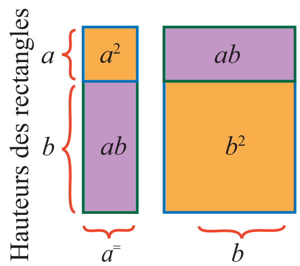
# Été-Automne 2024 Solutions

## Platon

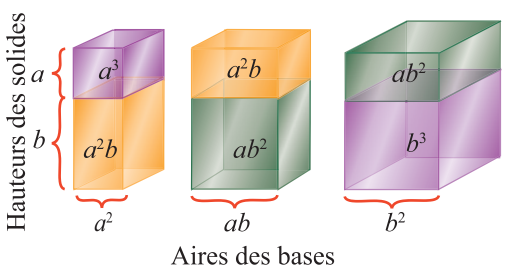
1. Le carré révèle que :
   Des rectangles ayant la même base sont dans le rapport de leur hauteur.




En écriture moderne, cela donne

$$\frac{a}{b} = \frac{a^2}{ab} = \frac{ab}{b^2}.$$

2. Le cube révèle que :
   Des solides ayant la même base sont dans le rapport de leur hauteur.

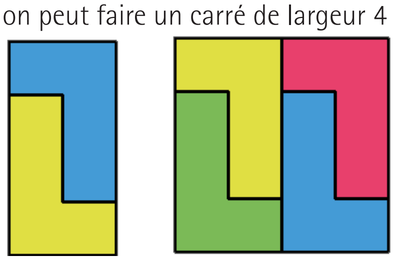



En écriture moderne, cela donne

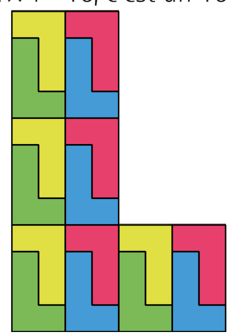
$$\frac{a}{b} = \frac{a^3}{a^2 b} = \frac{a^2 b}{ab^2} = \frac{ab^2}{b^3}.$$

## Quand chacune des pièces est semblable au tout

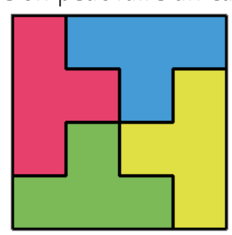
1. a) Avec 2 pièces on peut faire un rectangle $2 \times 4$. ppcm$(2, 4) = 4$, donc avec 2 rectangles on peut faire un carré de largeur 4



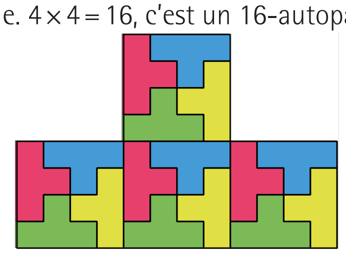
Avec 4 carrés on peut refaire la figure originale. $2 \times 2 \times 4 = 16$, c'est un 16-autopavé.



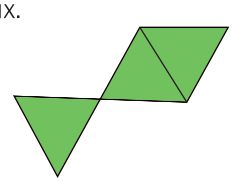
b) Avec 4 pièce on peut faire un carré $4 \times 4$.



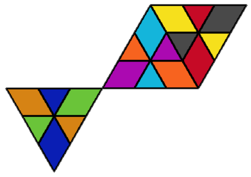
Avec 4 carrés, on peut refaire la figure originale. $4 \times 4 = 16$, c'est un 16-autopavé.



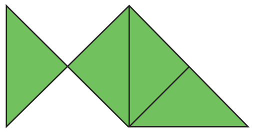
2. a) Cette figure est composée de 3 triangles équilatéraux.



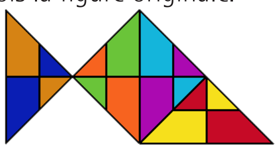
Chaque triangle peut être découpé en utilisant 3 fois la figure originale.



b) Cette figure est composée de 4 triangles rectangles isocèles.



Chaque triangle peut être découpé en utilisant 2 fois la figure originale.

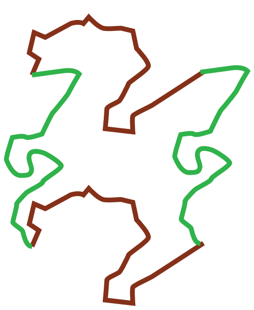


## Faites vos propres pavages artistiques !

1. Il pourrait y en avoir d'autres solutions.

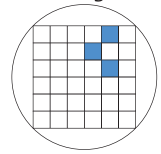
Les segments verts sont parallèles et de même mesure, alors que les quatre autres segments de « l'hexagone » sont invariants sous la rotation de 180°.

2. Comme le pavage se fait par translation, on sait que le critère mathématique qui doit être satisfait est celui de Beauquier et Nivat, c'est-à-dire que le pavage doit être une déformation d'un parallélogramme ou d'un hexagone dont les paires de côtés opposés sont parallèles. Voici une décomposition en « parallélogramme ».



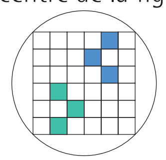
## Les mots pour dire les rosaces

1. Il ne faut pas perdre de vue la consigne stipulant qu'à partir de la figure donnée,[1]



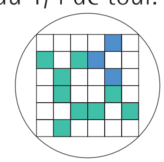
il s'agit d'ombrager de façon minimaliste les petits carrés afin d'obtenir une rosace du type désiré.

i) Le 2-pied le plus simple est obtenu en faisant tourner le motif donné d'un demi-tour autour du centre de la figure.



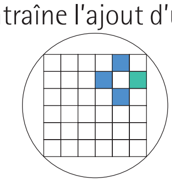
2-pied

ii) Pour le 4-pied, on y va maintenant avec les multiples du 1/4 de tour.



4-pied

iii) Le 1-lobe demande d'introduire un axe de symétrie (et un seul). Le carré ayant quatre axes de symétrie — les deux médiatrices et les deux bissectrices —, on aurait l'embarras du choix. Mais l'hypothèse de minimalité (et la disposition du motif de départ) a pour conséquence que c'est la bissectrice Sud-Ouest / Nord-Est qu'il faut privilégier, car elle entraîne l'ajout d'un seul petit carré.

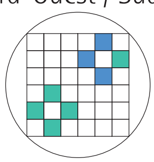


1-lobe

1. *Observons au passage que cette figure est un 1-pied : elle est laissée fixe seulement par la rotation de 0 tour, c'est-à-dire par l'isométrie identité, qui consiste à ne rien bouger — voir ci-après la note 5. Dit de façon plus explicite, la figure telle que donnée ne possède aucune symétrie. Mais elle a du potentiel…*

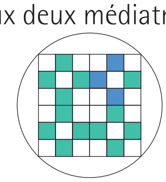
**Note 1 :**
Observons que ce 1-lobe est laissé fixe par une seule rotation : le tour complet (ou si on préfère 0 tour).
Dans les faits, la figure qui précède n'est pas considérée comme possédant une « vraie » symétrie de rotation, car elle est fixe, en termes de rotation, seulement pour la transformation identité. Or une telle « symétrie » est plutôt banale, car elle est inhérente à TOUTE figure!

iv) Il doit y avoir maintenant deux axes de symétrie. Toujours par souci de minimalisme, partant du 1-lobe qui précède, on ajoute donc un deuxième axe de symétrie : la bissectrice Nord-Ouest / Sud-Est.



2-lobe

v) Le passage au 4-lobe revient à introduire dans la figure précédente les symétries par rapport aux deux médiatrices des côtés.

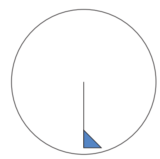


4-lobe

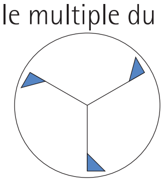
**Note 2 :**
On observera que le 2-lobe qui précède est aussi fixe pour une rotation de 1/2 tour (ou 180°). Cette rotation peut être vue comme résultant de l'action combinée des deux axes de réflexion, qui font entre eux un angle de 90°.
Quant au 4-lobe, il est fixe par rotation d'angle multiple du 1/4 de tour (ou 90°). Ces quatre rotations peuvent être vues comme résultant de l'action combinée de deux axes de symétrie « voisins » — une médiatrice et une bissectrice (peu importe l'ordre) — faisant entre eux un angle de 45°.
(On reviendra, au problème #3 ci-après, sur le fait que la composée de deux réflexions d'axes concourants est une rotation.)

**Note 3 :**
Il est souvent utile, pour bien « sentir » les symétries d'une rosace, de faire appel au papier calque (ou papier pelure) afin de voir leur effet « en mouvement ». En faisant pivoter (physiquement) le papier calque autour du centre de la figure, ou encore en le retournant le long d'un axe, on peut ainsi valider concrètement la présence ou non de telle ou telle symétrie.
Dans le cadre du cours de géométrie offert par mon département aux futurs enseignants du primaire, nous encourageons fortement le recours actif au calque. Une telle approche géométrique est très utile dans notre démarche pédagogique et se transpose aisément aux élèves du primaire.

2. On travaille cette fois à partir du motif (1-pied) suivant.

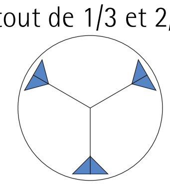


i) La recherche d'un 3-pied entraîne des rotations d'angle multiple du 1/3 de tour.



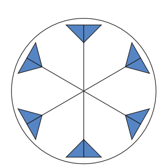
3-pied

ii) On passe au 3-lobe en introduisant trois axes de symétries — par exemple coïncidant avec les hampes des fanions. (Ou, ce qui revient au même, en introduisant un axe de symétrie sur le motif initial, puis en faisant pivoter le tout de 1/3 et 2/3 de tour.)



3-lobe

iii) Le 6-lobe a six angles de symétries (les multiples du 1/6 de tour) et six axes de symétries.



6-lobe

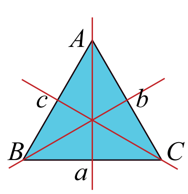
3. Les tables de composition (ou *tables de Cayley*) dont il est question ici trouvent leur inspiration dans les tables d'addition ou de multiplication de l'école primaire. Par exemple, dans le célèbre tableau suivant — qui se lit « ligne × colonne » —, on peut lire que 5 x 7 = 35. C'est-à-dire : étant donné les deux naturels 5 et 7, on a inscrit dans la table, à l'intersection de la ligne du 5 et de la colonne du 7, le naturel 35 qui est égal à 5 x 7.

| × | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 0 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 0 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 0 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 0 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 0 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

On observe par ailleurs que 7 x 5 donne aussi comme produit 35, ce qui se lit à l'intersection de la ligne du 7 et de la colonne du 5. L'égalité 5 x 7 = 7 x 5 est une illustration du fait que la multiplication est une opération *commutative*, ce qui se reflète visuellement dans la symétrie de la grille par rapport à la diagonale principale Nord-Ouest / Sud-Est (composée des carrés parfaits 0, 1, 4, ... , 81). On revient plus bas sur cet aspect des choses.

Il s'agit donc de généraliser de telles tables au contexte de la composition de fonctions — et plus précisément, dans notre cadre, à la composition d'isométries appartenant au groupe de symétrie $\mathbb{G}$ d'une rosace donnée. L'idée générale est la suivante : étant donné deux isométries $i, j \in \mathbb{G}$, trouver dans ce groupe $\mathbb{G}$ une isométrie qui est égale à la composée $i \circ j$.

Ainsi, s'agissant du triangle équilatéral *ABC*, on pourra s'intéresser entre autres à la rotation $r_1$ d'un tiers de tour autour de son centre, de même qu'à la réflexion $R_a$ dans la médiatrice *a*. (Ce sont là deux éléments du groupe diédre $D_3$ dont il est question plus bas, à la question 3-iii.)




Soit par exemple la composée $r_1 \circ R_a$ définie par l'égalité

$$(r_1 \circ R_a)(P) = r_1(R_a(P)),$$

quel que soit le point *P* du plan.[2] S'intéressant, disons, au sommet *B* du triangle, on a alors

$$(r_1 \circ R_a)(B) = r_1(R_a(B)) = r_1(C) = A.$$

Observons cependant que la réflexion $R_c$ permet de passer directement du point *B* au point *A*, en un seul mouvement, c'est-à-dire que $A = R_c(B)$. On a donc $(r_1 \circ R_a)(B) = R_c(B)$.

On peut vérifier de manière plus générale qu'une telle égalité tient *pour tout point P du plan*.[3] Autrement dit, on a l'égalité d'isométries

$$r_1 \circ R_a = R_c.$$

Dans la table de Cayley du groupe de symétrie du triangle équilatéral, on inscrira donc $R_c$ à l'intersection de la ligne $r_1$ et de la colonne $R_a$.

---

**Note 4 :**

À noter cependant qu'on vérifie de la même manière que $R_a \circ r_1 = R_b$, c'est-à-dire $r_1 \circ R_a \neq R_a \circ r_1$. L'ordre de composition est donc crucial. On exprime ce fait en disant que l*a composition d'isométries n'est pas une opération commutative*. Et on inscrit alors $R_b$ à l'intersection de la ligne $R_a$ et de la colonne $r_1$ de la table. (À propos de la notion de commutativité, voir les notes 7 et 12 ci-après.)

---

2. *L'idée derrière cette définition est la suivante : partant du point P, on trouve d'abord son image $R_a(P)$ sous l'effet de la réflexion d'axe a, puis on fait pivoter cette image d'un tiers de tour sous $r_1$. Le point $r_1(R_a(P))$ du plan est donc « l'image de l'image » de P, d'abord par $R_a$ puis par $r_1$*

3. *Il convient d'introduire une nuance ici. Observons qu'on a aussi $(r_1 \circ R_a)(B) = A = r_2(B)$. Néanmoins il n'est pas vrai que l'égalité générale $r_1 \circ R_a = r_2$ est pour autant valide. Ainsi, $(r_1 \circ R_a)(C) = r_1(R_a(C)) = r_1(B) = C$, tandis que $r_2(C) = B$.*
*À cet égard, notons qu'un résultat général de la « théorie des isométries » affirme qu'une isométrie est complétement déterminée dès que l'on connaît les images qu'elle produit sur trois points non alignés — voir George E. Martin,* Transformation Geometry: An Introduction to Symmetry, *New York: Springer, 1982, p. 34, théorème 5.2. Il ne suffit donc pas de travailler sur un seul point! (Mais deux points suffisent si on connaît en plus l'orientation de l'isométrie, à savoir si elle inverse ou non les figures — voir à ce propos la note 10.)*

Plus généralement, étant donné deux isométries $i$ et $j$, l'intersection de la ligne $i$ et de la colonne $j$ de la table donne leur composée $i \circ j$ (dans cet ordre), définie par l'égalité

$$(i \circ j)(P) = i(j(P)),$$

pour tout point $P$ du plan. Et dans la table de composition, on écrit

| $\circ$ | … $j$ … |
|---|---|
| ⋮ | ⋮ |
| $i$ | … $i \circ j$ … |
| ⋮ | ⋮ |

i) La forme même du virevent fait qu'il ne possède aucune symétrie de réflexion. (Au besoin, vérifiez ce fait par calquage.) Mais il est laissé fixe par quatre rotations, chacun d'angle un multiple du 1/4 de tour : c'est en effet un 4-pied!

Son groupe de symétrie est donc le groupe cyclique $C_4 = \{r_0, r_1, r_2, r_3\}$, où l'indice correspond au multiple de 1/4 en cause (0, 1/4, 2/4, 3/4). Comme des rotations de même centre se combinent par l'addition de leurs angles, on obtient aisément la table de composition suivante.

| $\circ$ | $r_0$ | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $r_0$ | $r_0$ | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ |
| $r_1$ | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ | $r_0$ |
| $r_2$ | $r_2$ | $r_3$ | $r_0$ | $r_1$ |
| $r_3$ | $r_3$ | $r_0$ | $r_1$ | $r_2$ |

On y lit par exemple, à l'intersection de la ligne $r_2$ et de la colonne $r_3$, que tourner d'un demi-tour, puis de trois quarts de tour, revient à tourner d'un quart de tour. Il en est de même si on tourne de trois quarts de tour puis d'un demi-tour (intersection de la ligne $r_3$ et de la colonne $r_2$).

---

**Note 5 :**

La rotation $r_0$ a pour effet de faire pivoter chaque point du plan de 0 tour. Autrement dit, rien ne bouge! Par cette transformation, chaque point du plan est associé à lui-même et reste donc fixe.

Cette rotation est l'un des avatars de l'isométrie *identité* id, définie par l'égalité

$$\text{id}(P) = P,$$

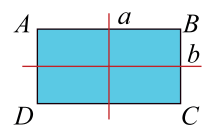
pour tout point P du plan. Avec cette notation, la table de Cayley du groupe $C_4$ peut se récrire comme suit :

| $\circ$ | id | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ |
|---|---|---|---|---|
| id | id | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ |
| $r_1$ | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ | id |
| $r_2$ | $r_2$ | $r_3$ | id | $r_1$ |
| $r_3$ | $r_3$ | id | $r_1$ | $r_2$ |

C'est l'usage que nous adoptons dans ce qui suit.

---

ii) Il s'agit ici de capturer les symétries d'un rectangle (non carré). Côté rotation, outre l'identité (voir la note 5), on voit bien que le demi-tour autour du centre du rectangle fait l'affaire. Nous le dénotons ici simplement par la lettre $r$. Par ailleurs les deux médiatrices $a$ et $b$ des côtés $AB$ et $BC$ sont des axes du symétrie du rectangle : les réflexions $R_a$ et $R_b$ laissent en effet fixe la figure globale du rectangle.




Le groupe diédre $D_2 = \{\text{id}, r, R_a, R_b\}$ est donc de cardinalité 4 (tout comme $C_4$), et on peut montrer que sa table de composition est la suivante :

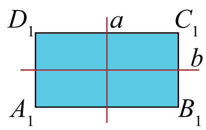
| $\circ$ | id | $r$ | $R_a$ | $R_b$ |
|---|---|---|---|---|
| id | id | $r$ | $R_a$ | $R_b$ |
| $r$ | $r$ | id | $R_b$ | $R_a$ |
| $R_a$ | $R_a$ | $R_b$ | id | $r$ |
| $R_b$ | $R_b$ | $R_a$ | $r$ | id |

Plusieurs entrées de cette table sont tout à fait évidentes : par exemple les compositions faisant intervenir l'isométrie identité id; ou encore le fait que la composition de tout mouvement avec lui-même donne systématiquement l'identité (à noter que cela n'était pas le cas pour le groupe cyclique $C_4$). D'autres entrées doivent être vérifiées plus minutieusement.

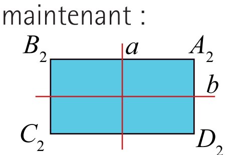
Voici par exemple comment montrer (par le menu détail!) que l'isométrie composée $r \circ R_b$ revient à $R_a$.

| $\circ$ | id | $r$ | $R_a$ | $R_b$ |
|---|---|---|---|---|
| id | id | $r$ | $R_a$ | $R_b$ |
| $r$ | $r$ | id | $R_b$ | $R_a$ |
| $R_a$ | $R_a$ | $R_b$ | id | $r$ |
| $R_b$ | $R_b$ | $R_a$ | $r$ | id |

On y va étape par étape. Considérant les quatre sommets du rectangle *ABCD* (tels qu'ils sont sur la figure de départ, ci-haut),[4] désignons, dans un premier temps, par $X_1$ l'image du sommet $X$ par la réflexion $R_b$ (c'est le premier mouvement qui entre en action dans la composée $r \circ R_b$). On obtient alors la configuration suivante, où les sommets sont interchangés par rapport à l'axe horizontal :




Appliquons dans un deuxième temps le demi-tour $r$ à ce rectangle. Appelant $X_2$ l'image du sommet $X_1$ par la rotation $r$, on obtient maintenant :




Or il est clair que le passage du rectangle *ABCD* de départ à ce dernier rectangle peut se faire directement, en un seul mouvement, par la réflexion $R_a$. On a ainsi montré que

$$r \circ R_b = R_a.$$

On pourrait de la même manière valider chacune des entrées de la table de Cayley du groupe diédre $D_2$.

4. *À noter que nous travaillons ici sur quatre points (explicites), à savoir les quatre sommets du rectangle ABCD. Cela nous assure que les isométries que nous identifierons seront uniquement déterminées. Voir à cet effet les commentaires de la note infraginale 3, où il est question du résultat affirmant qu'une isométrie est complètement déterminée dès que l'on connaît son action sur trois points non alignés.*

**Note 6 :**

$D_2$ peut aussi s'interpréter comme le groupe de symétrie d'un losange (non carré). Les réflexions ont alors pour axes les diagonales du losange.

**Note 7 :**

On observera que pour n'importe quel élément $i$ et $j$ de $D_2$, on a l'égalité

$$i \circ j = j \circ i.$$

Autrement dit, l'ordre de composition des éléments de ce groupe n'importe pas : l'opération de composition sur $D_2$ est *commutative*.

Le groupe diédre $D_2$ est un exemple de ce qu'on appelle un groupe *commutatif* — ou *abélien*, en l'honneur du mathématicien norvégien Niels Henrik Abel (1802-1829).

On observera au passage que $C_4$ (voir la question 3-i) est lui aussi un groupe abélien, ce qui n'est pas étonnant quand on pense au fait que la composition de deux rotations de même centre se traduit par l'addition de leurs angles. Il en est de même pour tout groupe de symétrie $C_k$. Au contraire, les groupes $D_3$ et $D_4$ (dont il est question plus bas) ne sont pas abéliens. La commutativité de $D_2$ a donc un caractère exceptionnel.

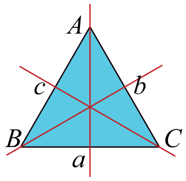
À noter qu'on peut montrer que $C_4$ et $D_2$ cernent les deux seuls cas de figure possibles pour un groupe à quatre éléments.

**Note 8 :**

Le groupe $D_2$ est connu dans la littérature sous l'expression *groupe de Klein*, du nom du mathématicien Felix Klein — voir dans l'article la note infrapaginale 2, et aussi les commentaires dans la section *Pour en savoir plus*. On représente souvent ce groupe par la notation $K_4$ (en l'honneur de Klein), ou encore par la lettre $V$, car ce dernier l'appelait le *Vierergruppe*[5] (mot à mot « quatre-groupe ») dans un texte de 1884 portant sur les liens entre la géométrie et l'algèbre — plus précisément à propos de l'icosaèdre et de la résolution des équations du cinquième degré. $D_2$ est le plus petit groupe qui n'est pas cyclique.

5. *Le mot allemand* Vierer, *dérivé de* Vier, *« quatre », renvoie à l'idée d'un rassemblement de quatre unités, objets ou individus — un peu comme dans le mot quatuor.*

iii) On s'intéresse ici aux symétries du triangle équilatéral.




Le groupe diédre $D_3 = \{\mathrm{id}, r_1, r_2, R_a, R_b, R_c\}$ comprend donc, outre l'identité, les deux rotations $r_1$ et $r_2$ de 1/3 et 2/3 de tour autour du centre, ainsi que les trois réflexions $R_a$, $R_b$ et $R_c$ dans les médiatrices $a$, $b$, $c$ du triangle. Voici la table de composition qui en résulte.

| $\circ$ | id | $r_1$ | $r_2$ | $R_a$ | $R_b$ | $R_c$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| id | id | $r_1$ | $r_2$ | $R_a$ | $R_b$ | $R_c$ |
| $r_1$ | $r_1$ | $r_2$ | id | $R_c$ | $R_a$ | $R_b$ |
| $r_2$ | $r_2$ | id | $r_1$ | $R_b$ | $R_c$ | $R_a$ |
| $R_a$ | $R_a$ | $R_b$ | $R_c$ | id | $r_1$ | $r_2$ |
| $R_b$ | $R_b$ | $R_c$ | $R_a$ | $r_2$ | id | $r_1$ |
| $R_c$ | $R_c$ | $R_a$ | $R_b$ | $r_1$ | $r_2$ | id |

On y retrouve notamment les deux composées $r_1 \circ R_a = R_c$ et $R_a \circ r_1 = R_b$ mentionnées au tout début de la discussion de la question #3. On observe aussi qu'en composant une réflexion avec elle-même, on obtient l'isométrie identité : l'image de l'image d'un point, par réflexion dans un miroir, est le point lui-même.

Tel que mentionné plus haut, on voit aisément que le groupe diédre $D_3$ n'est pas abélien.

**Note 9 :**

La construction de la table de Cayley de $D_3$, entrée par entrée, peut se faire comme à la solution de la partie ii), à propos de $D_2$. Exercice élémentaire, quoiqu'un brin fastidieux!

On pourrait aussi faire appel à divers théorèmes généraux sur les isométries, tel par exemple le résultat suivant :

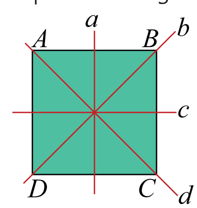
*étant donné deux droites $x$ et $y$, la composée $R_y \circ R_x$ est une rotation dont le centre est le point d'intersection de $x$ et $y$ et dont l'angle est le double de l'angle (orienté) de $x$ vers $y$.*[6]

Mais nous n'entrons pas dans de telles considérations ici.

iv) Comparativement au rectangle de la partie ii) — ou au losange de la note 6 —, le carré est plus riche en symétries : il possède quatre axes de symétrie, à savoir les deux médiatrices des côtés (comme pour le rectangle) et les deux diagonales (comme pour le losange), ce qui en fait une figure symétrique par quart de tour. On a donc

$D_4 = \{\mathrm{id}, r_1, r_2, r_3, R_a, R_b, R_c, R_d\}$,

où $r_n$ ($n$ = 1, 2, 3) représente une rotation d'angle multiple de 1/4 de tour autour du centre du carré et les droites $a$, $b$, $c$ et $d$ sont comme indiqué sur la figure suivante.




Voici la table de composition du groupe diédre $D_4$, dont la construction demande une certaine patience (voir à ce propos la note 9), mais qui recèle de belles régularités.

| $\circ$ | id | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ | $R_a$ | $R_b$ | $R_c$ | $R_d$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| id | id | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ | $R_a$ | $R_b$ | $R_c$ | $R_d$ |
| $r_1$ | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ | id | $R_d$ | $R_a$ | $R_b$ | $R_c$ |
| $r_2$ | $r_2$ | $r_3$ | id | $r_1$ | $R_c$ | $R_d$ | $R_a$ | $R_b$ |
| $r_3$ | $r_3$ | id | $r_1$ | $r_2$ | $R_b$ | $R_c$ | $R_d$ | $R_a$ |
| $R_a$ | $R_a$ | $R_b$ | $R_c$ | $R_d$ | id | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ |
| $R_b$ | $R_b$ | $R_c$ | $R_d$ | $R_a$ | $r_3$ | id | $r_1$ | $r_2$ |
| $R_c$ | $R_c$ | $R_d$ | $R_a$ | $R_b$ | $r_2$ | $r_3$ | id | $r_1$ |
| $R_d$ | $R_d$ | $R_a$ | $R_b$ | $R_c$ | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ | id |

**Note 10 :**

Les 64 entrées de la table de Cayley du groupe $D_4$ se divisent de façon assez naturelle en quatre blocs de dimensions 4 x 4. Il peut être intéressant de considérer chacun de ces blocs en soi.

- Le bloc situé dans le coin supérieur gauche (au Nord-Ouest du tableau) est identique à la table de composition du groupe cyclique $C_4$. On exprime ce phénomène en disant que $C_4$ est un *sous-groupe* de $D_4$. On signifie ainsi qu'en com-

6. *Voir par exemple George E. Martin,* Transformation Geometry: An Introduction to Symmetry, *New York: Springer, 1982, chapitre 6.*

posant deux des quatre isométries étiquetant ce bloc (en entête et à la gauche), on obtient l'une de ces quatre isométries. On parle alors de la *fermeture* du bloc pour la composition.

- Le bloc du coin inférieur droit (au Sud-Est) illustre le fait que la composée de deux réflexions est toujours une rotation.

  Il convient de souligner que ce phénomène peut aussi s'interpréter en lien avec l'effet d'une isométrie sur l'*orientation* des figures. Pensons ici à une rosace du type 1-pied (donc asymétrique), telle la lettre « F ». En faisant pivoter le F, il demeure un F, même avec la tête en bas. Mais par réflexion, l'image du F n'est plus une lettre de notre alphabet. On dira alors qu'on a *inversé l'orientation* de cette figure.[7] Le bloc du Sud-Est illustre le fait qu'en inversant deux fois une figure, on rétablit son orientation.
- Quant aux deux autres blocs (Sud-Ouest et Nord-Est), on trouve toujours comme entrée une réflexion, illustrant ainsi le fait que lorsqu'on compose une rotation et une réflexion (peu importe l'ordre de composition), on se trouve à inverser l'orientation de la figure donnée (voir aussi à ce propos la note infrapaginale 7). Il n'est donc pas étonnant que parmi les isométries laissant fixe une rosace, la composée d'une rotation et d'une réflexion soit à coup sûr une réflexion.

---

**En guise de conclusion :**

*Un mot à propos de la notion générale de groupe*

Je n'ai pas voulu dans l'article insister indûment sur la notion de *groupe* en tant que telle. Mais il peut être utile de profiter des exemples concrets de groupes dont il est question dans ces problèmes pour jeter un peu d'éclairage sur ce concept fondamental en mathématiques. Je vais me servir principalement à cette fin du groupe diédre $D_4$.

Rappelons tout d'abord que le concept de groupe repose sur la donnée d'un *ensemble* sur lequel est définie une certaine *opération*.[8] Par exemple, dans notre cas de figure, l'ensemble des isométries $D_4 = \{\mathrm{id}, r_1, r_2, r_3, R_a, R_b, R_c, R_d\}$, avec comme opération la composition de fonctions — en l'occurrence, la composition d'isométries.[9] À noter que le mot opération correspond au fait qu'en opérant sur deux des éléments appartenant à $D_4$, on trouve une isométrie composée qui reste dans $D_4$. (On exprime ce fait en disant que $D_4$ est *fermé* pour cette opération.)

---

**Note 11** : *(À propos de fermeture)*

Si on considère le sous-ensemble $\{\mathrm{id}, r_1, r_2, r_3\}$ de $D_4$, on a là encore un phénomène de fermeture, en ce sens que la composée de deux éléments de ce sous-ensemble nous ramène dans celui-ci. Cela correspond au fait (mentionné à la note 10) que $C_4$ est un sous-groupe de $D_4$. Par contre, le sous-ensemble $\{R_a, R_b, R_c, R_d\}$ ne respecte pas la propriété de fermeture.

---

Tel que mentionné brièvement dans la section *Pour en savoir plus*, la définition de groupe repose sur le respect de trois propriétés caractéristiques, que je vais maintenant présenter sommairement.

1) *L'opération est associative.*

   On demande tout d'abord que l'opération en jeu soit associative. On veut cerner ainsi l'idée qu'en opérant sur plusieurs éléments, la façon dont on regroupe ceux-ci deux à deux n'intervient pas. C'est le cas par exemple de la multiplication :

   $$(3 \times 5) \times 6 = 3 \times (5 \times 6).$$

---

7. *On peut introduire une notion d'*orientation *des isométries comme suit : une isométrie est dite* directe *si elle préserve l'orientation des angles, et* indirecte *si elle l'inverse (à noter qu'on travaille alors avec des* angles orientés*). Les translations et les rotations sont directes, et les réflexions, indirectes. En composant, par exemple, une isométrie directe avec une indirecte, on obtient forcément une isométrie indirecte.*

8. *Insistons sur le fait qu'il s'agit ici d'une opération* binaire, *portant donc sur* deux éléments. *Par exemple, l'addition ou la multiplication dans $\mathbb{Z}$, ou encore la composition d'isométries du plan.*

9. *Parfois, afin de faire ressortir l'idée de* structure *sous-jacente à la notion de groupe, on utilisera une notation telle $(D_4, \circ)$, où $\circ$ représente l'opération de composition sur l'ensemble d'isométries $D_4$. Plus généralement, pour un ensemble $\mathbb{G}$ muni d'une opération $*$, on aura la structure de groupe $(\mathbb{G}, *)$.*

Dans le cas qui nous intéresse, on fait appel au résultat général voulant que la composition de fonctions est associative. Ce résultat s'illustre assez aisément sur un cas concret, par exemple en vérifiant, en lien avec $D_4$, qu'on a bien l'égalité

$$(R_b \circ r_1) \circ R_d = R_b \circ (r_1 \circ R_d).$$

(Il s'agit de suivre le chemin parcouru par les sommets du carré.)

2) *L'opération a un élément neutre.*

Un élément *neutre* par rapport à une certaine opération est tel qu'en opérant avec cet élément, on ne change rien. C'est le cas par exemple de l'addition du nombre 0 — 0 est le *neutre additif* — ou encore de la multiplication par le *neutre multiplicatif* 1.

C'est bien sûr id, l'isométrie identité, qui joue ici le rôle d'*élément neutre pour la composition.* Et ce fait est saute clairement aux yeux en regardant la première ligne et la première colonne de la table de Cayley de $D_4$.

3) *Tous les éléments de l'ensemble sont inversibles.*

L'idée générale d'inversibilité est qu'il est possible, étant donné n'importe quel élément en jeu, d'opérer sur lui de manière à obtenir l'élément neutre dont il est question à la condition (2). Ainsi la structure $(\mathbb{Z}, +)$ satisfait à cette condition, grâce à la présence des inverses additifs (–7 est l'inverse additif de 7, et vice versa). Mais $(\mathbb{N}, +)$ ne satisfait pas à la condition d'inversibilité, non plus que $(\mathbb{Z}, \times)$.

Dans le cas de $D_4$, la condition d'inversibilité est clairement vérifiée, car l'isométrie identité se rencontre sur chaque ligne et sur chaque colonne de la table de Cayley. On observera que chaque réflexion est sa propre inverse; c'est aussi le cas de la rotation $r_2$, alors que $r_1$ et $r_3$ sont l'inverse l'une de l'autre.

---

**Note 12 :** *(À propos de la commutativité)*

Une autre propriété que l'on regarde parfois de surcroît, dans un tel cadre, est la *commutativité* de l'opération : est-ce que l'ordre dans lequel on opère sur deux éléments joue un rôle ou non quant au résultat obtenu?

Cette notion n'a pas été retenue comme faisant partie de la notion intrinsèque de groupe. Mais souvent on s'intéressera néanmoins à savoir si elle est présente ou non. On sait par exemple que l'addition est une opération commutative dans $\mathbb{Z}$, de sorte que la structure $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe commutatif (ou abélien) — voir la note 7. Par ailleurs, on a vu ici que ce n'est pas forcément le cas avec la composition d'isométries : ainsi $C_4$ et $D_2$ sont des exemples de groupes abéliens, mais pas $D_4$.

**Note 13 :** *(Un dernier mot sur la fermeture)*

La notion de fermeture, inhérente à celle d'opération, joue donc un rôle fondamental dans le concept de groupe. Qui plus est, les groupes qui nous intéressent ici — groupe de symétrie (cyclique ou dièdre) d'une rosace — étant de cardinalité finie, cette fermeture se visualise clairement dans la table de Cayley correspondante, comme celle de $D_4$ à la question #3-iv.

Mais alors que dire de la table de multiplication donnée au tout début de la solution du #3? Comment expliquer que le produit 35 pour la multiplication 5 x 7 ne figure pas dans l'entête de la table? A-t-on perdu la fermeture?

C'est que cette table (dont l'apprentissage relève de l'école primaire) n'est pas à proprement parler une « table d'opération » (au sens que l'on utilise ici pour $C_4$ ou $D_4$) — autrement dit, ce n'est pas une table donnant *tous* les produits de deux naturels. C'est plutôt une table où se retrouvent les faits de base à connaître « par cœur » (tous les produits de deux nombres à un chiffre) afin de pouvoir calculer « à la main » une grosse multiplication en appliquant l'algorithme usuel.

Cette fameuse table est extraite de la « vraie table » de l'opération de multiplication dans les naturels : c'est une table infinie (!) où se retrouvent toutes les valeurs obtenues en multipliant deux naturels quelconques. Ces produits sont évidemment des nombres naturels, de sorte que la table suivante peut être vue comme illustrant le fait que l'ensemble des naturels est bel et bien fermé pour la multiplication.

| × | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | ⋯ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ⋯ |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | ⋯ |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | ⋯ |
| 3 | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 | 33 | 36 | 39 | ⋯ |
| 4 | 0 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 | 40 | 44 | 48 | 52 | ⋯ |
| 5 | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 | 65 | ⋯ |
| 6 | 0 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 | 60 | 66 | 72 | 78 | ⋯ |
| 7 | 0 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 | 70 | 77 | 84 | 91 | ⋯ |
| 8 | 0 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 | 80 | 88 | 96 | 104 | ⋯ |
| 9 | 0 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 | 90 | 99 | 108 | 117 | ⋯ |
| 10 | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 | 120 | 130 | ⋯ |
| 11 | 0 | 11 | 22 | 33 | 44 | 55 | 66 | 77 | 88 | 99 | 110 | 121 | 132 | 143 | ⋯ |
| 12 | 0 | 12 | 24 | 36 | 48 | 60 | 72 | 84 | 96 | 108 | 120 | 132 | 144 | 156 | ⋯ |
| 13 | 0 | 13 | 26 | 39 | 52 | 65 | 78 | 91 | 104 | 117 | 130 | 143 | 156 | 169 | ⋯ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋱ |

Un exemple (important) de table numérique finie qui respecte bien la notion de fermeture est la *table de la parité* pour la multiplication. Représentant un nombre pair par 0 et un nombre impair par 1, on obtient la table suivante, où on voit que l'ensemble $\{0, 1\}$ est fermé pour la multiplication.

| × | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

On y lit qu'un produit dans lequel un des facteurs est pair est forcément pair, alors que le produit est impair lorsque les deux facteurs sont impairs.

On reconnaît ici la *table de multiplication des entiers modulo 2* — on travaille alors avec les restes obtenus dans la division euclidienne par 2. Par exemple,

$$27 = 13 \times 2 + 1.$$

Cette situation se généralise aux *entiers modulo m*, pour tout $m \geq 2$ : on regarde alors les restes dans la division euclidienne par $m$.