Les mots pour dire
Les rosaces

Les rosaces sont des formes géométriques à la fois riches et accessibles, surtout quand on dispose d'un vocabulaire commode et efficace pour en parler.

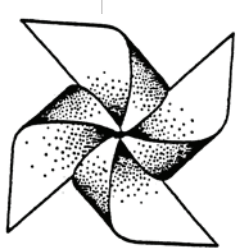
Bernard R. Hodgson
Université Laval

Le terme *rosace* est utilisé pour désigner, en art ou en architecture, une figure symétrique servant d'ornement et faite de courbes inscrites dans un cercle. Dérivé du mot *rose*, il s'applique aussi bien à un grand vitrail rond dans le mur d'une église qu'à un motif arrondi figurant au plafond ou au plancher d'un édifice, voire à une décoration servant simplement à cacher la tête d'un clou.

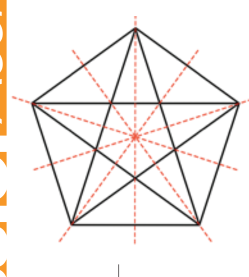
Rosace de la place du Capitole, à Rome
Crédit : IMU Archive / ICMI Centennial

Une rosace se distingue notamment par les symétries qu'elle renferme.

En mathématiques, on appelle rosace une figure géométrique finie, pouvant donc être renfermée dans un cercle. (Le centre de ce cercle peut alors être vu comme le *centre* de la rosace.) Parmi la pléthore de symétries inhérentes au cercle – par rotation autour de son centre ou par réflexion dans l'un des ses diamètres –, on regarde lesquelles subsistent dans une rosace donnée.[1]



Ainsi, le virevent ne possède aucune symétrie de réflexion, mais il est reproduit sur lui-même par une rotation de 90°, 180°, 270° ou 360° autour de son centre. On dira alors qu'il est laissé *fixe* par chacune de ces quatre rotations (voir l'encadré *Le beau fixe*).



Quant au pentagone étoilé, il est fixe pour une rotation autour de son centre et d'angle $n/5$ de tour, pour n = 1, 2, 3, 4 ou 5, et aussi pour une réflexion ayant comme axe l'une des cinq perpendiculaires (en rouge) à un côté du grand pentagone issue du sommet opposé.

1. *Parmi les* isométries *du plan – c'est-à-dire les transformations géométriques préservant les distances –, on se concentre donc ici sur les rotations et les réflexions.*

Le groupe de symétrie d'une rosace

Il est d'usage en mathématiques de caractériser le type de symétrie d'une rosace en termes des isométries du plan la laissant fixe. On parle habituellement du *groupe de symétrie* de cette rosace – car l'ensemble des isométries alors en jeu est une incarnation de la structure algébrique appelée « groupe ».[2]

Revenant au virevent, désignons par r_n la rotation de $n/4$ de tour autour de son centre. On a vu que cette figure est fixe pour les rotations r_1, r_2, r_3 et r_4. Or une rotation de 4/4 de tour (c'est-à-dire le tour complet) a le même effet qu'une rotation d'angle nul. Le groupe de symétrie du virevent peut ainsi se voir comme

$$C_4 = \{r_0, r_1, r_2, r_3\},$$

où r_0 désigne la rotation (d'angle 0 tour) telle $r_0(P) = P$, pour tout point P du plan.[3] C_4 est un exemple de groupe *cyclique* : ses éléments forment un cycle, car ce sont des rotations d'angles multiples du quart de tour.

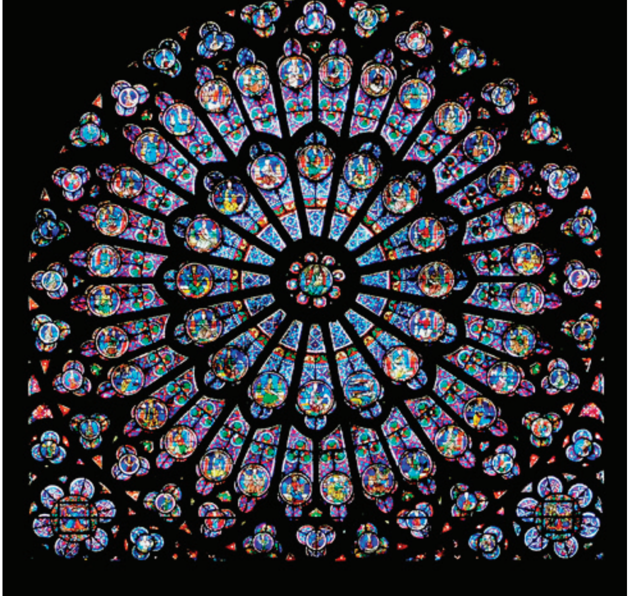
De même, s'intéressant cette fois au pentagone étoilé, on voit qu'aux cinq rotations d'angle multiple du 1/5 de tour s'ajoutent les cinq réflexions dans les axes perpendiculaires. Représentant celles-ci par R_n $(1 \leq n \leq 5)$, on obtient le groupe de symétrie

$$D_5 = \{r_0, r_1, r_2, r_3, r_4, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\}.$$

De manière générale, on aura le groupe *dièdre*[4] D_k, qui contient $2k$ éléments : k rotations de $1/k$ de tour et k réflexions. Pour $k \geq 3$, c'est le groupe de symétrie du polygone régulier à k côtés.

2. *On se trouve ainsi dans la foulée du célèbre* Programme d'Erlangen *du mathématicien allemand Felix Klein (1849-1925). Sauf pour l'appellation, il ne sera pas vraiment question ici de groupes en tant que tels. (Voir cependant la* Section problèmes *et le* Pour en savoir plus.*)*
3. *La rotation r_0 est l'isométrie* identité.
4. *Mot forgé au 18ᵉ siècle sur les racines grecques* di, *« deux », et* edra, *« siège, base » et éventuellement « face » d'un solide (comme dans le mot* polyèdre*). Le mot dièdre renvoie ainsi à l'idée de bilatéralité introduite par les réflexions.*

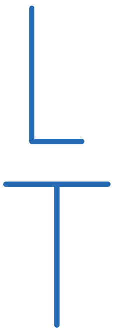
Bernard R. Hodgson • Université Laval


Vitrail de la cathédrale Notre-Dame de Paris
Crédit : Wikipedia / Creative Commons

Le beau fixe

Une figure géométrique est dite *fixe* (ou *invariante*) pour une transformation donnée si, après avoir effectué la transformation, on a l'impression que la figure n'a pas « bougé ». Autrement dit, la figure $\mathcal{F}$ du plan est fixe pour l'isométrie i si elle est égale à son image par i, c'est-à-dire $i(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.

À noter qu'on ne demande pas pour autant que $\mathcal{F}$ soit fixe « point par point », c'est-à-dire que chaque point soit revenu en place; c'est plutôt sa forme globale qui est fixe.



On peut se demander à quel genre de rosace correspond le groupe de symétrie le plus minimaliste qui soit : le groupe cyclique C_1. Comme il contient une seule isométrie (la rotation de 0 tour qui envoie chaque point sur lui-même), la rosace en jeu n'est aucunement symétrique, tout comme le « L » ci-contre. Si on ajoute un axe de réflexion, on passe au groupe dièdre D_1, le groupe de symétrie de la lettre « T », qui possède une symétrie bilatérale.

Lorsqu'une rosace est fixe pour la rotation de $1/k$ de tour, elle le sera aussi pour tout multiple entier de $1/k$. On peut penser, à cet égard, à la construction, à partir de la lettre « L », d'une rosace avec symétrie de $1/k$ de tour : on obtient ainsi forcément le groupe cyclique C_k. Si on y ajoute un axe de symétrie, l'invariance par $1/k$ de tour engendrera illico k axes de symétrie, menant ainsi au groupe D_k.

Un théorème de base sur les rosaces — pas trop difficile à établir (voir le *Pour en savoir plus*) — affirme que tout groupe de symétrie de cardinalité finie d'une rosace est soit un groupe cyclique C_k soit un groupe diédre D_k.

k-pied ou *k*-lobe ?

Les groupes cycliques et diédres capturent donc entièrement l'essence des rosaces. Or l'expérience montre que ces groupes peuvent parfois s'avérer un peu lourds dans certains cadres pédagogiques. Je pense ici notamment à un cours de géométrie offert régulièrement par mon département aux futurs enseignants du primaire : une part importante est consacrée à des travaux pratiques, dont l'un porte justement sur les symétries des rosaces. On y utilise depuis longtemps une terminologie en « pied » et en « lobe », que nos étudiants adoptent volontiers. Le virevent devient alors un *4-pied*, tandis que le pentagone régulier étoilé est un *5-lobe*. Plus besoin de faire intervenir les groupes C_4 ou D_5 : on parle de la rosace en elle-même. Bien sûr on perd un peu de la richesse qu'apporte le cadre général de la théorie des groupes. Mais on y gagne une familiarité directe avec les rosaces, sans intermédiaires peut-être intimidants.

Plus généralement, on appelle *k-pied* une rosace ne possédant que des symétries de rotation (k correspondant au nombre de rotations distinctes laissant fixe la figure); et *k-lobe*, une rosace symétrique par réflexion (k désigne alors le nombre d'axes de symétrie de la figure, concourants en un point — ces réflexions peuvent être vues comme engendrant les rotations autour de ce point).

Mais pourquoi « lobe »? Sans doute parce que des mots comme *trilobé* (« qui a trois lobes ») et *quadrilobé* font partie de la terminologie utilisée en architecture ou en botanique. Et pourquoi « pied »? J'ai souvenir que Ghislain Roy (voir encadré) m'avait mentionné comme sources de son inspiration les mots *trépied*, *tripode* et *quadrupède* (où l'on dénombre les pieds), de même que le mot *triskèle* (du grec *skelos*, « jambe »).[5] Et il trouvait finalement que *k*-pied sonnait mieux que *k*-jambe…

5. *Comme dans le mot* isocèle, *« qui a des jambes égales ».*


Triskèle (Syracuse) (4e siècle avant notre ère)
Crédit : Wikipedia / Creative Commons

En hommage à Ghislain Roy (1928-2023)


Crédit : Marie Roy

Cette efficace nomenclature des *k*-pieds et *k*-lobes est une trouvaille de mon collègue mathématicien et géomètre Ghislain Roy, professeur à l'Université Laval de 1956 à 1992. C'est quelque part durant les années 1980 qu'il a proposé ce vocabulaire, immédiatement adopté dans nos cours pour les enseignants.

Merci, Ghislain, pour ce précieux héritage!