Le paradoxe des files de voitures

Rubrique des **Paradoxes**

Jean-Paul Delahaye
Université de Lille

Une section d'autoroute d'une longueur de 18 km possède deux voies *R* et *L*. À cause de trous dans la chaussée ou pour d'autres raisons, la voie *L* est lente, alors que la voie *R* est rapide. Les voitures ne sont pas autorisées à changer de file sur cette section. La voie *L* avance à 18 km/h (5 m par seconde). On mesure que les voitures sur la voie *L* sont séparées de 5 m et donc, en un point donné de la voie *L*, il passe une voiture chaque seconde. Une voiture engagée sur *L* y reste 1 heure avant d'arriver à l'extrémité de la section. À chaque instant, il y a donc 3 600 voitures sur la voie lente *L*.

La voie rapide *R* avance à 72 km/h (20 m par seconde). On mesure que les voitures sur la voie *R* sont espacées de 10 m, et donc, en un point donné de la voie *R*, il passe 2 voitures par seconde. Une voiture engagée sur *R* y reste 15 minutes. Puisque la section mesure 18 km, à chaque instant, il y a 1800 voitures sur la voie *R*. Il résulte aussi de ces données qu'une voiture sur la voie *R* double 3 voitures de *L* par seconde et qu'une voiture sur la voie *L* est doublée 3 fois toutes les 2 secondes.

Ces données sont indiquées pour que chacun puisse refaire les petits calculs dont nous indiquons les conclusions. On pourrait bien sûr faire varier un peu ces données sans faire disparaître le paradoxe que nous allons rencontrer. Je suis sur cette autoroute, les yeux bandés. On m'indique qu'il se produit un dépassement. On me pose les questions :

Q_1 : Quelle est la probabilité P_1 que je sois celui qui double ?

Q_2 : Quelle est la probabilité P_2 que je sois celui qui est doublé ?

Je dois parier pour l'une des ces options. Bien entendu, on suppose que je ne puisse percevoir la vitesse de la voiture. Je veux mettre toutes les chances de mon côté. Je réfléchis soigneusement.

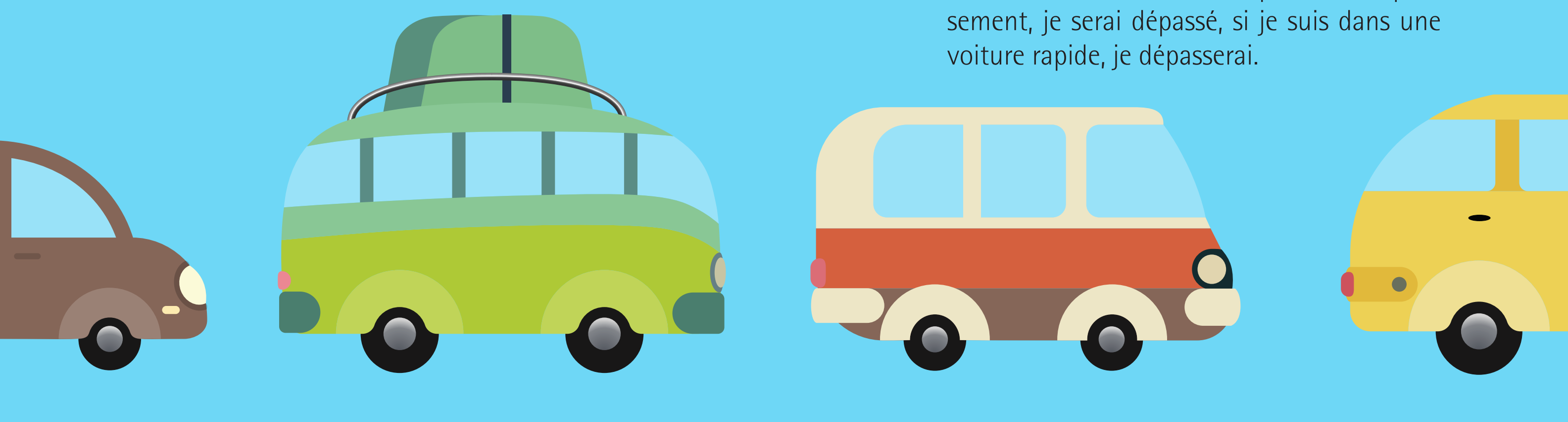
Trois raisonnements sont possibles que chacun vérifiera en détail avec les données numériques présentées lorsqu'elles interviennent.

Raisonnement 1

La réponse aux questions Q_1 et Q_2 ne dépend pas des données précises du problème car, à chaque dépassement qui se produit, il y a une voiture dépassée et une voiture qui dépasse. J'ai donc autant des chances d'être dans l'une ou l'autre des situations. Le réponse est **P_1 = P_2 = 1/2**.

Raisonnement 2

Sur les 18 kilomètres de la section d'autoroute, il y a 3600 voitures lentes et 1800 voitures rapides. J'ai donc 2 chances sur trois d'être dans une voiture lente et 1 chance sur trois d'être dans une voiture rapide. Si je suis dans une voiture lente, au prochain dépassement, je serai dépassé, si je suis dans une voiture rapide, je dépasserai.



Sans information particulière, j'ai donc deux fois plus de chances d'être dans une voiture qui est dépassée que dans une voiture qui dépasse, et les réponses sont donc $P_1 = 1/3$ et $P_2 = 2/3$.

Raisonnement 3

À l'entrée de la section d'autoroute concernée, il passe une voiture lente par seconde, et deux voitures rapides par seconde (c'est le cas en fait en chaque point du tronçon). En se présentant à l'entrée de cette section d'autoroute, une voiture ne sait pas quelle est la voie rapide et quelle est la voie lente. Les voitures se disposent donc au hasard et une voiture se retrouve donc 2 fois plus souvent sur la voie rapide que sur la voie lente. Cela est dû simplement au fait que la file rapide absorbe deux fois plus de voitures que la file lente. J'ai donc deux fois plus de chance d'être dans une voiture qui dépasse que dans une voiture qui est dépassée. Les réponses sont donc $P_1 = 2/3$ et $P_2 = 1/3$.

C'est ennuyeux, les trois raisonnements qui sont absolument rigoureux – refaites les calculs – aboutissent à trois conclusions différentes. Comment se sortir du paradoxe ?

Solution du paradoxe précédent

Un monde mathématique immobile

Le principe de récurrence est l'un des outils les plus puissants du raisonnement mathématique. Il consiste, pour établir une propriété générale du type « pour tout n, $P(n)$ », à prouver deux affirmations :

(i) $P(0)$ est vrai

(ii) si $P(n)$ est vrai pour $n = 0, 1, ..., k$

alors $P(k+1)$ est vrai.

Dans un raisonnement par récurrence, malheureusement l'intuition est un peu perdue, aussi des erreurs deviennent possibles. Voici un exemple de raisonnement par récurrence conduisant à une absurdité.

Nous allons démontrer qu'en mathématiques rien ne bouge, plus précisément, nous allons établir que toutes les fonctions $x \longrightarrow x^n$ (n un entier fixé) sont des fonctions constantes.

i) C'est vrai pour $n = 0$ car $x^0 = 1$ (par convention) et que la dérivée d'une constante est la fonction nulle.

ii) Supposons que c'est vrai pour $n = 0, 1, ..., k$, c'est-à-dire que la dérivée de la fonction $x \longrightarrow x^n$ est nulle :

$$(x^n)' = 0 \text{ pour } n = 0, 1, ..., k.$$

Utilisons maintenant la formule de dérivation d'un produit $(uv)' = u'v + uv'$. On a :
$(x^{k+1})' = (x \cdot x^k)' = x' \cdot x^k + x \cdot (x^k)'$

On obtient 0 car, d'après l'hypothèse de récurrence, on a $x' = (x^1)' = 0$ (on utilise l'hypothèse avec $n = 1$) et $(x^k)' = 0$ (on utilise l'hypothèse avec $n = k$).

Nous avons donc $(x^{k+1})' = 0$, ce que nous souhaitions. Qu'est-ce qui cloche ?

Solution

Lorsque $k = 0$, l'hypothèse de récurrence donne uniquement $(x^0)' = 0$ et non pas comme le raisonnement l'utilise que

$$(x^0)' = 0 \text{ et } (x^1)' = 0$$

Le passage de k à $k + 1$ fonctionne donc bien pour aller de 1 à 2, 2 à 3, de 3 à 4, etc., mais ne marche pas pour aller de 0 à 1. Le seul fait qu'une étape ne puisse fonctionner rend évidemment la conclusion fausse..., ce que nous savions par avance, mais dont il fallait comprendre la raison.

La confusion provient de la notation $n = 0, 1, ..., k$ qui laisse croire qu'à chaque étape on a au moins $P(0)$ et $P(1)$ vrais, alors qu'en fait lorsque $k = 0$, on a seulement $P(0)$.