Ce jeu ancien d'origine incertaine (peut-être en Chine?) existe sous plusieurs variantes. Il se joue à deux personnes, A et B, avec des bâtonnets (ou des allumettes, des crayons, etc.).

Le jeu de Nim

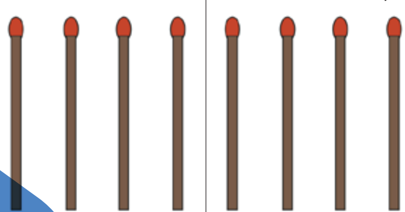
Christiane Rousseau
Université de Montréal

À tour de rôle, A et B retirent des bâtonnets selon une règle préétablie. Dans les variantes appelées *jeu gourmand* la personne retirant le dernier bâtonnet gagne. Dans les variantes appelées *jeu misère*, la personne retirant le dernier bâtonnet perd.

Le jeu à une rangée

Un nombre quelconque, n, de bâtonnets est aligné sur une rangée.

À tour de rôle, A et B peuvent prendre 1, 2 ou 3 bâtonnets. Dans le jeu gourmand, la personne qui prend le dernier bâtonnet gagne.



Quelles sont les positions gagnantes ? Commencez par chercher une stratégie pour gagner avant de lire la solution.

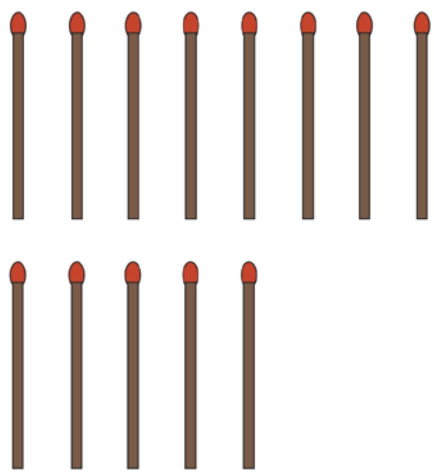
Soit m le nombre de bâtonnets au moment où arrive le tour de A. Remarquons que le reste r de la division de m par 4 est 0, 1, 2, ou 3. Si r est non nul, alors A enlève r bâtonnets. C'est maintenant B qui joue. Quel que soit le nombre de bâtonnets qu'il enlève, il ramène le nombre de bâtonnets à un nombre non divisible par 4. On est revenu au cas précédent : le nombre de bâtonnets que prend A est le reste de la division du nombre de bâtonnets par 4, ramenant ainsi le nombre de bâtonnets à un multiple de 4. Et ainsi de suite, chaque fois B n'a d'autre choix que de ramener le nombre de bâtonnets à un nombre non divisible par 4, et chaque fois A ramène ce nombre à un multiple de 4. À un moment donné, il reste quatre bâtonnets. Quel que soit le nombre de bâtonnets pris par B, A prend le reste et gagne.

Donc, une position gagnante est de jouer quand le nombre de bâtonnets n'est pas divisible par 4 et la stratégie est de ramener le nombre de bâtonnets à un multiple de 4.

Dans la section problèmes, vous pouvez trouver la stratégie pour le jeu misère où la personne qui prend le dernier bâtonnet perd.

Le jeu à deux rangées

Des bâtonnets sont alignés sur deux rangées, en nombres respectifs m et n.



À tour de rôle, A et B peuvent prendre un nombre quelconque de bâtonnets, mais sur une seule rangée à la fois. Dans le jeu gourmand, la personne qui prend le dernier bâtonnet gagne.

Quelles sont les positions gagnantes ? Ici encore, cherchez une stratégie avant de lire la solution.

Soient r et s les nombres de bâtonnets sur chaque rangée au moment où arrive le tour de A. Si $r \neq s$, alors A prend des bâtonnets sur la rangée qui en contient le plus de manière à ramener les deux rangées à un nombre égal de bâtonnets. B est obligé de détruire l'égalité entre les deux rangées et, chaque fois, A peut la ramener. Si B choisissait de prendre tous les bâtonnets d'une rangée, alors A prendrait tous ceux de l'autre rangée et gagnerait. Sinon, le nombre de bâtonnets diminue jusqu'à arriver à un bâtonnet sur chaque rangée. Ici encore, A gagne.

Donc, une position gagnante est de jouer quand les deux rangées n'ont pas le même nombre de bâtonnets et la stratégie est de ramener les deux rangées à un nombre égal de bâtonnets.

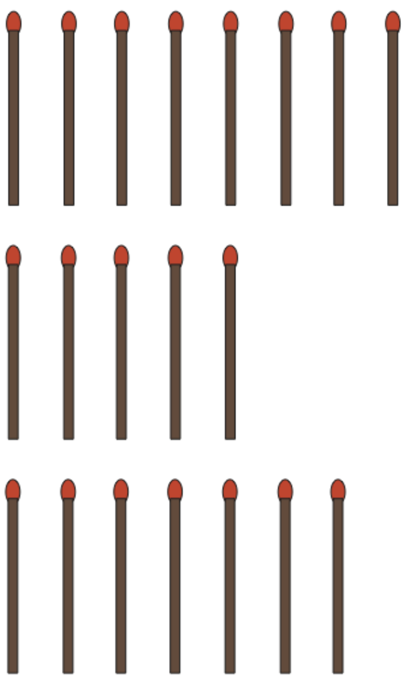
Dans la section problèmes, vous pouvez trouver la stratégie pour le jeu misère où la personne qui prend le dernier bâtonnet perd.

Le jeu à un nombre quelconque de rangées

Les règles sont les mêmes que pour le jeu à deux rangées, mais la stratégie est plus complexe. Nous la décrivons ici sur un exemple et dans la section problèmes vous pouvez vous essayer à la prouver après l'avoir pratiquée sur d'autres exemples.

Pour chaque rangée, nous allons écrire le nombre de bâtonnets en base 2 :

$$8 = 2^3,$$
$$5 = 2^2 + 2^0,$$
$$7 = 2^2 + 2^1 + 2^0.$$



Remarquons que 2^3 et 2^1 apparaissent un nombre impair de fois et 2^2 et 2^0 apparaissent un nombre pair de fois. A doit prendre dans une rangée un nombre de bâtonnets de manière à ce que toutes les occurrences de chaque puissance de 2 apparaissent un nombre pair de fois. Ici A n'a pas le choix et doit prendre dans la première rangée 6 bâtonnets. Les nouveaux nombres sont

$$2 = 2^1,$$
$$5 = 2^2 + 2^0,$$
$$7 = 2^2 + 2^1 + 2^0.$$

En prenant des bâtonnets dans une seule rangée, B n'a pas d'autre choix que de détruire cette parité et A pourra la ramener au coup suivant.

Donc, une position gagnante est de jouer quand au moins une puissance de 2 apparait un nombre impair de fois et la stratégie est de prendre un nombre de bâtonnets sur une rangée de sorte que chaque puissance de 2 apparaisse un nombre pair de fois (ceci est toujours possible). Remarquez que la stratégie du jeu à deux rangées est un cas particulier de celle-ci.