramétrée de la courbe, c'est-à-dire d'exprimer les coordonnées x et y en fonction d'un paramètre θ . Lorsque θ balaie l'intervalle $[0, 2\pi]$, le point (x, y) parcourt la courbe. (Voir l'encadré sur les paramétrages.)

1. Pour en savoir plus long, les entrées cardioïde et limaçon de Pascal sur wiki sont fort bonnes. Il ne faut surtout pas manquer l'Encyclopédie des formes mathématiques remarquables (www.mathcurve.com) qui lui consacre une longue page. Et André Ross, dans le numéro 6.2 d'Accromath, décrit de nombreuses courbes obtenues de façon semblable et donne une preuve de la construction de la néphroïde.
2. Envoyez-nous votre meilleure photo d'une cardioïde à l'adresse ism@uqam.ca (mettre cardioïde comme titre) d'ici le 31 août 2025. Nous publierons les plus belles !



Lorsque la pièce de monnaie mobile roule sans glisser sur celle qui est immobile, son centre parcourt un cercle. De plus, elle pivote sur elle-même. La principale difficulté est de déterminer le rythme de rotation de la pièce mobile sur elle-même. Faisons l'expérience avec des pièces de 2\$ en utilisant le côté de l'ours. Au départ, la pièce mobile est positionnée à droite de celle immobile avec le museau de l'ours pointant vers la droite. Roulons sans glissement la pièce mobile jusqu'à ce

qu'elle soit à gauche de l'immobile.

Un des grands plaisirs d'apprendre les mathématiques est de les découvrir soi-même. Cet effort permet aussi de mieux comprendre

les étapes suivantes. Puisque la revue *Accromath* s'adresse à un public très vaste, je préciserai les prérequis mathématiques (ou autres) que requiert la question. Inutile de vous dire que je vous encourage à réfléchir à l'exercice ci-dessous avant de poursuivre!

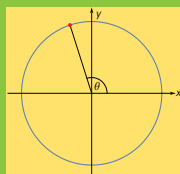
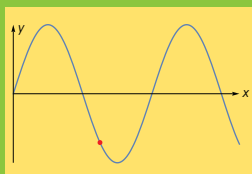
Exercice 2 : après cette demi-rotation autour de la pièce immobile, le museau de l'ours de la pièce mobile regardera vers le haut, la droite, le bas ou la gauche ?

Prérequis : deux pièces de monnaie et un peu de dextérité.

Alors, vous croyez avoir la réponse? Si oui, la première figure de la page suivante ne vous surprendra pas: lorsque le centre de la pièce mobile a balayé un angle θ autour de la pièce immobile, la plume, elle, a pivoté autour du centre de la pièce mobile du double de cet angle! Supposons que le rayon des deux pièces soit de longueur 1. La position de la plume est ainsi la somme de deux vecteurs: v_1 donne la position du centre $(2\cos\theta, 2\sin\theta)$ de la pièce en mouvement et v_2 celle de la plume, $(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$, par rapport à ce centre.

Paramétrage d'une courbe

L'outil idéal pour faire une animation du traçage d'une courbe est un paramétrage de cette courbe. Par exemple, l'artiste désirant faire une vidéo d'une minute traçant une sinusoïde devra connaître la position de la plume en tout temps t durant cette minute. La position de la plume au temps t se résume à ses coordonnées $(x, y) = (x(t), y(t))$ sur l'écran à ce moment. Pour la fonction sinus, il suffit de prendre $(x(t), y(t)) = (t, \sin t)$. Cette paire de fonction est un paramétrage de la courbe sinusoïde.



Toute courbe n'est cependant pas représentable par une fonction. Par exemple, sur le cercle, à (presque) toute abscisse x correspondent deux ordonnées distinctes:

$\sqrt{1-x^2}$ et $-\sqrt{1-x^2}$. Il est cependant possible d'exprimer tout point sur le cercle en termes de l'angle θ que fait un rayon avec l'axe des x positifs. Ces coordonnées

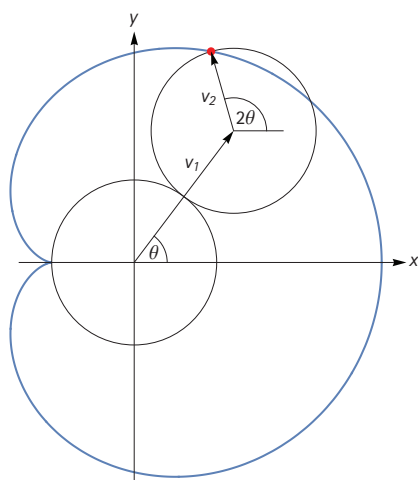
sont simplement $(x(\theta), y(\theta)) = (\cos\theta, \sin\theta)$. Que doit faire l'artiste pour en faire une animation?! Simplement remplacer θ par le temps t . Le point démarrera alors, en $t = 0$, au point $(1, 0)$ puis commencera son périple dans le sens anti-horaire.

Le paramétrage

$$(x(\theta), y(\theta)) = (2\cos\theta + \cos 2\theta, 2\sin\theta + \sin 2\theta)$$

de la cardioïde a été obtenu en addition des deux vecteurs « position du centre de la pièce mobile » et « position de la plume sur cette pièce ». Il est un peu plus compliqué que celui d'un cercle. C'est avec ce paramétrage que toutes les figures du présent article ont été tracées.

Exercice 5 : dans le numéro 19.2 d'*Accromath*, Christian Côté décrit le problème de Kakeya. Il construit au passage la courbe deltoïde: un cercle de rayon $1/3$, avec une plume sur sa circonférence, tourne sans glisser à l'intérieur d'un cercle de rayon 1. Quel serait un paramétrage pour cette courbe?

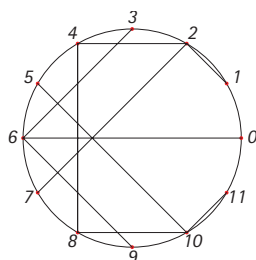


Voici donc, ci-contre, l'équation paramétrique de la cardioïde.

La présentation de Cremona

La construction juste décrite trace une cardioïde à l'extérieur d'un cercle (le cercle immobile). La présentation suivante, dite de *Cremona*, trace la cardioïde à l'intérieur d'un cercle. Sur un cercle, n points sont tracés, équidistants. Celui le plus à droite est étiqueté 0, puis le suivant

$$(x(\theta), y(\theta)) = (2\cos \theta + \cos 2\theta, 2\sin \theta + \sin 2\theta)$$



dans le sens anti-horaire est le 1, et ainsi de suite, jusqu'au dernier qui porte l'étiquette $n-1$. Puis, les points i et $2i \bmod n$ sont reliés par une corde à l'intérieur du cercle. La notation $2i \bmod n$ signifie que le produit $2i$ est calculé modulo n , c'est-à-dire que, si $2i$ se retrouve dans l'intervalle $[n, 2n[$, on lui retire n pour que le résultat soit parmi les entiers $0, 1, \dots, n-1$. Ainsi $i \bmod n$ est simplement le reste de la division de i par n . (Cette arithmétique modulaire nous est familière; les heures s'additionnent modulo 12 ou 24). Les tracés de Cremona pour $n=12$ et $n=50$ sont donnés ci-contre.

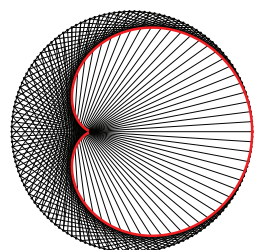
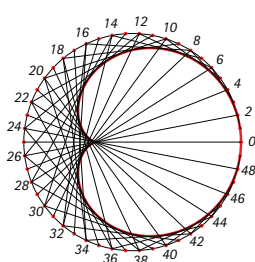
La figure du haut permet de vérifier les calculs : par exemple, si $i=9$, le double $2i$ est 18, le reste de la division de 18 par 12 est 6 et il y a bien une corde allant de 9 à 6. La figure suivante a clairement un autre but : elle révèle comment les cordes semblent « envelopper » une courbe (tracée en rouge) qui ressemble fort à la cardioïde... Le mot « enveloppe » est utilisé en géométrie pour décrire précisément un tel phénomène : dans le cas présent, la courbe en rouge est tangente à toutes les cordes obtenues quel que soit le n du modulo et, pour chaque point p de l'enveloppe, il existe des cordes dont le point de tangence approche p autant que désiré. La courbe en rouge est en fait une homothétie, par un facteur $1/3$, de celle obtenue à l'aide des pièces de monnaie ! Cette impression des cordes enveloppant la cardioïde demeure et même s'intensifie lorsque

n croît. La figure du bas montre le résultat lorsque $n=150$.

À l'exercice 4 ci-dessous, j'indiquerai comment décider si cette impression est juste : les cordes tracent-elles vraiment la cardioïde lorsque n tend vers l'infini ? Même sans avoir tranché cette question, il est possible d'apprendre des propriétés de l'enveloppe; par exemple, il est possible de calculer les coordonnées du point singulier de la courbe, là où il y a un pincement. Sur la dernière figure à droite, ce point semble être l'intersection des deux cordes très proches de l'horizontale. Si n est pair et l'entier m est tel que $n=2m$, alors les deux cordes issues des points $i=m-1$ et $i=m+1$ s'intersectent tout proche du point singulier.

Exercice 3 : trouvez l'équation de ces cordes et leur intersection, puis calculez ce que devient cette intersection lorsque n devient très grand.

Prérequis : coordonnées polaires des points sur un cercle, équation d'une droite, relations trigonométriques. Et il faut savoir que, lorsque θ est très petit, $\sin \theta$ est presque égal à θ .

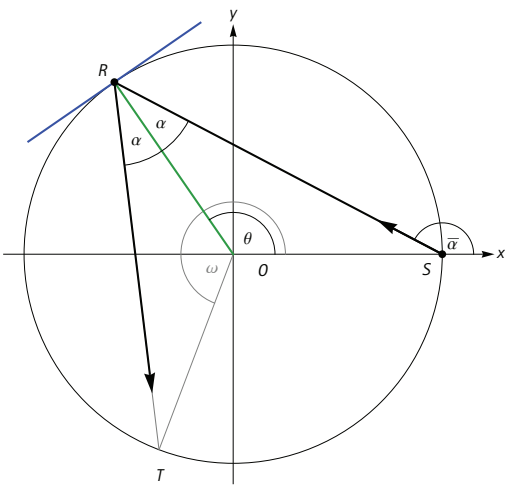


Luigi Cremona
1830-1903

De retour à la caustique

L'introduction a affirmé que la caustique dans une tasse de café est une cardioïde. À ce point, seule la construction des deux pièces de monnaie, avec l'une fixe, l'autre mobile, a mené à un paramétrage explicite et rigoureux de la courbe du cœur. Notre dernière étape est de prouver que la caustique est bien une cardioïde. Elle débute par l'étude d'un seul rayon lumineux.

La figure suivante révèle comment un rayon incident est réfléchi. Le cercle de rayon 1 est centré à l'origine et, comme pour l'exercice « expérimental » du début, la source lumineuse S est ponctuelle et située au point le plus à droite de ce cercle. De cette source, le rayon incident atteint un point R sur le cercle où il sera réfléchi. Le rayon allant de l'origine à ce point (tracé en vert)



Un rayon incident et sa réflexion

définit un angle θ avec l'axe des x positifs; ainsi les coordonnées du point R sont simplement $(\cos\theta, \sin\theta)$. L'angle du vecteur incident peut alors être exprimé à l'aide de cet angle θ par $\bar{\alpha} = (\theta + \pi)/2$.

La paroi de la tasse, ou plutôt l'intérieur du cercle, agit comme un miroir situé le long de la droite tangente au cercle au point R (tracée en bleu). Le rayon en vert est perpendiculaire à ce miroir tangent. Le rayon réfléchi est obtenu du rayon incident en réfléchissant ce dernier par rapport à ce rayon (vert). J'ai obtenu les équations des deux droites, incidente et réfléchie. Les deux passent par le point R et sont déterminées par leur vecteur directeur. Les voici sous forme paramétrique, θ étant le paramètre :

rayon incident d'angle θ :

$$(\cos\theta, \sin\theta) + t(-\sin(\theta/2), \cos(\theta/2))$$

rayon réfléchi d'angle θ :

$$(\cos\theta, \sin\theta) + t(-\sin(\theta/2), \cos(3\theta/2))$$

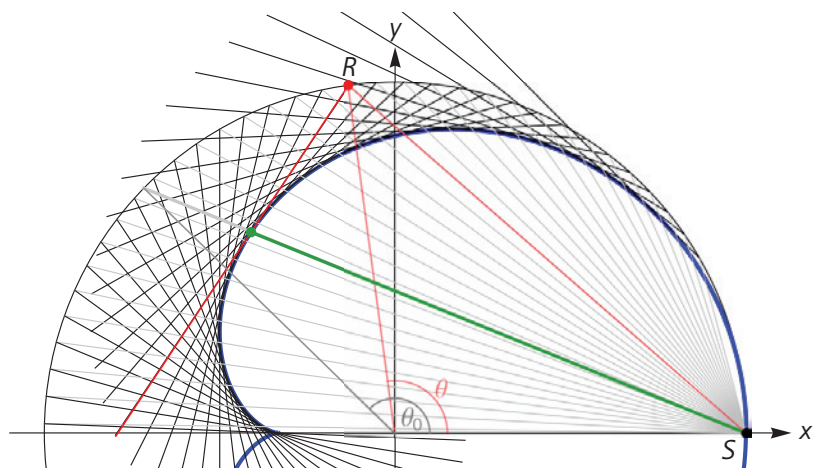
Il y a beaucoup d'information sur la figure «L'enveloppe des rayons réfléchis»; permettez-moi de vous guider! Cette figure trace plusieurs rayons incidents (en gris) et leur réflexion (en noir). Elle se concentre sur ces

rayons réfléchis. Puisque la source S émet dans toutes les directions, il y a une infinité de rayons incidents et réfléchis. Seul un petit nombre a été tracé. Cette figure révèle une propriété de l'enveloppe (tracée ici en bleu) à laquelle nous avons fait allusion : tous les rayons réfléchis lui sont tangents. Le prochain but est de déterminer le point de l'enveloppe qui se trouve sur le rayon à angle θ_0 , c'est-à-dire les coordonnées du point en vert. Ce point est l'intersection de l'enveloppe et du rayon réfléchi en rouge. (Son rayon incident est tracé en rose.) Considérons les rayons réfléchis au voisinage de celui en rouge; leur point d'intersection avec le rayon en vert est proche du point vert, mais seul le rayon réfléchi rouge atteint l'enveloppe le long du rayon vert. Il est aussi apparent que, comme dans la construction à l'aide des cordes de Cremona, ces rayons réfléchis se concentrent près d'une enveloppe. Ce voisinage où ils sont denses est plus lumineux ou chaud, justifiant le nom *caustique* donnée à cette enveloppe.

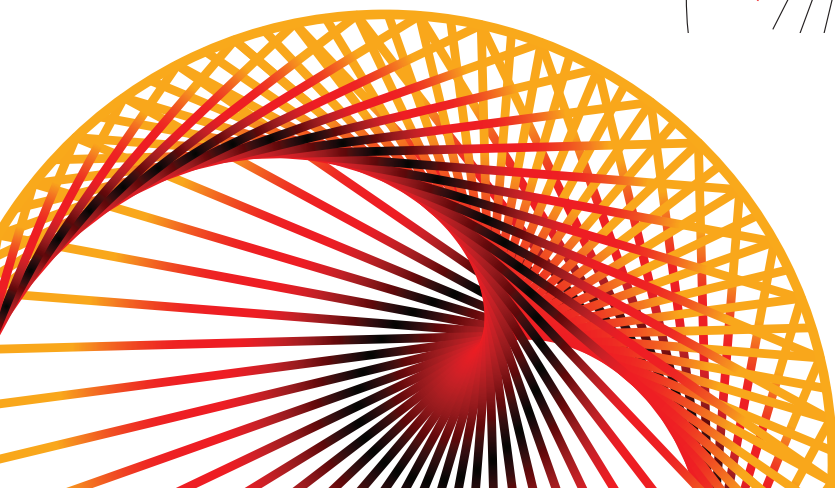
L'équation paramétrique de la droite en vert (avec paramètre s) est

droite en vert d'angle θ_0 :

$$(\cos\theta_0, \sin\theta_0) + s(-\sin(\theta_0/2), \cos(\theta_0/2)).$$



L'enveloppe des rayons réfléchis



Quelles sont les coordonnées du point vert sur la droite à angle θ_0 ? Comment trouver l'angle θ du rayon réfléchi? Ces questions se reformulent en un problème d'optimisation que l'on peut aborder avec les outils du calcul différentiel: les rayons réfléchis d'angle proche mais distinct de θ sont légèrement à côté de l'enveloppe et au moins une des deux coordonnées du rayon réfléchi qui touche l'enveloppe au point vert doit donc être un extremum. Ainsi la dérivée de cette coordonnée du point d'intersection devrait s'annuler en ce point et donner une relation exprimant θ en fonction de θ_0 . La stratégie est donc : (1) obtenir le point d'intersection entre la droite en vert et un rayon réfléchi générique et (2) calculer la dérivée d'une des coordonnées de ce point d'intersection. Le point θ où cette dérivée s'annule déterminera les coordonnées du point vert de l'enveloppe. Si la stratégie est claire, alors les calculs sont moins importants (ils sont présentés dans un encadré). Le résultat est le suivant : l'enveloppe est

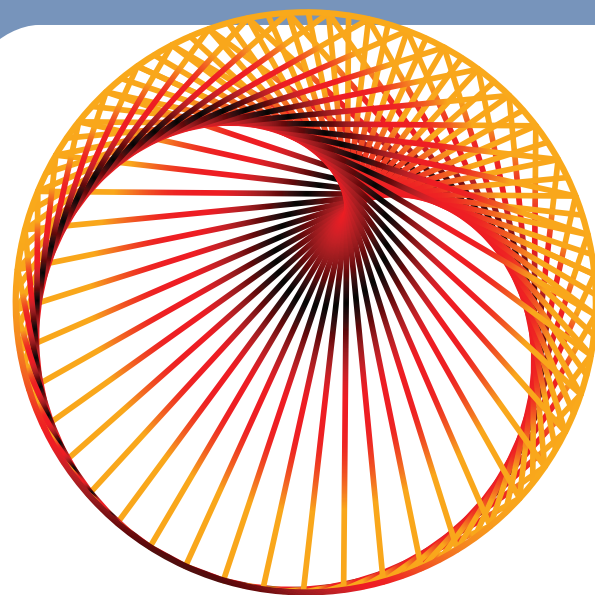
$$((2\cos\theta, 2\sin\theta) + (\cos 2\theta, \sin 2\theta))/3,$$

exactement le paramétrage obtenu par la méthode des pièces de monnaie, à un facteur $1/3$ près! Ces calculs prouvent donc que la caustique obtenue à l'aide d'une tasse (ou d'un cercle) et d'une source lumineuse ponctuelle située sur le cercle est bien une cardioïde !

La figure présentant la construction de Cremona et celle utilisée à l'instant pour l'étude de la caustique se ressemblent beaucoup, puisque les cordes ou les rayons réfléchis

Exercice 4 : Le rayon réfléchi de la figure montrant le parcours d'un rayon sous-tend la corde RT . Les angles θ et ω caractérisent les points R et T . Le rayon réfléchi aura donc la propriété de Cremona si $\omega = 2\theta$. Est-ce le cas? Si oui, les cordes de Cremona définiront le même lieu géométrique que celui défini par les rayons lumineux: la cardioïde. Bref : est-ce que $\omega = 2\theta$?

Prérequis : géométrie euclidienne.



enveloppent des courbes semblables. Mais la présentation de Cremona mène-t-elle vraiment à une cardioïde? Les cordes de Cremona sont construites en joignant les points i et $2i \bmod n$. Ces points correspondent, en coordonnées polaires, aux angles $\theta = 2\pi i/n$ et $\omega = 2\theta \bmod 2\pi$. Est-ce que les rayons réfléchis de la caustique ont, miraculeusement, la propriété des cordes de Cremona? C'est ce que propose d'investiguer l'exercice qui suit.

Des explorations excitantes

Trois constructions de la cardioïde (les pièces de monnaie tournant sans glissement, les cordes de Cremona et la caustique des rayons réfléchis) peuvent vous avoir étourdis. Cependant les méthodes décrites suggèrent de nombreuses explorations pour les scientifiques en herbe. Que se passe-t-il si la plume du cercle mobile est en un point à l'intérieur de ce cercle, plutôt qu'en sa périphérie? Et si cette plume était attachée à un bras qui sort du cercle? Ces courbes auront-elles un ou des points singuliers comme celui de la cardioïde? Et si les deux pièces de monnaie n'ont pas le même rayon? Ces courbes font partie de la famille de courbes regroupées sous le nom de *limaçon de Pascal*. (Ceux qui ont eu le jouet Spirograph™ dans leur enfance connaissent, au moins intuitivement, la réponse à plusieurs de ces questions.)

Une variation naturelle de la construction de Cremona est de changer le facteur multiplicatif qui identifie les extrémités des cordes. Par exemple, les cordes définissent-elles une enveloppe si les points liés portent les

étiquettes i et $3i \bmod n$? Ou $4i \bmod n$, $5i \bmod n$ etc.? Et si ces enveloppes existent, comment adapter la méthode des pièces de monnaie pour les tracer ?

Le premier exercice menant à la construction « expérimentale » de la cardioïde recommandait de poser la source lumineuse sur le bord de la tasse. Que se passe-t-il si la source est plus éloignée ou si elle se trouve à l'infini le long de l'axe des x positifs ? Les rayons in-

cidents seront alors tous parallèles à cet axe? La caustique sera-t-elle encore une cardioïde?

Enfin, si un soir les conversations à table deviennent un peu ennuyeuses, profitez-en pour admirer les patrons que dessine, sur la nappe, la lumière traversant les verres d'eau. Ces courbes ne seront sans doute pas des cardioïdes, mais vous savez maintenant que ce sont des caustiques !

Les calculs !

La stratégie élaborée dans l'étude de la caustique mène à des calculs costauds. Les voici, pour ceux et celles qui sont vraiment curieux ! Et, pour être honnête, plusieurs ont été faits à l'aide d'un outil de manipulations symboliques.

Les premières observations peuvent être lues sur la figure montrant un unique rayon incident et sa réflexion. Le triangle ORS est isocèle puisque deux de ses côtés sont des rayons du cercle. L'angle α est donc fixé par l'angle θ : $\alpha = (\pi - \theta)/2$. L'angle $\bar{\alpha}$ qui est mesuré par rapport à l'axe des positifs est donc $\bar{\alpha} = (\pi + \theta)/2$.

Ce qui suit utilise maintenant la figure «enveloppe des rayons réfléchis». Le vecteur directeur de la droite en vert est $(\cos \bar{\alpha}_0, \sin \bar{\alpha}_0)$ et, pour $\bar{\alpha} = (\pi + \theta)/2$, ce vecteur devient $(-\sin(\theta_0/2), \cos(\theta_0/2))$ par des relations trigonométriques simples. Ceci confirme l'équation paramétrique de la droite en vert.

La prochaine étape consiste à obtenir l'intersection entre la droite en vert et un rayon réfléchi générique. L'angle caractérisant la droite en vert est θ_0 , alors que celui du rayon réfléchi est θ . L'équation vectorielle à résoudre est donc

$$\begin{aligned} & (\cos \theta_0, \sin \theta_0) + s(-\sin(\theta_0/2), \cos(\theta_0/2)) \\ & = (\cos \theta, \sin \theta) + t(-\sin(3\theta/2), \cos(3\theta/2)) \end{aligned}$$

Puisque cette équation est entre des vecteurs à deux composantes, elle est en fait un système de deux équations linéaires pour les deux inconnues s et t . La solution est

$$s = \frac{2 \sin(\theta - \theta_0/2) \sin((\theta - \theta_0)/2)}{\sin((3\theta - \theta_0)/2)}$$

et
$$t = -\frac{2 \sin(\theta/2) \sin((\theta - \theta_0)/2)}{\sin((3\theta - \theta_0)/2)}$$

Le point d'intersection est obtenu en remplaçant dans la droite du rayon réfléchi la valeur de t ci-dessus. La première composante de ce vecteur est

$$\cos \theta + \frac{2 \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2) \sin((\theta - \theta_0)/2)}{\sin((3\theta - \theta_0)/2)}$$

C'est de cette fonction dont il faut trouver l'extremum. Sa dérivée est

$$-\frac{\sin(\theta/2) \sin(\theta_0/2)}{\sin^2((3\theta - \theta_0)/2)} \times [\sin((3\theta - \theta_0)/2) + 3 \sin(\theta - \theta_0)/2]$$

Les facteurs $\sin(\theta/2)$ et $\sin(\theta_0/2)$ ne s'annulent qu'en 0 et 2π . Ce ne sont pas les points recherchés. Il faut donc que le terme entre crochets s'annule, c'est-à-dire que

$$\frac{\sin((\theta - \theta_0)/2)}{\sin(3\theta - \theta_0)/2} = -\frac{1}{3}$$

Cette équation détermine implicitement l'angle θ du rayon réfléchi qui touche l'enveloppe à l'angle θ_0 . À l'aide de cette relation, la première composante de l'intersection se simplifie de façon remarquable :

$$\begin{aligned} & \cos \theta + \frac{2 \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2) \sin((\theta - \theta_0)/2)}{\sin((3\theta - \theta_0)/2)} \\ & = \cos \theta - \frac{2}{3} \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2) \\ & = \cos \theta - \frac{\cos \theta - \cos(2\theta)}{3} = (2 \cos \theta + \cos(2\theta))/3 \end{aligned}$$

qui est le résultat annoncé dans le texte. La seconde composante s'obtient similairement.