Les radicaux imbriqués

Léo a fait des investigations sur les radicaux imbriqués[1] et partage ses observations avec Zia.

André Ross
Professeur retraité

Léo
Je me suis amusé à faire des calculs sur des radicaux imbriqués. J'ai obtenu

$$\sqrt{1} = 1$$
$$\sqrt{1+\sqrt{1}} = 1{,}414\,213...$$
$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}} = 1{,}553\,773...$$
$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}} = 1{,}598\,053...$$

Je me suis demandé si en continuant ainsi à l'infini, la valeur obtenue serait 1,6.

J'ai décidé d'essayer avec le radical de 2, j'ai obtenu les valeurs suivantes

$$\sqrt{2} = 1{,}414\,213...$$
$$\sqrt{2+\sqrt{2}} = 1{,}847\,759...$$
$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 1{,}961570773...$$
$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} = 1{,}990\,369...$$

La valeur limite semble être 2, mais je ne voie pas comment m'en assurer. J'ai continué ainsi

$$\sqrt{3} = 1{,}732\,050...$$
$$\sqrt{3+\sqrt{3}} = 2{,}175\,327...$$
$$\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}} = 2{,}274\,934...$$
$$\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}} = 2{,}296\,722...$$

Je me suis demandé : est-ce qu'il est possible que la valeur limite ne soit jamais un entier ?

Zia
Fais comme un mathématicien et suppose que tu connais la réponse. Tu devrais pouvoir la trouver.

Léo
Je ne comprends pas.

Zia
Suppose que tu connais la réponse et appelle-là x.

$$x = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}}$$

Comme le processus est infini, il est possible de substituer la valeur x à la fin de l'expression, ce qui donne $x = \sqrt{1+x}$.

Léo
Je ne trouve pas qu'on est plus avancé.

Zia
Patience ! On a beaucoup progressé, même si ça ne paraît pas. Si j'élève au carré l'expression obtenue, j'ai

$$x^2 = 1 + x.$$

En regroupant les termes du même côté de l'égalité, ça donne

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Léo
Youpi! On a une équation quadratique. En résolvant cette équation, on va trouver la valeur de x vers laquelle tend la suite.

Zia
Tout à fait.

Léo
Je me souviens qu'une équation quadratique $ax^2 + bc + c = 0$ a deux racines. L'une est

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Mais, la valeur négative est à rejeter, elle n'est pas possible

1. *Voir la vidéo 01-RadicauxImbriqués à l'adresse https://www.youtube.com/@Accromath/featured*

avec les données du problème. Il faut donc la rejeter. La deuxième racine est donnée par

$$x=\frac{1+\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1{,}618\,033\ldots$$

Oups! La limite n'est pas 1,6 comme je le pensais.

Zia
En effet, la limite est ce qu'on appelle maintenant le «nombre d'or»[2].

Léo
Si je tiens le même raisonnement avec 2,

$$x=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}$$

J'ai donc $x=\sqrt{2+x}$ et, en élevant au carré les deux membres de l'équation, j'obtiens $x^2=2+x$. En regroupant les termes du même côté de l'égalité,

$$x^2-x-2=0.$$

La racine positive de l'équation est alors

$$x=\frac{1+\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1+3}{2}=2.$$

J'avais raison dans ce cas, la valeur limite est bien 2.

Je vais essayer avec 3 pour voir.

Zia
Pas besoin, essaie avec un entier k, tu vas avoir les réponses à toutes tes interrogations.

Léo
Ok. J'essaie avec k? J'ai donc au départ

$$x=\sqrt{k+\underbrace{\sqrt{k+\sqrt{k+\sqrt{k+\ldots}}}}_{x}}$$

ou $x=\sqrt{k+x}$. En élevant au carré et en regroupant les termes du même côté de l'égalité, on a

$$x^2-x-k=0.$$

La racine positive de cette équation est

$$x=\frac{1+\sqrt{1+4k}}{2}$$

Zia
Ainsi pour $k=3$, la valeur limite est

$$\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\ldots}}}}=\frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

On peut savoir pour quelles valeurs de k la limite est un nombre entier. Il suffit de choisir k de telle sorte que $4k+1$ soit un carré.

Ainsi, pour $k=6$, on a $4\times6+1=25$, d'où

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}}=\frac{1+\sqrt{25}}{2}=3.$$

Pour $k=12$, on a $4\times12+1=49$ d'où

$$\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\ldots}}}=\frac{1+\sqrt{49}}{2}=4.$$

Pour $k=20$, on a $4\times20+1=81$, d'où

$$\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\ldots}}}=\frac{1+\sqrt{81}}{2}=5.$$

Léo
On peut construire un tableau mettant en correspondance la valeur limite lorsque m est un entier et le nombre k.

m	k
2	2
3	6
4	12
5	20
⋮	⋮

Zia
Belle initiative ! Ça permet de voir que la limite est un nombre entier lorsque le nombre k est le double du nombre triangulaire de rang inférieur à k.

m	k	Décomposition
2	2	2
3	6	2(1 +2)
4	12	2(1+2+3)
5	20	2(1+2+3+4)
⋮	⋮	⋮

Léo
Oui! Qu'elle devra être la valeur de k pour que

$$\sqrt{k+\sqrt{k+\sqrt{k+\ldots}}}=10\,?$$

Il suffit de prendre le double du neuvième nombre triangulaire, soit

$$k=2\times\frac{9\times10}{2}=90.$$

On a alors

$$\sqrt{90+\sqrt{90+\sqrt{90+\ldots}}}=\frac{1+\sqrt{361}}{2}=\frac{1+19}{2}=10.$$

En définitive, pour que la limite soit le nombre entier m, je dois avoir la relation

$$\sqrt{(m-1)\,m+\sqrt{(m-1)\,m+\ldots}}=m.$$

Zia
Tout nombre entier positif $m>1$ s'exprime donc comme une somme de radicaux imbriqués.

Léo
C'est plaisant de mettre en lumière des relations cachées par des nombres qui se révèlent en représentant ces nombres par des lettres.

Zia
Je ne savais pas qu'on pouvait exprimer tout nombre naturel de cette façon.

2. *Pour en savoir plus sur le nombre d'or, voir les articles* Nautile, nombre d'or et spirale dorée, *et* Spirales végétales, *vol 3.2, été-automne 2008. Voir aussi* Le nombre d'or, *par André Ross, vol 5.1, hiver-printemps 2010.*

Nombres triangulaires

Un nombre triangulaire est la somme des entiers positifs qui le précèdent, de 1 à n, ce qui donne

$$T_n=\frac{n(n+1)}{2}.$$