Accromath Vol. 19 • été – automne 2024

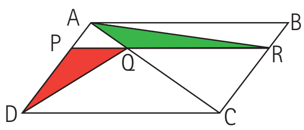


# Zia et Léo se lancent un défi

*Zia et Léo se lance chacun un défi.*

**André Ross**
Professeur retraité

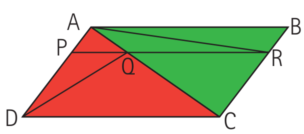
**Zia**
Supposons un parallèlogramme ABCD et soit P un point du côté AD. On forme un second parallélogamme en traçant PR parallèle à AB qui coupe BC en R et la diagonale AC en Q. Peux-tu démontrer que les triangles PQD et AQR ont la même aire.



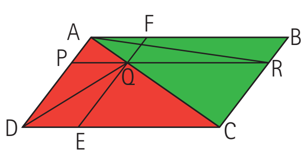

**Léo**
Ah! Un défi, j'aime ça. Voyons voir ... J'imagine qu'il faut partir de l'égalité des deux triangles ABC et ADC du parallélogramme ABCD et soustraire des parties de la figure pour arriver au résultat, mais il faudra peut-être faire une construction en cours de route.

**Zia**
C'est une façon d'envisager le problème.

**Léo**
Parfait allons-y. Les deux triangles ABC et ADC ont la même aire $A_{ABC} = A_{ADC}$.



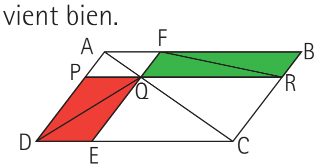

Je trace le segment de droite EF parallèle au côté AD passant par le point Q.



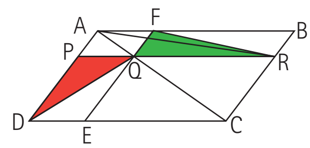

Je décompose ainsi le parallélogramme en quatre parallélogrammes. En retranchant les aires de chacun des parallélogrammes $A_{APQF}$ et $A_{QECR}$, j'obtiens

$$A_{PQED} = A_{FQRB}.$$

**Zia**
Ça s'en vient bien.

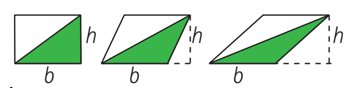



**Léo**
Je peux retrancher dans chaque cas la moitié de l'aire puisque la diagonale d'un parallélogramme divise celui-ci en deux parties égales.



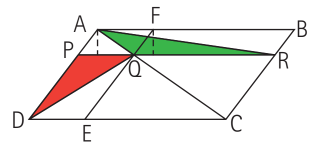

**Zia**
C'est bon, mais ce n'est pas tout à fait ce qui était demandé.

**Léo**
Je ne suis pas dans un cul-de-sac. L'aire d'un triangle est la moitié du produit de sa base par sa hauteur. La hauteur peut être située n'importe où




Il me suffit donc de déplacer le sommet du triangle parallèlement à la base et l'aire du triangle reste la même. La hauteur ne change pas et j'ai bien que l'aire du triangle PDQ est égale à l'aire du triangle AQR.

$$A_{PDQ} = A_{AQR}$$

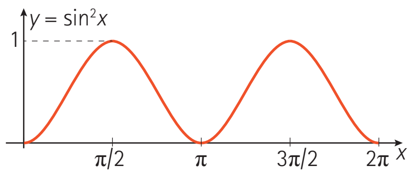



Ce qu'il fallait démontrer (CQFD)[1].

1. *Voir la vidéo* 01-DéfisAires *à l'adresse* *https://www.youtube.com/@Accromath/featured*

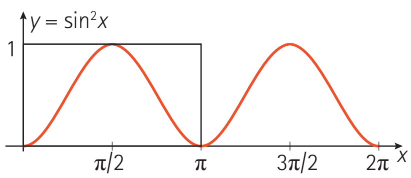
**Léo**

Toi, en te servant du graphique suivant, est-ce que tu serais capable de démontrer que l'aire sous la courbe de $y = \sin^2 x$ dans l'intervalle $[0, \pi]$ est égale à $\pi/2$.




**Zia**

Bon qu'est-ce qu'on peut faire ? Dans l'intervalle $[0; \pi]$, j'inscris la partie de la courbe dans un rectangle.



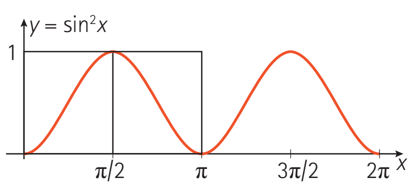

La différence des hauteurs, du rectangle à la courbe, est $1 - \sin^2 x$. Elle est donc égale à $\cos^2 x$ en chaque point de l'intervalle.

**Léo**

C'est bien parti.

**Zia**

Du point sommet de la courbe, j'abaisse la hauteur. Je divise ainsi l'aire du rectangle en quatre parties.

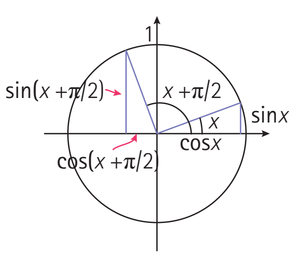



**Léo**

Jusque là, je te suis.

**Zia**

Je vais maintenant montrer que ces aires sont égales en établissant une relation entre les fonctions trigonométriques des angles $x$ et de $x + \pi/2$. Pour ce faire, je les représente dans un cercle de rayon 1 (cercle trigonométrique).

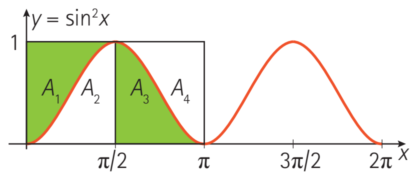



Je peux dire que la partie $A_1$ de l'intervalle $[0; \pi/2]$ est égale à la partie $A_3$ car

$$\sin(x + \pi/2) = \cos x,$$

d'où

$$\sin^2(x + \pi/2) = \cos^2 x.$$



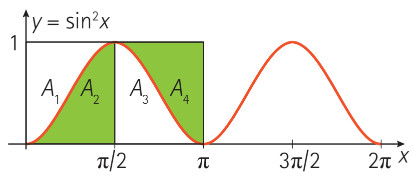

Je peux également dire que

$$\cos(x + \pi/2) = \sin x\,,$$

d'où

$$\cos^2(x + \pi/2) = \sin^2 x.$$

Par conséquent, $A_2 = A_4$.

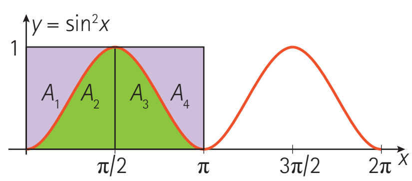



**Léo**

On sait aussi que dans l'intervalle $[0; \pi[$, le graphique de $\sin^2 x$ est symétrique par rapport à $x = \pi/2$. On a donc que l'aire $A_2 = A_3$. L'aire de toutes ces parties est donc la même.

**Zia**

Je peux donc dire que l'aire sous la courbe du sinus carré est égale à l'aire entre la courbe et l'horizontale passant par le sommet, 1.




L'aire est le produit de sa base par sa hauteur, soit

$$A = 1 \times \pi = \pi.$$

L'aire sous la courbe $y = \sin^2 x$ est donc égale à $\pi/2$.

**Zia**

Et voilà le travail ! (EVLT)[2].

**Léo**

Super !

2. *Voir la vidéo* 02-DéfisAires *à l'adresse* *https://www.youtube.com/@Accromath/featured*