

# Un monde mathématique immobile

## Rubrique des Paradoxes

Jean-Paul Delahaye  
Université des Sciences  
et Technologies de Lille

Le principe de récurrence est l'un des outils les plus puissants du raisonnement mathématique. Il consiste, pour établir une propriété générale du type « pour tout  $n$ ,  $P(n)$  », à prouver deux affirmations :

- (i)  $P(0)$  est vrai
- (ii) si  $P(n)$  est vrai pour  $n=0, 1, \dots, k$ , alors  $P(k+1)$  est vrai.

Dans un raisonnement par récurrence, malheureusement l'intuition est un peu perdue, aussi des erreurs deviennent possibles. Voici un exemple de raisonnement par récurrence conduisant à une absurdité.

Nous allons démontrer qu'en mathématiques rien ne bouge, plus précisément, nous allons établir que toutes les fonctions  $x \rightarrow x^n$  ( $n$  un entier fixé) sont des fonctions constantes.

- i) C'est vrai pour  $n=0$  car  $x^0 = 1$  (par convention) et que la dérivée d'une constante est la fonction nulle.
- ii) Supposons que c'est vrai pour  $n=0, 1, \dots, k$ , c'est-à-dire que la dérivée de la fonction  $x \rightarrow x^n$  est nulle :

$$(x^n)' = 0 \text{ pour } n=0, 1, \dots, k.$$

Utilisons maintenant la formule de dérivation d'un produit  $(uv)' = u'v + uv'$ . On a :

$$(x^{k+1})' = (x \cdot x^k)' = x' \cdot x^k + x \cdot (x^k)'$$

On obtient 0 car, d'après l'hypothèse de récurrence, on a  $x' = (x^1)' = 0$  (on utilise l'hypothèse avec  $n=1$ ) et  $(x^k)' = 0$  (on utilise l'hypothèse avec  $n=k$ ).

Nous avons donc  $(x^{k+1})' = 0$ , ce que nous souhaitons. Qu'est-ce qui cloche ?

### Solution du paradoxe précédent

## Le dé le plus fort

Si l'on admet que les organisateurs des jeux de Loto ne trichent pas, alors toutes les grilles ont la même probabilité d'être tirées et cela à chaque tirage qui sera indépendant des précédents. En particulier, il est inutile de noter les numéros déjà tombés lors des tirages passés et de les éviter (si l'on pense qu'ayant déjà été tirés ils le seront moins) ou de les jouer de préférence aux autres (si l'on pense que ce sont des numéros chanceux dont il faut tirer parti).

Tout comportement tentant d'exploiter des informations sur les numéros déjà tombés est une forme de superstition. Y succomber est certes un penchant natu-

rel et c'est une forme de paradoxe que de nombreuses personnes ayant suivi des cours de probabilités basent leurs martingales pour le Loto sur les numéros anciennement tombés. Cependant, ce n'est pas de ce paradoxe psychologique dont nous voulons parler ici. Le paradoxe qui nous intéresse est que :

- même si les organisateurs du jeu ne trichent pas et que le passé des tirages n'a pas la moindre influence sur les prochains tirages, il est faux d'en déduire que l'on doit jouer au hasard et que les numéros

## Solution du paradoxe précédent

choisis quand on coche une grille sont sans importance. Certaines grilles sont meilleures que d'autres pour une raison sérieuse qui ne contredit en rien les lois admises des probabilités. Pourquoi ?

### Solution du paradoxe

Le Loto, tel qu'il se pratique en France et dans de nombreux autres pays, répartit la somme gagnée entre les joueurs ayant choisi les numéros gagnants. L'intérêt d'un joueur est donc de jouer une grille que personne d'autre ne joue. Il n'augmente pas sa probabilité de gagner, mais il augmente la somme d'argent qu'il gagne le jour où il gagne. Son espérance de gain – la somme moyenne qu'il gagne à chaque fois qu'il joue – augmente donc.

Ceux qui ne peuvent pas se passer du plaisir de rêver que l'on éprouve en remplissant une grille, et qui voudraient rendre leurs méthodes de jeux plus rationnelles, doivent réfléchir aux grilles les plus jouées pour les éviter et chercher à connaître plus généralement les numéros que les joueurs cochent le plus fréquemment.

Pour connaître les numéros joués préférentiellement, on peut faire appel au bon sens psychologique. Les joueurs composent assez souvent leurs grilles à partir de dates. Cela favorise les nombres entre 1 et 12 (les numéros des mois), les nombres entre 1 et 31 (les numéros des jours), et le 20 (à cause des années récentes qui commencent par 20). On sait aussi que les numéros pris dans le monde réel sont souvent soumis à la loi de Benford qui favorise les nombres commençant par un 1 par rapport à ceux commençant par un 2, ceux commençant par un 2 par rapport à ceux commençant par un 3, etc.

L'hypothèse que les petits numéros sont plus joués que les autres peut être confirmée très simplement en considérant le nombre de gagnants des diverses grilles et en vérifiant que les grilles composées de petits numéros ont plus de gagnants que les autres. Les tests statistiques menés dans ce sens donnent des

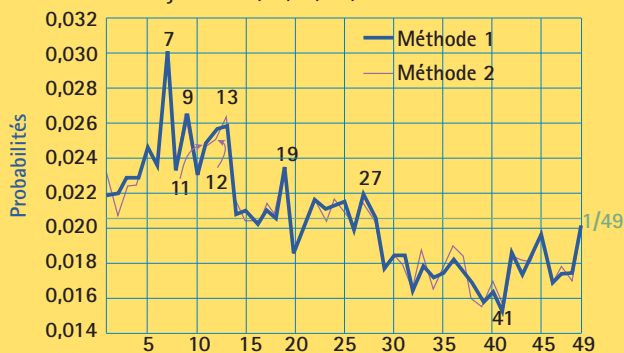
résultats très nets. On trouve par exemple que (a) la moyenne des numéros des grilles pour lesquelles il n'y a eu aucun gagnant de rang 1 est 26,91 ; (b) la moyenne des numéros des grilles ayant eu 8 gagnants de rang 1 est 23,68 ; (c) la moyenne des numéros des grilles ayant 16 gagnants de rang 1 est 21,66. Plus la moyenne des numéros d'une grille est faible, plus elle a de gagnants..., et moins elle rapporte. Dernière confirmation élémentaire de la préférence pour les petits numéros : le plus petit gain obtenu par des gagnants de rang 1 l'a été le 27 août 1994 pour la grille 4-5-7-14-15-17 qui ne comporte aucun numéro au-delà de 17.

N'oubliez pas cependant que, même en utilisant les données statistiques des numéros joués par les parieurs, il apparaît quasiment impossible de rattraper le pourcentage pris par la Française des Jeux et qu'elle ne redistribue pas. Autrement dit, il semble qu'au Loto aucune méthode ne conduise à des stratégies de jeux où l'espérance de gains soit supérieure à l'argent dépensé pour jouer. Il vaut mieux ne pas jouer !

### Courbe des numéros choisis

Plus joués : 7, 9, 13, 12, 11, 5

Moins joués : 41, 39, 32, 38, 40



Estimation des fréquences avec lesquelles les joueurs de Loto choisissent les numéros qu'ils cochent

Cette courbe indique les numéros les plus joués par les joueurs du Loto de la Française des Jeux. Chaque numéro, a priori, devrait être joué avec une probabilité de 1/49. Cependant, parce que les joueurs choisissent des dates ou de numéros provenant de données réelles ou parce que certains numéros ne plaisent pas (le 2 par exemple), les probabilités se trouvent parfois au-dessus ou au-dessous de 1/49. La Française des Jeux ne publie pas ces données. Elles ont été calculées par des méthodes d'estimations statistiques indirectes. Deux méthodes différentes ont été utilisées. Le fait qu'elles coïncident presque en tout point assure qu'elles sont proches des données réelles gardées secrètes. On remarque que le numéro 7 est le plus populaire et qu'une tendance générale est que plus le numéro est grand, moins il est joué, ce qui est conforme aux explications invoquant l'attrait des joueurs pour les dates et une incidence de la loi de Benford.

