

Accrom α th

Volume 19 • hiver-printemps 2024

Habiter dans le bon univers

Autres *articles*

- Aire des cercles dans un triangle équilatéral
- Les casiers de l'école
- Habiter dans le bon univers
- La position d'un navire
- Surveiller une galerie d'art
- 666 : Est-ce que la bête est à nos trousses ?
- Jean Deshayes et la cartographie du fleuve Saint-Laurent
- La formule des lacets de souliers
- Le jeu de la vie
- Les pinsons de Darwin

Rubrique des
Paradoxes

Un monde
mathématique
immobile

Éditorial α

Déjà notre deuxième numéro qui sera accessible sur les réseaux sociaux ! Invitez vos élèves et collègues à nous y suivre de manière régulière et à visionner les vidéos qui accompagnent certains articles (<https://www.youtube.com/@Accromath>). Comme mise en bouche, ce numéro commence par quatre Accro-flashes. Dans le premier article, on voit comment déterminer **L'aire des cercles inscrits dans un triangle équilatéral**.

Dans **Les casiers de l'école**, Bernard R. Hodgson nous propose une énigme : déterminer quelles portes de casiers seront ouvertes après une pléthore d'ouvertures et de fermetures selon un algorithme donné.

Dans **Habiter dans le bon univers**, Christiane Rousseau pose la question : existe-t-il un univers dans lequel on peut brancher trois chalets à la prise d'eau, à la prise d'électricité et à l'égout municipal sans que ces branchements ne se croisent ?

L'article **La position d'un navire** permet de savoir comment vérifier si un GPS n'est pas défectueux.

Dans **Surveiller une galerie d'art**, Christiane Rousseau nous apprend comment déterminer le nombre minimal de caméras et où les disposer de façon à surveiller toute la galerie. Et au lieu de surveiller l'intérieur d'une galerie, on peut aussi surveiller l'extérieur d'une forteresse.

En numérologie, on a tendance à souligner ce qui semble particulier et mystérieux. Dans **666 : Est-ce que la bête est à nos trousses?** Anik Trahan montre que le nombre 666 n'est pas très mystérieux, plusieurs autres nombres ayant plus de caractéristiques particulières que lui.

L'article **Jean Deshayes et la cartographie du fleuve Saint-Laurent** nous présente l'une des premières applications des mathématiques en Nouvelle-France.

Dans **La formule des lacets de souliers**, Marc-André Désautels indique comment trouver l'aire d'un polygone dont les coordonnées de certains sommets ne sont pas des nombres entiers.

Dans l'article **Le jeu de la vie**, France Caron nous présente ce jeu, inventé par John Conway, qu'on peut adapter pour modéliser divers phénomènes et qui continue d'inspirer des recherches dans des domaines très variés.

Dans **Les pinsons de Darwin**, Christian Genest et Louis-Paul Rivest portent un regard statistique sur les observations ornithologiques qui ont inspiré le père de la théorie de l'évolution.

Dans le paradoxe **Un monde mathématique immobile**, Jean-Paul Delahaye montre que toutes les fonctions de la forme $x \rightarrow x^n$ (n un entier fixé) sont des fonctions constantes. Qu'est-ce qui cloche ?

Bonne lecture !

André Ross

ISSN 1911-0189

Rédacteur en chef

André Ross

Professeur de mathématiques

Comité éditorial

France Caron

*Professeure de didactique
des mathématiques
Université de Montréal*

Christian Genest

*Professeur de statistique
Université McGill*

Bernard R. Hodgson

*Professeur de mathématiques
Université Laval*

Thomasz Kaczynski

*Professeur de mathématiques
Université de Sherbrooke*

Nadia Lafrenière

*Professeure de mathématiques
Université Concordia*

Bruno Martin

*Professeur de mathématiques
Responsable recherche et développement
CIMMI*

Christiane Rousseau

*Professeure de mathématiques
Université de Montréal*

Christian Sévigny

*Professeur de physique
École secondaire Pointe-Lévy*

Anik Trahan

*Professeur de mathématiques
Cégep de Sherbrooke*

Robert Wilson

*Professeur de mathématiques
Cégep de Lévis*

Production et Iconographie

Alexandra Haedrich

Institut des sciences mathématiques

Conception graphique

Pierre Lavallée

Néograf Design inc.

Illustrations de scientifiques et caricatures

Noémie Ross

Illustrations mathématiques

André Ross

Révision linguistique

Robert Wilson

*Professeur de mathématiques
Cégep de Lévis-Lauzon*

Médias sociaux

Sandrine St-Cyr

Université de Montréal

Accromath

*Institut des sciences mathématiques
Université du Québec à Montréal
Case postale 8888, succ. Centre-ville
Montréal (Québec)
H3C 3P8 Canada*

redaction@accromath.ca
www.accromath.ca

Accromath

Volume 19 • hiver – printemps 2024

Sommaire

Dossier *Accro-flashes*

Aire des cercles dans un triangle équilatéral

André Ross

Les casiers de l'école

Bernard R. Hodgson

Habiter dans le bon univers

Christiane Rousseau

La position d'un navire

André Ross

Dossier *Géométrie*

Surveiller une galerie d'art

Christiane Rousseau

Dossier *Nombres*

666 : Est-ce que la bête est à nos trousses ?

Anik Trahan

Dossier *Histoire des mathématiques*

Jean Deshayes et la cartographie du fleuve Saint-Laurent

André Ross

Dossier *Application des mathématiques*

La formule des lacets de souliers

Marc-André Désautels

Le jeu de la vie

France Caron

Dossier *Probabilités et statistique*

Les pinsons de Darwin

Christian Genest
Louis-Paul Rivest

Rubrique des **Paradoxes**

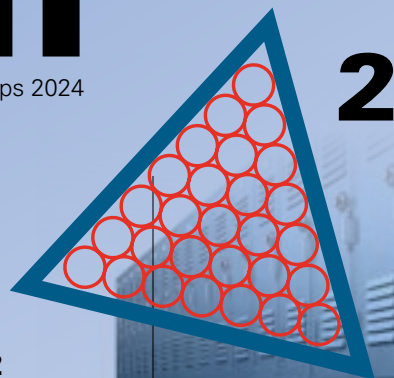
Un monde mathématique immobile

Jean-Paul Delahaye

Solution du paradoxe précédent

Jean-Paul Delahaye

Section problèmes



2

2

4

6

8

4

10



16

16

Vol. 19 • hiver – printemps 2024

Accromath

1

20

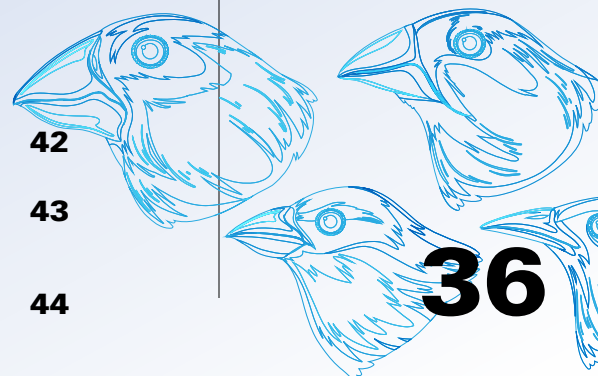
26

32



26

36

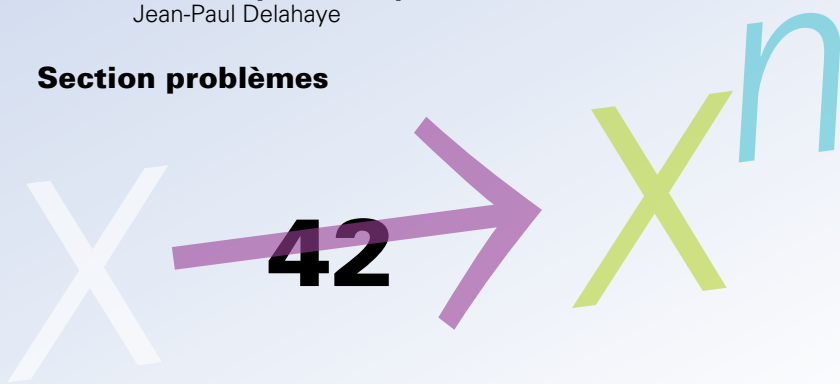


42

43

44

36

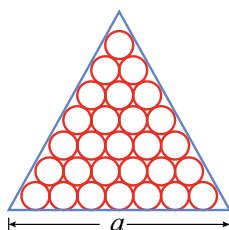


42

Aire des cercles dans un triangle équilatéral

La professeure de mathématiques de Léo a posé un problème qu'il peine à résoudre. Il demande conseil à Zia.

André Ross
Professeur retraité



Léo

J'ai un problème à résoudre et je ne vois pas comment procéder.

Zia

C'est quoi ton problème ?

Léo

On inscrit des cercles de même rayon dans un triangle équilatéral. S'il y a n cercles sur un côté de longueur a du triangle, déterminer l'aire totale des cercles inscrits.

Zia

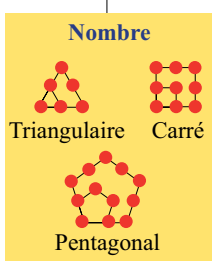
En fait, elle te pose deux problèmes : combien de cercles y-a-t-il dans le triangle, s'il y en a n sur un côté de longueur a , et quelle est l'aire de ces cercles ?

Léo

Si tu veux.

Zia

Le nombre de cercles dans le triangle est le nombre triangulaire de rang n .



Léo

C'est quoi le « nombre triangulaire de rang n » ?

Zia

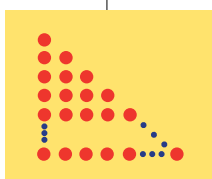
L'appellation « nombre triangulaire » remonte à l'école de Pythagore, où on représentait les nombres par des points pour obtenir des formes géométriques.

Léo

Je vois. Et comment fais-tu pour trouver le nombre triangulaire de rang n ?

Zia

Pythagore avait remarqué que les points des nombres triangulaires pouvaient se disposer pour former des triangles rectangles.

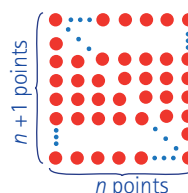


Léo

Et comment procédait-il pour la somme ?

Zia

L'astuce consiste à supposer que le nombre de points sur les côtés est n , puis à dupliquer la figure en lui faisant effectuer une rotation de 180° et en la positionnant de façon à obtenir un rectangle.



Le nombre de points sur un des côtés est n et sur l'autre côté, il est maintenant de $n + 1$ points. Dans le rectangle, il y a donc au total $n(n + 1)$ points. En divisant par 2, il obtient le nombre triangulaire de rang n , soit

$$T_n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Léo

C'est un beau raisonnement.

Zia

De nos jours, le problème se pose de la façon suivante.

Calculer la somme des n premiers nombres

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n - 2) + (n - 1) + n.$$

On écrit la somme dans l'ordre inverse pour obtenir

$$n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 4 + 3 + 2 + 1$$

et, on additionne en colonne ce qui donne

$$\begin{aligned} &1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n - 2) + (n - 1) + n \\ &+ n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 4 + 3 + 2 + 1 \end{aligned}$$

Dans chaque colonne, on obtient la même somme de $n + 1$. Puisqu'il y a n termes, cela

fait un total de $n(n+1)$ et en divisant par 2, on a le nombre triangulaire de rang n .¹

Léo

Oui, je me souviens qu'on ait vu cette démonstration en classe. Pythagore avait une démarche plus visuelle.

Zia

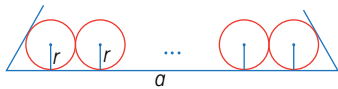
Ton premier problème est résolu. Il reste à calculer l'aire de ces cercles.

Léo

En fait, je savais comment trouver le nombre de cercles dans le triangle, mais je ne savais pas que c'était un « nombre triangulaire ». Mon problème est de trouver l'aire des cercles.

Zia

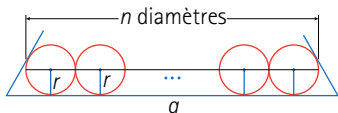
Je vois. Probablement qu'il faut exprimer le rayon en fonction du côté a du triangle. Essayons de décomposer la longueur a d'un côté en diverses longueurs pour essayer d'y voir un peu plus clair.



Qu'est-ce qu'on a en plus?

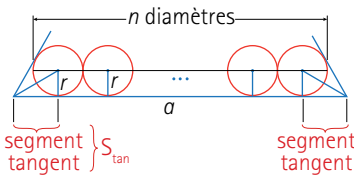
Léo

En traçant les diamètres horizontaux, on obtient un segment de droite dont la longueur est n fois le diamètre.



Zia

On peut tracer le segment de droite reliant les sommets de la base du triangle au centre du cercle le plus près.



1. Ce raisonnement aurait été tenu par Carl Friedrich Gauss alors qu'il était à l'élémentaire. Pour s'aménager du temps de correction, son professeur avait demandé à la classe de sommer tous les nombres de 1 à 100. Gauss a aussitôt remis sa solution. Pour la source de cette anecdote, voir « Glanures mathématico-littéraires (V) » Bernard R. Hodgson dans Accromath vol. 18, été-automne 2023 p.34.

Léo

Super! En soustrayant deux fois le rayon, et en additionnant deux fois le segment tangent aux extrémités, on obtient une égalité :

$$a = nd - 2r + 2S_{\tan}$$

Puisque $d = 2r$, cela donne

$$a = 2nr - 2r + 2S_{\tan}$$

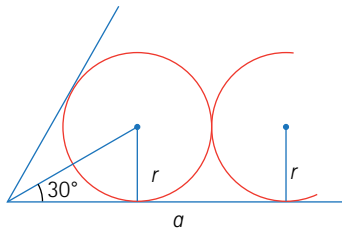
Zia

Oui, et en calculant la longueur des segments tangents, on obtient la relation entre a et r .

Léo

Le segment tangent est le côté adjacent à un angle de 30° et le côté opposé à cet angle est r . L'hypoténuse est donc $2r$ (voir encadré) et

$$(S_{\tan})^2 = (2r)^2 - r^2 = 4r^2 - r^2 = 3r^2.$$



La longueur d'un segment tangent est

$$S_{\tan} = r\sqrt{3},$$

d'où
$$a = 2nr - 2r + 2r\sqrt{3} = 2r(n - 1 + r\sqrt{3}).$$

On peut donc isoler r et on obtient

$$r = \frac{a}{2(n - 1 + r\sqrt{3})}.$$

La surface d'un cercle est donc

$$\pi r^2 = \frac{\pi a^2}{4(n - 1 + r\sqrt{3})^2}.$$

Zia

Voilà, il reste simplement à multiplier le nombre de cercles par la surface d'un cercle et l'aire occupée par les cercles est

$$A = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{\pi a^2}{4(n - 1 + r\sqrt{3})^2}.$$

Léo

Bonne collaboration ! Merci !

Triangle rectangle ayant un angle de 30°
 Les géomètres grecs savaient déjà que dans un triangle rectangle qui a un angle de 30° , la mesure du côté opposé à l'angle de 30° est la moitié de celle de l'hypoténuse.

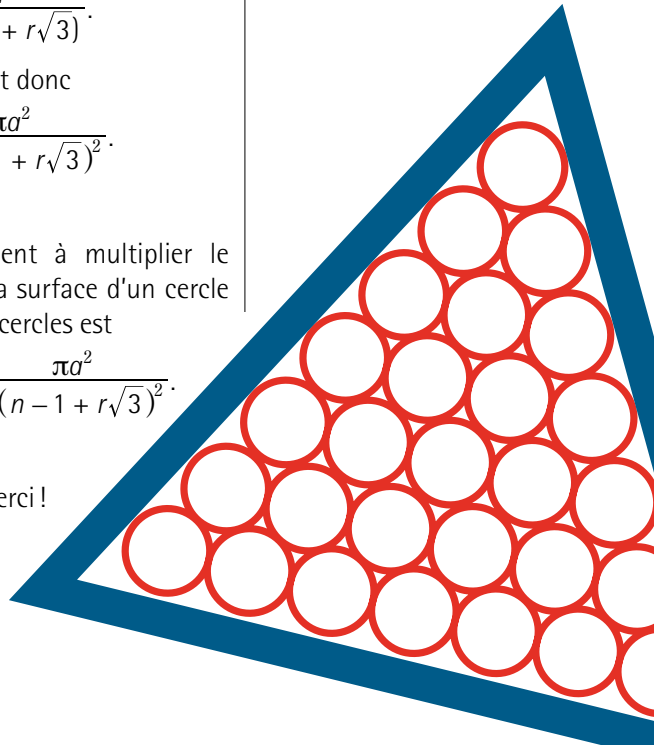
En s'appuyant sur des résultats de base en trigonométrie, on a que

$$\sin \theta = \frac{1}{2}.$$

et que l'hypoténuse est égale à

$$r/\sin 30^\circ = 2r.$$

Dans sa cosmologie, Platon considère deux triangles « élémentaires » : le triangle dont « l'hypoténuse a une longueur double du plus petit côté » et le triangle isocèle rectangle, soit :



Les casiers de l'école

La prof de maths de Roméo a donné à résoudre un problème qu'il trouve trop long et difficile. Il s'en plaint auprès de sa copine Juliette.

Bernard Hodgson
Université Laval

Juliette

Tu as l'air bougonneux, Roméo. Qu'est-ce qui se passe?

Roméo

Parle-m'en pas! C'est ma prof de maths qui nous a encore donné pour la fin de semaine un problème qui n'a pas d'allure. Regarde. (Il lui tend un papier où est inscrit le texte en encadré.)

Les casiers de l'école de la Longue-Pointe

Les casiers des 1000 élèves sont tous situés à la queue leu leu le long d'un interminable corridor. Lorsqu'elle veut tester la bonne forme des élèves, l'enseignante d'éducation physique organise l'activité suivante :

- un premier élève part à la course en ouvrant toutes les portes des casiers;
 - une deuxième élève court de deux en deux, en commençant avec le casier C_2 , et ferme toutes les portes qu'elle touche;
 - un troisième élève – appelons-le E_3 – va de trois en trois en commençant à C_3 , ouvrant les portes qui sont fermées et fermant celles qui sont ouvertes;
 - et ainsi de suite jusqu'à l'élève E_{1000} , dont la tâche consiste à courir tout au bout du corridor et à changer l'état de la porte du casier C_{1000} .
- À la fin de cet athlétique processus, quelles portes sont ouvertes et lesquelles sont fermées?

Juliette

Oh! que ça a l'air chouette comme problème! As-tu essayé quelque chose?

Roméo

Pas vraiment. Je trouve l'énoncé trop mêlant. Et puis 1000! Ça n'a pas de bon sens!

Juliette

Mon prof de maths nous rappelle toujours : si un problème a l'air compliqué, essayez de le simplifier mais sans le dénaturer, en conservant sa « substantifique moelle », comme il dit – il aime ça nous citer du Rabelais.

1000 élèves, 1000 casiers, c'est beaucoup. Essayons pour des nombres plus petits.

Roméo

Petits nombres? OK. J'essaie. S'il y a un élève et un casier, facile : l'élève ouvre la porte du

casier et c'est fini.

Deux élèves? Hum, l'élève E_1 ouvre les portes des casiers C_1 et C_2 , puis l'élève E_2 ferme la porte C_2 . Donc la porte C_1 est ouverte et C_2 , fermée.

Juliette

C'est bien parti! Et avec trois élèves, E_1 ouvre les trois portes C_1 , C_2 et C_3 , puis E_2 ferme C_2 et finalement E_3 ferme C_3 . Donc ouvert, fermé, fermé.

Roméo

Attends un peu. J'ai compris! 2 et 3 sont des nombres premiers. La semaine dernière en classe, la prof nous a reparlé des nombres premiers. Une vraie marotte chez elle : elle revient souvent sur l'idée que c'est tellement important comme type de nombres... C'est donc ça l'affaire : elle veut qu'on pense aux nombres premiers. Et si je regarde le casier C_{11} , sa porte va être fermée, car E_1 l'ouvre, E_{11} la ferme, et personne d'autre n'y touche. Donc, porte fermée pour tous les nombres premiers!

Juliette

Bravo! C'est bien parti. Mais il faudrait aussi voir quoi dire quand on a un nombre composé.

Bon, je dois y aller : j'ai un travail de français à remettre lundi sans faute. On s'en reparle plus tard. Mais essaye de faire un tableau montrant en détail ce qui se passe pour, mettons, une douzaine de casiers. Bye!

(Quelques jours plus tard.)

Roméo

Juliette! Juliette! Regarde : j'ai fait un tableau, comme tu me l'as suggéré. Je le trouve joli, mais je n'arrive pas à le « faire parler ».

J'ai travaillé avec 12 casiers / 12 élèves. À la ligne 1 de mon tableau, pour indiquer que l'élève E_1 ouvre toutes les portes, j'ai mis des O partout. À la ligne 2, j'ai mis des F pour représenter E_2 qui ferme les portes de deux en deux. Puis E_3 ferme ou ouvre successivement les portes C_3 , C_6 , C_9 et C_{12} . Jusqu'à E_{12} , qui ne fait que fermer la porte du casier C_{12} .

État de la porte du casier C_k après le passage de l'élève E_k

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}
E_1	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
E_2		F		F		F		F		F		F
E_3			F			O			F			O
E_4				O				O				F
E_5					F					O		
E_6						F						O
E_7							F					
E_8								F				
E_9									O			
E_{10}										F		
E_{11}											F	
E_{12}												F

Je vois ainsi, sur la diagonale du tableau, que les portes correspondant à un nombre premier sont bel et bien fermées, comme je le pensais. Mais il y en a d'autres fermées, comme C_8 et C_{10} .

Juliette

Mais c'est super ton tableau! Il montre que ce ne sont pas les nombres premiers en soi qui sont en jeu ici, mais plutôt la notion de *diviseur*. La porte d'un casier change de position chaque fois qu'un élève lui touche. Et qui touche à la porte C_k ? Tous les élèves dont le numéro est un diviseur de k .

Regarde ta colonne C_{12} : on y voit que cette porte est touchée par six élèves: E_1, E_2, E_3, E_4, E_6 et E_{12} . Et ça donne O-F-O-F-O-F. La porte est donc fermée!

Diviseurs de 12
1
2
3
4
6
12

Roméo

Oui, je comprends. Mais en fait, je pense que ce qui importe, ce n'est pas tant le *nombre* de diviseurs, mais plutôt de savoir si le nombre de diviseurs est *pair* ou *impair*. La porte C_{12} est fermée, car 12 a un nombre pair de diviseurs. Mais la porte C_9 a été touchée par E_1, E_3 et E_9 , un nombre impair de fois, et donc elle reste ouverte.

Juliette

La *parité* du nombre de diviseurs de k ! C'est donc là que réside la réponse à la question: la porte du casier C_k est-elle ouverte ou fermée? Bravo, cher Roméo! Le mystère est enfin résolu...

Roméo

L'est-il vraiment? C'est bien beau de savoir que les portes ouvertes sont celles dont le numéro a un nombre impair de diviseurs. Mais cela ne me dit pas quelles sont ces portes au juste.

Juliette

Mais si! Ne te rappelles-tu pas? On a vu ça l'année dernière. Regarde un nombre comme 12 et écris-le comme produit de deux facteurs. Ses diviseurs viennent alors deux par deux, l'un plus petit et l'autre plus grand que sa racine carrée ($\sqrt{12} \approx 3,46$). Le nombre 12 a donc un nombre pair de diviseurs.

Diviseurs de 36
1
2
3
4
6
9
12
18
36

12 = 1 x 12
 = 2 x 6
 = 3 x 4

36 = 1 x 36
 = 2 x 18
 = 3 x 12
 = 4 x 9
 = 6 x 6

Mais c'est différent pour un carré parfait comme 36, car parmi ses factorisations en produit de deux nombres, il y a celle impliquant sa racine carrée, qui n'introduit de ce fait qu'un seul diviseur. Comme tout carré parfait, 36 a un nombre impair de diviseurs.

Roméo

C'est donc ça le truc : *les portes ouvertes sont celles dont le numéro est un carré parfait!* En effet, c'est joli!

Mais je me demande ce qui se passerait si la rangée de casiers était en cercle — on pourrait dire qu'on s'en va à l'école du Rond-Point!

Voyons... Les élèves tourneraient tout autour du corridor circulaire. Mais il faut qu'ils arrêtent à un moment donné... OK, j'ai pigé : il faut stopper un élève au moment où il en viendrait à toucher une même porte une deuxième fois, ce qui va immanquablement arriver. Si on ne l'arrête pas, il poursuivrait ses rondes en défaisant sempiternellement ce qu'il vient tout juste de faire.

Mais, quelles seraient-elles alors, les portes ouvertes?

Juliette

Joli changement de décor!¹

1. Voir la Section problèmes.

Habiter dans le bon univers

Trois couples se construisent chacun un chalet sur un terrain en copropriété. Ils doivent chacun brancher leur chalet à la prise d'eau, à la prise d'électricité et à l'égout municipal. Ils s'aperçoivent qu'ils ne peuvent le faire sans que les branchements se croisent. Effectivement, ce n'est pas possible dans l'univers où nous vivons. Mais c'est possible dans d'autres univers.

Christiane Rousseau
Université de Montréal

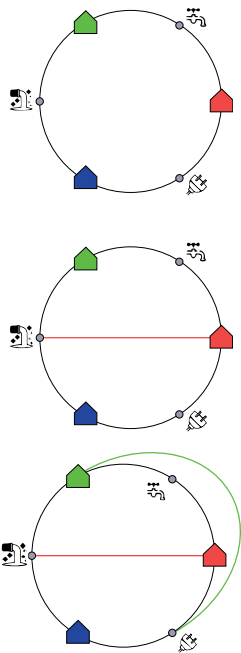
Trois couples se construisent chacun un chalet et ils choisissent des couleurs différentes pour le peindre : rouge, bleu et vert. Le roc est à une profondeur de quelques centimètres et il n'y a pas la place que les branchements d'eau, d'électricité et d'égout se croisent sans qu'au moins l'un d'eux ne dépasse du sol.

Dans un premier temps, le chalet rouge est branché à l'eau et l'électricité, le chalet vert, à l'eau et à l'égout, et le chalet bleu, à l'électricité et à l'égout. Si l'on suit ces branchements, ils forment une courbe fermée comme sur la figure.

Cette courbe fermée a un intérieur et un extérieur. Branchons maintenant le chalet rouge à l'égout. On a deux choix, soit le branchement se fait à l'intérieur de la courbe fermée, soit il se fait à l'extérieur. Prenons le premier cas.

Maintenant, pour brancher le chalet vert à l'électricité, on n'a pas de choix : il faut le faire par l'extérieur.

Mais, maintenant il n'est plus possible de brancher le chalet bleu à l'eau, ni par l'intérieur, ni par l'extérieur, sans croiser un branchement existant. Le deuxième cas aurait abouti à la même conclusion. Si vous n'êtes pas convaincu, essayez-le!

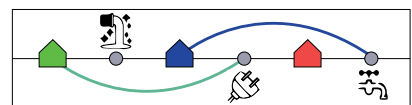


Migrer sur un ruban de Möbius

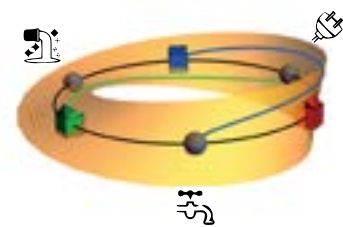
Nos trois couples décident alors de déménager sur un ruban de Möbius. Un tel ruban se construit en prenant une bande de papier et en traçant la ligne milieu de la bande. En recollant les deux extrémités avec un demi-tour, cette droite donne une courbe fermée.



Comme précédemment, on peut placer six branchements sur la ligne milieu, et on peut rajouter deux autres branchements.



Voici ce que cela donne sur la bande de Möbius.



Et maintenant, il nous manque un branchement entre le chalet rouge et l'égout.

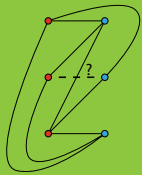
Modélisation par un graphe

On construit un graphe à six sommets divisés en deux sous-groupes :

- les trois chalets d'une part,
- les prises d'eau, d'électricité et l'égout d'autre part.

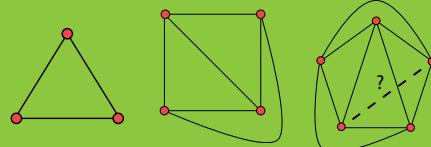
Les arêtes du graphe sont les branchements. On n'a aucune arête entre deux sommets d'un même groupe.

Ce graphe a la particularité qu'il n'a aucune arête entre deux sommets d'un même sous-groupe: un tel graphe est dit biparti. On a une arête entre chaque sommet du premier groupe et chaque sommet du deuxième groupe : ce graphe est appelé $K_{3,3}$ parce que chaque sous-groupe contient trois sommets. Il est connu que le graphe $K_{3,3}$ ne peut être dessiné dans un plan sans que des arêtes se croisent. On dit que $K_{3,3}$ n'est pas planaire.



Le graphe $K_{3,3}$

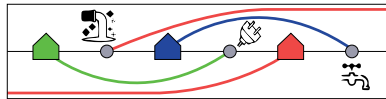
Un graphe est *complet* si chaque sommet est relié à tous les autres sommets par une arête. Le graphe complet à k sommets est appelé K_k . Il est facile de vérifier que K_2 , K_3 et K_4 sont planaires. Par contre, K_5 n'est pas planaire.



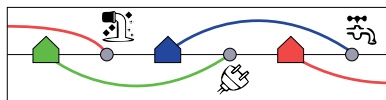
Le graphe K_3 Le graphe K_4 Le graphe K_5

La question de savoir si un graphe est planaire est importante pour l'impression de circuits électroniques sur une carte de circuit imprimé. Les connexions ne doivent pas se croiser si l'on veut éviter les court-circuits. Un des grands résultats de théorie des graphes dit que tout graphe non planaire contient une copie de $K_{3,3}$ ou de K_5 .

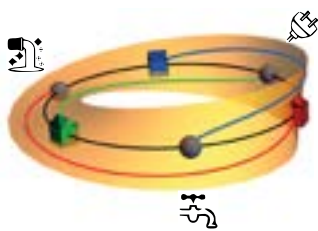
En voici un en trait rouge!



Et un deuxième!



Voici ce que cela donne en trois dimensions.

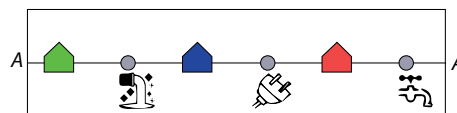


Remarquons que dans ce nouvel univers, la courbe n'a plus qu'un seul côté. C'est pour cela qu'on peut passer sans problème le dernier branchement.

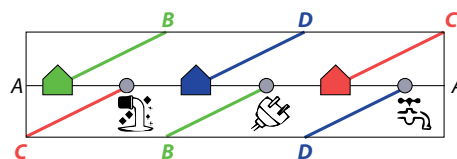
On peut aussi migrer sur un tore

En mathématiques, ce qu'on appelle un *tore* est la surface d'un beigne avec un trou. Abstraitement, on le représente par un carré ou un rectangle, dans lequel on colle les côtés horizontaux, ce qui donne un cylindre, et ensuite les côtés verticaux.

Pour la suite, on va plutôt utiliser un rectangle. La ligne horizontale des six branchements



représente un cercle sur le tore ci-contre. Et maintenant, il faut rajouter les trois autres branchements. Les voici.



Et voici, à droite, ce que cela donne sur le tore. Alors, sur quel univers choisirez-vous de vous établir?



La position d'un navire

Zia pense que son GPS est défectueux, ce que nie le vendeur. Souhaitant valider sa position d'une autre manière, elle a fait une recherche pour savoir comment les capitaines procédaient avant le GPS.



André Ross
Professeur retraité



Zia

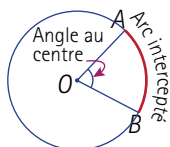
Je pense que mon GPS est défectueux et j'ai fait une recherche pour savoir comment déterminer ma position en longeant une côte sans cet instrument.

Léo

Et comment vas-tu faire ?

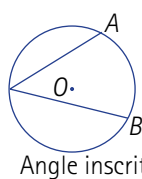
Zia

Tu sais comment on exprime la mesure d'un angle au centre d'un cercle ainsi que l'arc qu'il intercepte ?



Léo

Oui. En radians, c'est la longueur de l'arc mesurée en sens antihoraire divisée par le rayon du cercle. Pour avoir la mesure en degrés, on multiplie par $180/\pi$. L'angle au centre et l'arc qu'il intercepte sont des éléments différents, mais leur mesure est la même.



Zia

Tu sais aussi ce qu'est un angle inscrit ?

Léo

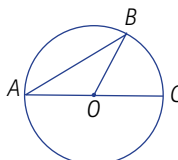
Bien oui, c'est un angle dont le sommet est sur la circonférence du cercle.

Zia

Sais-tu montrer que la mesure d'un angle inscrit est égale à la moitié de la mesure de l'angle au centre interceptant le même arc ?

Léo

Bien sûr. Supposons que le centre du cercle est sur un des côtés de l'angle. Je joins le centre O du cercle à l'extrémité B du côté AB . J'ai alors deux angles, BAC et BOC qui interceptent le même arc, l'un est un angle au centre et l'autre un angle inscrit. Je peux alors les comparer, voici comment.



Le triangle AOB est un triangle isocèle; les angles opposés aux côtés congruents sont eux aussi congruents.

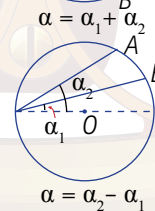
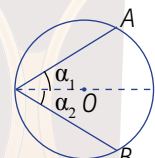
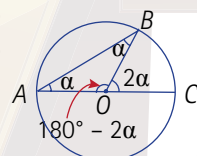
Par conséquent les angles BAO et ABO sont de même mesure, que je note par α . Comme la somme des angles d'un triangle est 180° , l'angle AOB est $180^\circ - 2\alpha$. De plus l'angle AOC est un angle plat, on a donc

$$\angle COB = 180^\circ - \angle AOB$$

$$= 180 - (180^\circ - 2\alpha) = 2\alpha.$$

Lorsqu'un des côtés passe par le centre du cercle, la mesure de l'angle inscrit est donc égale à la moitié de la mesure de l'arc intercepté, qui est celle de l'angle au centre.

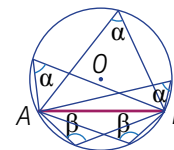
C'est vrai aussi lorsque le centre du cercle est compris à l'intérieur ou à l'extérieur de l'angle, il suffit de faire une somme ou une différence d'angles.



Zia

Alors tu es « capable » de comprendre c'est quoi un arc capable. Tu prends une corde AB dans un cercle: elle le divise en deux arcs et sur chacun de ces arcs, tous les points déterminent forcément avec A et B des angles ayant une valeur constante.

On dit de chaque arc qu'il est le lieu géométrique des points d'où « on peut voir » le segment AB sous un même angle. Les deux angles α et β sont supplémentaires et on appelle chacun des arcs de cercle un *arc capable*¹.



Léo

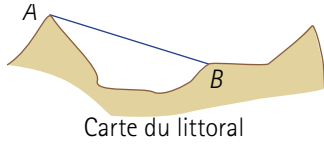
Et ça permet de connaître la position d'un navire en mer ?

Zia

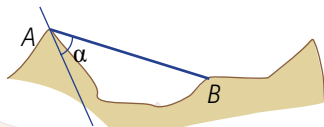
Attends! Je t'explique. Supposons que le capitaine d'un navire, désirent déterminer sa position, mesure l'angle entre sa position et deux

1. Du latin *capere*, « contenir ». L'arc capable déterminé par α contient en quelque sorte cet angle.

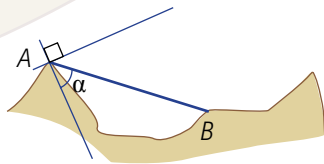
points: un phare, un clocher d'église ou n'importe quels autres points identifiés sur sa carte.



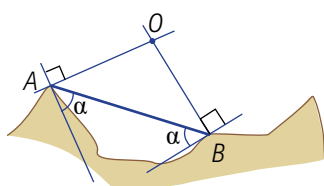
Supposons qu'il obtient une mesure d'angle α . Cet angle est le même partout sur l'arc capable relatif à l'angle α et aux points A et B. On peut alors montrer qu'aux points A et B, un des côtés de l'angle se superpose au segment AB et le second côté à la tangente au cercle². C'est pourquoi le capitaine trace, du côté de la terre, un segment de droite qui forme un angle de sommet A et de mesure α avec le segment AB.



Il trace ensuite la perpendiculaire à cette droite par le point A. Le centre du cercle est sur ce segment de droite, puisque le rayon est perpendiculaire à la tangente.

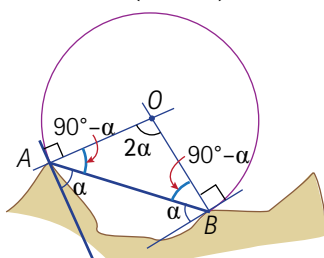


Il fait la même chose en formant un angle de mesure α dont le sommet est B.



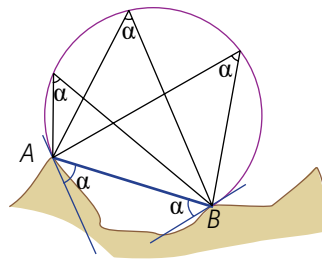
Les deux perpendiculaires se rencontrent en un point O, qui est le centre du cercle cherché. Elles forment alors un triangle dont deux angles sont de $90^\circ - \alpha$, de sorte que l'angle au centre est de

$$180^\circ - 2(90^\circ - \alpha) = 2\alpha.$$



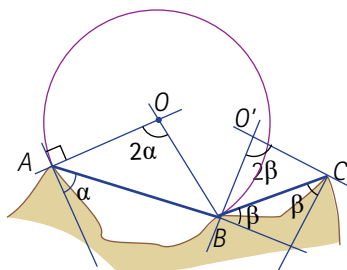
Léo

Le capitaine peut alors savoir qu'il est quelque part sur cet arc capable, mais il ne connaît pas sa position exacte.

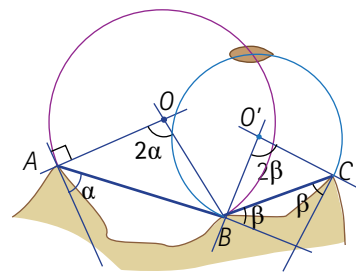


Zia

Tu as raison! C'est pourquoi il prend le relevé d'un troisième point C, trace le segment BC sur sa carte, et prend la mesure β de l'angle entre sa position et le segment BC. Il refait ensuite la même construction pour trouver le centre O' du cercle pour lequel l'angle BO'C mesure 2β . Puis il trace un second arc capable.



Tadam! Le navire se situe à l'intersection de ces deux arcs capables.



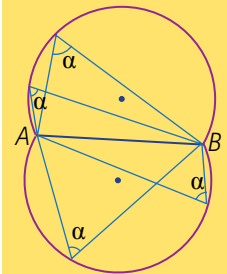
Léo

C'est super! Et tu vas essayer ça à ta prochaine sortie en voilier?

Zia

Oui, je vais mesurer deux angles et noter la position que me donne le GPS. Je pourrai alors vérifier si mon GPS est fiable. S'il donne des valeurs erronées, j'aurai des preuves pour justifier ma réclamation. Le vendeur ne pourra plus nier.

Arcs capables



Pour un segment AB et un angle α , on a toujours deux arcs capables puisqu'il y a deux arcs sur lesquels on voit AB sous un angle α .



Sextant, crédit : U.S. Geological Survey

Avant 1730, on se servait surtout de l'arbalestrille pour mesurer des angles. À partir de 1731, il sera remplacé par l'octant puis par le sextant, inventé, indépendamment par John Hadley (1682-1744), un mathématicien et astronome britannique, et Thomas Godfrey (1704-1749), un inventeur américain.

2. Voir la Section problèmes.

Combien faut-il de caméras pour surveiller chaque recoin d'une galerie d'art et où faut-il les placer? Ce problème simple à énoncer, appelé problème de la galerie d'art, est devenu un champ de recherche de la géométrie algorithmique. Des algorithmes très astucieux permettent de borner le nombre de caméras et de déterminer où les placer. On parlera aussi du problème « dual », le problème de la forteresse, qui consiste à placer des caméras en nombre minimal pour surveiller l'extérieur d'une forteresse.

Surveiller une galerie d'art

Christiane Rousseau
Université de Montréal

La galerie d'art

Dans le problème de la galerie d'art, la galerie est l'intérieur d'un polygone à n côtés et on doit placer un minimum de caméras à des sommets du polygone pour pouvoir surveiller toute la superficie de la galerie. En voici une à gauche pour laquelle deux caméras sont nécessaires.

Pour qu'une caméra surveille un point il faut que le segment joignant le point à la caméra soit entièrement contenu dans le polygone. La seconde figure présente la région surveillée par une première caméra. La troisième est la région surveillée par une deuxième caméra. Les deux caméras, quatrième figure, surveillent donc l'ensemble de la galerie. Cette galerie a 11 côtés et on a besoin d'au moins deux caméras pour la surveiller.

Mais, il existe des galeries à 11 côtés pour lesquelles on a besoin de plus de deux caméras. Aussi, dans le problème de la galerie d'art, on se limite à des caméras placées en des sommets du polygone. Le problème de la galerie d'art est le suivant.

Étant donnée une galerie d'art de forme polygonale à n côtés, trouver un nombre $K(n)$ minimal tel que toute galerie à n côtés peut être surveillée par au maximum $K(n)$ caméras placées en des sommets du polygone.

Regardons des exemples.

Un galerie d'art en forme de triangle peut être surveillée par une seule caméra placée en n'importe quel sommet. Donc $K(3) = 1$.

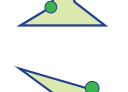
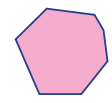
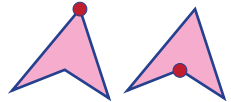
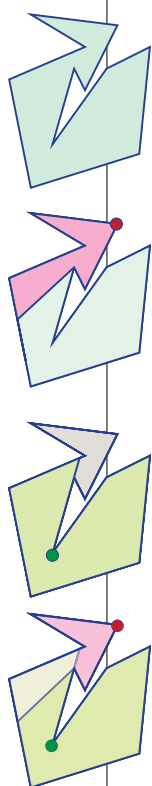
Une galerie d'art en forme de quadrilatère peut être surveillée par une seule caméra. La caméra peut être placée en n'importe quel sommet si le quadrilatère est convexe. Deux positions sont possibles pour la caméra si le quadrilatère est non convexe. Donc $K(4) = 1$.

Toute galerie d'art en forme de polygone convexe peut être surveillée par une seule caméra placée en n'importe quel sommet.

En regardant toutes les configurations non convexes possibles, on peut se convaincre que toute galerie d'art en forme de pentagone peut être surveillée par une seule caméra. Donc $K(5) = 1$.

Par contre, il existe des galeries d'art en forme d'hexagones pour lesquels il faut au moins deux caméras. Donc $K(6) \geq 2$. En fait, on montrera que $K(6) = 2$.

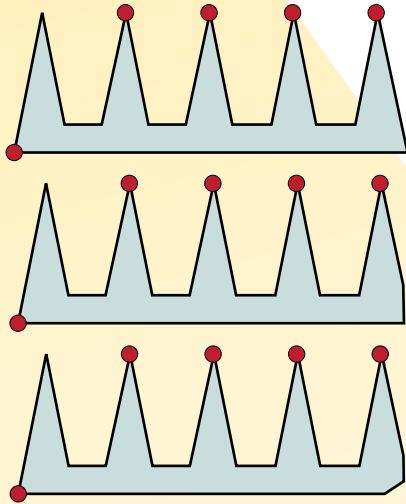
Le problème de la galerie d'art a été posé par Victor Klee en 1973, en réponse à une question de Vasek Chvátal lui demandant un problème intéressant. Vasek Chvátal a donné



la solution dès 1975 : il a montré que $K(n) = \lfloor n/3 \rfloor$, où $\lfloor n/3 \rfloor$ est la partie entière de $n/3$, soit le plus grand entier inférieur ou égal à $n/3$.

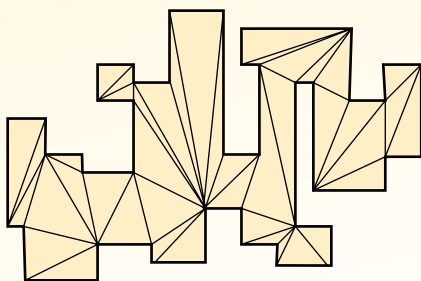
Mais la question a passionné la communauté de géométrie algorithmique jusqu'à devenir un domaine de recherche étudiant des questions connexes et raffinant les algorithmes pour trouver en pratique des solutions optimales lorsque n est très grand.

Il est facile de montrer que $K(n) \geq \lfloor n/3 \rfloor$. En effet, ce polygone à 15 côtés requiert cinq caméras et on pourrait tronquer le coin extrême droit pour lui donner 16 ou 17 côtés. On peut généraliser cet exemple à un polygone à $3n$, $3n + 1$ ou $3n + 2$ côtés.



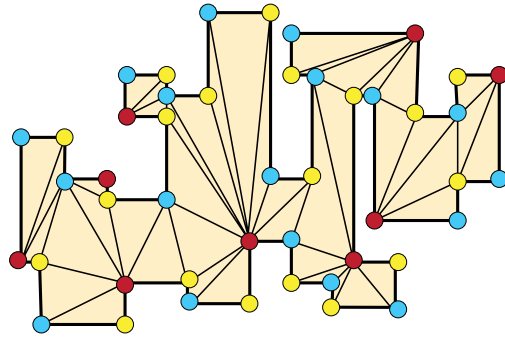
Il reste donc à montrer que $K(n) \leq \lfloor n/3 \rfloor$. En 1980, Steve Fisk a simplifié la preuve de Chvátal. Sa preuve est très intéressante et donne un algorithme simple pour placer les caméras. Elle comporte deux étapes :

Première étape : on divise le polygone en triangles, dont tous les sommets sont des sommets du polygone. Voici ce que cela donne pour une galerie à 46 côtés, donc 46 sommets.



Deuxième étape : On colorie les sommets du polygone avec trois couleurs de telle sorte que les sommets de chaque triangle soient de couleur différente.

Dans notre exemple, le rouge apparaît 9 fois, le bleu 18 fois et le jaune 19 fois.



Il suffit alors de placer des caméras aux sommets de la couleur apparaissant le moins souvent. Ici, c'est le rouge qui apparaît 9 fois. On place les caméras aux 9 sommets rouges. Dans le cas général, la couleur qui apparaît le moins souvent apparaît au plus $\lfloor n/3 \rfloor$ fois.

On peut montrer que les deux étapes sont toujours possibles (voir encadré).

Remarques

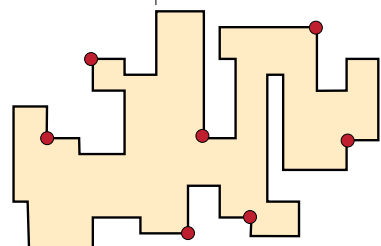
Une première remarque est que la triangulation n'est pas unique.

Une seconde remarque est que l'algorithme ne donne pas toujours la solution optimale. En effet, cette galerie particulière peut être surveillée avec sept caméras seulement.

En fait, cette galerie, comme la plupart des galeries d'art a une propriété particulière : tous ses angles intérieurs sont de 90° ou de 270° . Un polygone ayant ces propriétés est appelé *polygone orthogonal*. Pour ces polygones on a une meilleure borne.

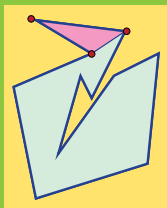
Toute galerie en forme de polygone orthogonal à n côtés peut être surveillée par au plus $\lfloor n/4 \rfloor$ caméras.

C'est le théorème de Kahn-Klawe-Kleitman (1980).

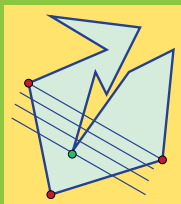


La triangulation d'un polygone

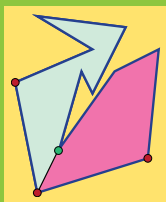
Tout polygone à n côtés peut être décomposé en triangles par l'ajout de diagonales entre des sommets du polygone. La preuve se fait par récurrence sur n , on commence par les polygones à 3 côtés, puis à 4 côtés, puis à 5 côtés, etc. Dans chaque cas, on divise le polygone en deux polygones ayant moins de côtés, donc on se ramène à un cas déjà connu. C'est vrai pour $n=3$. On suppose maintenant que c'est vrai pour tout polygone à moins de n côtés. Prenons un polygone à n côtés et choisissons trois sommets consécutifs. Si le segment joignant les deux sommets extrêmes est contenu à l'intérieur du polygone, alors en divisant ce polygone le long de cette diagonale, on s'est ramené à trianguler deux polygones à 3 et $n-1$ côtés.



Sinon, on prend des droites parallèles au segment joignant les deux sommets extrêmes et on rapproche ces droites du sommet médian jusqu'au dernier sommet qu'on attrape.



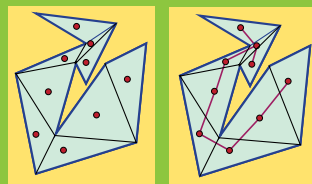
Alors la diagonale entre ce dernier sommet et le sommet médian coupe le polygone en deux polygones à moins de n côtés qu'on peut trianguler par l'hypothèse d'induction.



Colorier les sommets du polygone de trois couleurs

On commence par colorier les sommets d'un triangle avec les trois couleurs. Pour chaque triangle adjacent, on colorie le dernier sommet avec la couleur non utilisée. Il faut s'assurer qu'on ne rencontre pas d'impossibilité en faisant cela.

L'outil qui permet de s'en assurer est la théorie des graphes. On construit un graphe dont les sommets sont donnés par un point intérieur à chaque triangle.



Quant aux arêtes, on met une arête entre deux sommets du graphe si les deux triangles contenant les sommets partagent un côté.

Ce graphe a une propriété bien particulière : il n'a pas de cycles, c'est-à-dire de suite d'arêtes formant une boucle fermée.

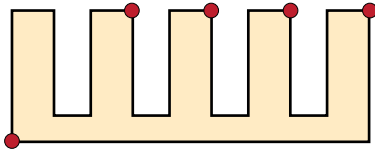


Un graphe avec un cycle

En effet, s'il avait un cycle, alors ce cycle contiendrait un sommet du polygone, entouré de triangles, contredisant le fait que tout sommet du polygone est sur sa frontière. Un graphe sans cycles est appelé un *arbre*.

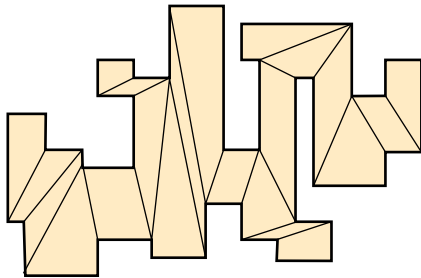
On colorie les sommets des triangles de proche en proche en se promenant le long de l'arbre : on choisit un sommet du graphe : il correspond à un triangle dont on colorie les sommets des trois couleurs. On passe à un autre sommet du graphe le long d'une arête. Deux des sommets du triangle correspondant sont déjà coloriés et il reste une seule couleur pour le dernier sommet. On passe à un autre sommet du graphe en suivant une autre arête. Ici encore, le triangle correspondant n'a qu'un sommet non colorié et on le colorie de la dernière couleur. Etc., jusqu'à ce qu'on ait épuisé les sommets du graphe. S'il y avait des cycles on pourrait avoir des impossibilités, selon que l'on arrive d'un côté ou de l'autre du cycle. Mais, sur un arbre, il n'y en a pas.

Ici encore, l'exemple ci-dessous montre qu'on ne peut avoir une meilleure borne.



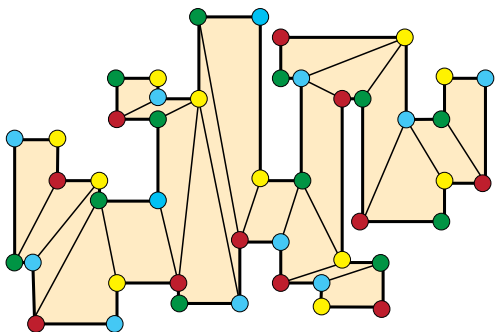
Les idées de l'algorithme sont les mêmes que celles de l'algorithme de Fisk.

Première étape : on divise le polygone en quadrilatères convexes.



Deuxième étape : on colorie les sommets du polygone avec quatre couleurs de telle sorte que les sommets de chaque quadrilatère soient de couleur différente.

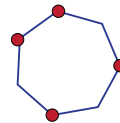
On place ensuite les caméras aux sommets de la couleur apparaissant le moins souvent. Ici ce sont, soit les sommets rouges, soit les sommets jaunes, au nombre de 11. Comme tous les quadrilatères sont convexes et que chacun contient une caméra en un sommet, on surveille bien toute la galerie.



La grande différence avec l'algorithme de Fisk est qu'il n'est pas facile de diviser un polygone orthogonal en quadrilatères convexes. Si on choisit de mauvaises divisions au départ, alors on aboutit à une impossibilité. La preuve que cette division est possible est longue et difficile.

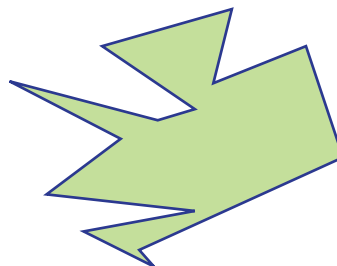
Le problème de la forteresse

Dans ce problème, on veut surveiller tout l'extérieur d'une forteresse de forme polygonale à n côtés en plaçant des caméras en des sommets du polygone. Soit $F(n)$ la borne minimale sur le nombre de caméras pour toute forteresse à n côtés. O'Rourke et Wood ont montré en 1983 que $F(n) = \lfloor (n+1)/2 \rfloor = \lceil n/2 \rceil$, où $\lceil n/2 \rceil$ est le plus petit entier supérieur ou égal à $n/2$.



En prenant un polygone régulier à n côtés, ou encore un polygone convexe, on voit que $F(n) \geq \lceil n/2 \rceil$.

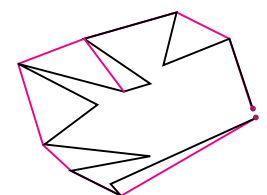
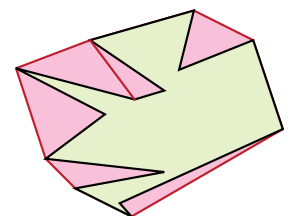
Pour montrer l'autre inégalité, soit $F(n) \leq \lceil n/2 \rceil$, on va utiliser des triangulations comme dans la preuve de Fisk, mais la preuve est plus complexe. Prenons une forteresse.



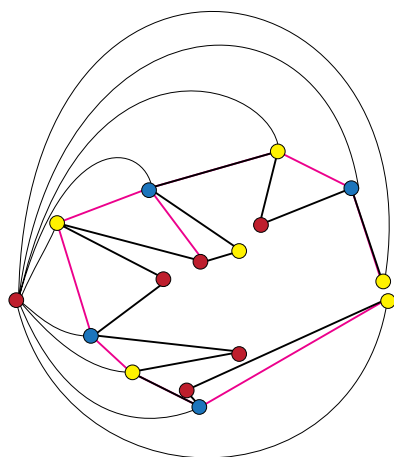
Comme elle n'est pas convexe, on va prendre le plus petit convexe la contenant, appelé son *enveloppe convexe*, dont on va trianguler la partie à l'extérieur du polygone.

Remarquons qu'on a deux types de sommets: des sommets qui sont à l'intérieur de l'enveloppe convexe, qu'on appelle *sommets intérieurs* et des sommets qui sont sur la frontière de l'enveloppe convexe qu'on appelle *sommets extérieurs*.

On sépare un sommet extérieur en deux sommets distincts proches l'un de l'autre. De cette manière on a ouvert le polygone qui est devenue une ligne brisée entre $n+1$ points. Ces $n+1$ points sont les sommets d'un nouveau graphe, dont les arêtes sont les segments de droite du polygone ouvert et ceux ajoutés dans la triangulation.



On va rajouter un $(n+2)^{\text{ème}}$ sommet à l'extérieur du polygone, que l'on appelle *sommet auxiliaire* et que l'on ajoute aux autres sommets du graphe. On joint le sommet auxiliaire à tous les sommets extérieurs par des courbes qui ne s'intersectent pas. Ces courbes sont de nouvelles arêtes du graphe. En pratique, on aura deux arêtes joignant le sommet auxiliaire aux deux sommets dédoublés, une de chaque côté de l'enveloppe convexe.

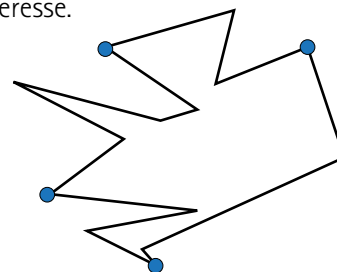


Regardons ce graphe. Il découpe sur le plan des régions fermées et bornées limitées chacune par trois arêtes, que l'on appellera des «faces». Ces «faces» sont des triangles si les arêtes sont des segments de droite et des *triangles généralisés* si certaines arêtes sont des courbes. On va colorier tous les sommets avec trois couleurs de telle sorte que les sommets de chaque face soient de couleur différente. C'est toujours possible: on peut faire le même argument que dans l'encadré sur le coloriage des sommets du polygone de trois couleurs (plus de détails dans l'encadré).

On prend les sommets de la couleur qui apparaît le moins souvent et on place des caméras en ces points.

Premier cas

Si cette couleur n'est pas celle du sommet auxiliaire, on a une solution avec $\lfloor (n+2)/3 \rfloor \leq \lceil n/2 \rceil$ caméras. Ces caméras permettent de surveiller l'extérieur de la forteresse (voir encadré). C'est le cas pour notre exemple et les quatre caméras aux sommets bleus permettent de surveiller l'extérieur de la forteresse.



Deuxième cas

Si la couleur qui apparaît le moins souvent est celle du sommet auxiliaire, on met les caméras aux sommets de la deuxième couleur qui apparaît le moins souvent. Cette couleur apparaît au plus $\lfloor (n+1)/2 \rfloor = \lceil n/2 \rceil$ fois (voir la page problèmes pour l'égalité). Il est à remarquer qu'on est toujours dans ce deuxième cas quand la forteresse est un polygone convexe. Quant au sommet dédoublé, on place une caméra en ce sommet dès qu'au moins un des deux sommets est de la couleur choisie.

Conclusion

Les preuves des théorèmes sur la galerie d'art et la forteresse utilisent la triangulation des polygones et des arguments de théorie des graphes. Ces deux outils sont très polyvalents et ont de multiples applications. C'est une des raisons de la puissance des mathématiques dans la résolution de problèmes. Un même outil construit pour un problème donné peut avoir des applications très loin du problème pour lequel il a été construit.

Pourquoi l'algorithme de la forteresse fonctionne.

Avant de lire cette partie, essayez d'exécuter l'algorithme sur des exemples tel que proposé dans la page problèmes. Il y a deux choses à vérifier : i) que pour chaque face, on peut colorier ses sommets de couleurs différentes, et ii) que les caméras surveillent tout l'extérieur de la forteresse.

i) Pour chaque face, on peut colorier ses sommets de couleurs différentes.

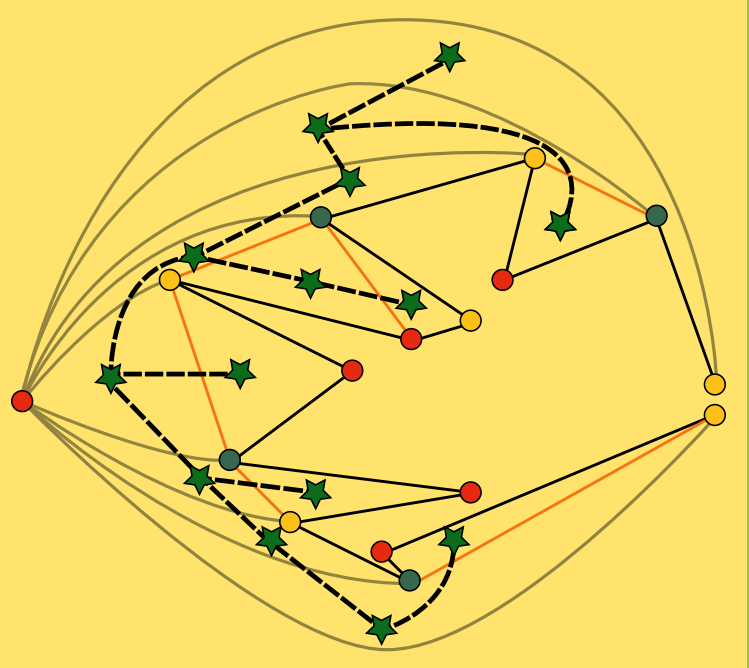
Construisons un graphe « dual » dont les sommets (les étoiles vertes sur la figure) sont donnés par un point dans chaque face, et mettons une arête (en trait pointillé épais) entre deux sommets quand deux faces partagent un côté. Ce graphe dual est un arbre : il n'a pas de cycle.

En effet, l'objet géométrique formé par la réunion des faces est un objet d'un seul morceau, sans trou. C'est pour cela qu'on a séparé un sommet en deux sommets, sinon on aurait un trou. Remarquons que les $n+2$ sommets sont tous sur la frontière de l'objet géométrique. S'il y avait un cycle dans le graphe dual, les faces correspondant aux sommets du cycle entoureraient un des sommets. Contradiction!

ii) Les caméras surveillent tout l'extérieur de la forteresse.

L'extérieur de la forteresse comprend deux parties : l'extérieur de l'enveloppe convexe et l'extérieur de la forteresse qui est situé à l'intérieur de l'enveloppe convexe. Il est facile de montrer que les caméras surveillent cette deuxième partie. En effet, celle-ci est divisée en triangles et on a une caméra dans chaque triangle.

Montrons maintenant que les caméras surveillent l'extérieur de l'enveloppe convexe.



Remarquons que la couleur choisie pour placer les caméras à des sommets est toujours une couleur différente de celle du sommet auxiliaire. Supposons que le sommet auxiliaire est coloré en rouge. Comme tous les côtés de l'enveloppe convexe sont des côtés d'une face à laquelle appartient le sommet auxiliaire, alors les deux autres sommets de chaque face doivent être bleu et jaune. Donc, les sommets de l'enveloppe convexe (qui sont les sommets extérieurs) alternent entre le bleu et le jaune. Par suite, les caméras sont placées à un sommet sur deux de l'enveloppe convexe (et on a deux caméras adjacentes dès qu'on a un nombre impair de sommets extérieurs). On a déjà vu qu'en plaçant une caméra tous les deux sommets on surveille l'extérieur d'un polygone convexe. Donc, les caméras surveillent l'extérieur de l'enveloppe convexe.

Le nombre est le concept mathématique le plus couramment utilisé pour faire des calculs. C'est un merveilleux outil pour représenter des quantités, mais certains osent associer des pouvoirs à des nombres en lien avec la chance, la beauté ou le malheur. D'autres croient que les nombres ont un pouvoir sur le monde, car tout peut être ramené à un nombre. On peut penser au film *Le nombre 23*, où le protagoniste est obsédé par ce nombre. Dans cet article, on tentera de déconstruire le mythe sur le nombre de la bête : 666.



Anik Trahan
Cégep de Sherbrooke

Dans l'Apocalypse de Jean, chapitre 13, versets 11 à 18, on présente la bête, monstre de la fin du monde, et son nombre.

Puis je vis monter de la terre une autre bête, qui avait deux cornes semblables à celles d'un agneau, et qui parlait comme un dragon. [...] Que celui qui a de l'intelligence calcule le nombre de la bête. Car c'est un nombre d'homme, et son nombre est six cent soixante-six.¹

Depuis, plusieurs personnes tentent de trouver des signes de la bête en retrouvant ce nombre à des endroits inusités : 666 est la somme des entiers de 1 à 36,

$$1 + 2 + 3 + \dots + 36 = 666$$

et la somme des carrés des sept premiers nombres premiers

$$2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 17^2 = 666.$$

On n'obtient quand même pas 666 en additionnant les premiers nombres premiers, les premiers nombres carrés, ni les premiers nombres cubiques... 666 n'a pas toutes les propriétés! Sur le site [oeis.org](http://www.oeis.org)² *L'Encyclopédie en ligne des suites de nombres entiers*, on

1. <http://www.bible-en-ligne.net/bible/66N-13,apocalypse.php>
2. Consulté en novembre 2023

peut entrer quelques termes d'une suite et le site retrouve toutes les suites recensées ayant ces termes. Si on entre un seul nombre, on retrouve toutes les suites qui le contiennent. Par exemple, pour 666, on obtient la suite :

$$1, 3, 6, 10, 15, \dots, 666, \dots$$

dont le $n^{\text{ième}}$ terme est la somme des n premiers naturels, et la suite :

$$4, 13, 38, 87, \dots, 666, \dots$$

dont le $n^{\text{ième}}$ terme est la somme des n premiers carrés de nombres premiers. Sur ce site, le nombre 666 se trouve dans 1 777 suites sur un total de 367 187 suites recensées, ce qui est quand même beaucoup. Comme point de comparaison, le nombre 661 se retrouve dans 2 283 suites. De 601 à 700, il y a 25 nombres qui se trouvent dans plus de suites que 666. Le nombre 666 n'est donc pas le plus spécial.

Nombres réels

Quittons les entiers pour nous diriger vers les nombres réels. On peut remarquer que la somme des 144 premières décimales de π donne 666, de même que la somme des 139 premières décimales de $\sqrt{6}$. Cela peut sembler surprenant, mais est-ce le cas?

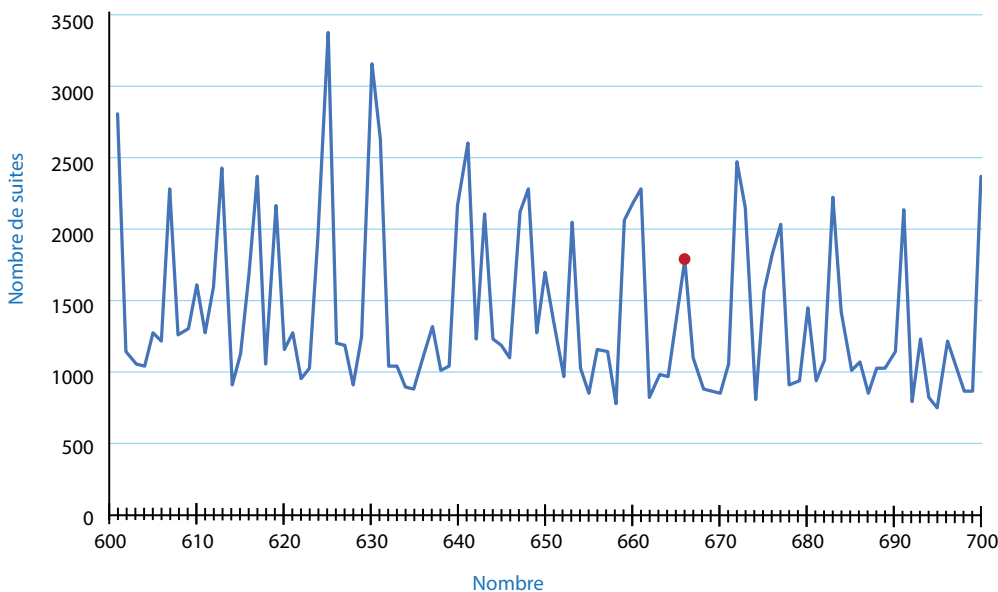
Soit un nombre où les décimales sont obtenues au hasard avec la même probabilité pour chaque décimale, alors on peut calculer la probabilité que la somme des premières décimales donne 666 (ou tout

autre nombre). Cette probabilité se rapproche beaucoup d'une chance sur cinq (voir l'encadré : *Rouler les décimales aux dés*). Si on s'intéresse à la somme des décimales des racines carrées, on constate que dans les 5000 premiers naturels non carrés, il y en a 974 avec lesquels on peut atteindre 666 en faisant la somme des premières décimales ($\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{24}, \sqrt{31}, \dots, \sqrt{5072}$). On est très près de la probabilité théorique de 1 sur 5. Comme point de comparaison, si on recherche plutôt la somme 661 dans les premières décimales des racines carrées, il y en a 1026 dans les 5000 premiers naturels

non carrés, donc davantage que pour 666, mais ça reste très près du 1 sur 5 théorique. De plus, cette propriété est vraie seulement si on représente les nombres en base 10. (Voir l'encadré : *Compter dans différentes bases pour des exemples dans d'autres bases*).

En conclusion, on ne devrait pas s'inquiéter de la bête, le fait qu'on retrouve le nombre 666 régulièrement est dû au hasard. Il y a une infinité de nombres et pour chacun, on peut découvrir une multitude de propriétés. Il est donc toujours possible de trouver des particularités étranges à n'importe quel nombre : une année de naissance, année en cours, une adresse... Méfiez-vous des théories du complot, il y a beaucoup de coïncidences en mathématiques !

os trousses ?



Répartition des nombres de 601 à 700 selon le nombre de suites qui contiennent ce nombre

Les décimales de π

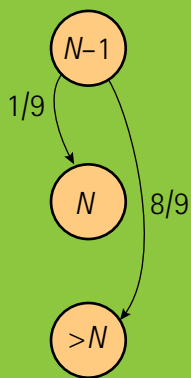
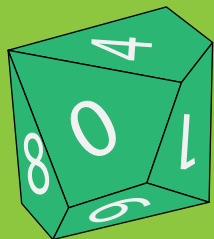
$\pi = 3,141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643\ 383\ 279\ 502\ 884\ 197\ 169\ 399\ 375\ 105\ 820$
 974 944 592 307 816 406 286 208 998 628 034 825 342 117 067 982 148 086
 513 282 306 647 093 844 609 550 582 231 725 359...

Le développement de $\sqrt{6}$

$\sqrt{6} = 2,449\ 489\ 742\ 783\ 178\ 098\ 197\ 284\ 074\ 705\ 891\ 391\ 965\ 947\ 480\ 656\ 670$
 128 432 269 256 725 096 037 745 731 502 653 389 594 331 046 402 348
 185 946 012 266 141 891 248 588 654 598 377 573 416...

Rouler les décimales aux dés

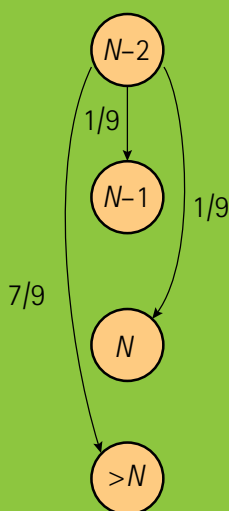
Quelle est la probabilité que la somme des premières décimales d'un nombre dont les décimales sont aléatoires arrivent à un total N choisi à l'avance? On peut voir le problème d'une autre manière: on prend un dé à 10 faces (numérotées de 0 à 9) et on le lance tant que la somme des valeurs obtenues est strictement inférieure à N . Ici chaque lancer représente une décimale du nombre aléatoire. Quelle est la probabilité que cette somme arrive exactement à N ?



Soit p_i la probabilité d'obtenir éventuellement la somme N si présentement la somme est $N-i$. Calculons p_1 , la probabilité d'obtenir éventuellement la somme N si présentement la somme est $N-1$. Bien que le dé ait dix faces, il n'y a que neuf valeurs qui font augmenter le total. On relance donc le dé chaque fois que le lancer donne 0, ce qui élimine cette dixième possibilité. Les neuf autres possibilités sont équiprobables: elles ont toutes une chance sur neuf de se produire. On a par conséquent une chance sur neuf ($1/9$) d'avoir 1 (et d'ainsi obtenir la somme N) et huit chances sur neuf ($8/9$) d'obtenir un chiffre plus grand que 1 (et d'ainsi ne jamais obtenir la somme désirée). On a donc :

$$p_1 = \frac{1}{9} \approx 0,1111$$

Calculons maintenant p_2 , la probabilité d'obtenir éventuellement N si le total est présentement $N-2$. On a une chance sur neuf, lors du prochain lancer différent de 0, d'avoir un 2 qui nous permettra d'obtenir directement la somme N . On a aussi une chance sur neuf d'avoir un 1 et d'ainsi se retrouver à $N-1$,



correspondant à la situation précédente qui mène à $p_1=1/9$. On a donc :

$$p_2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{10}{81} \approx 0,1235$$

Continuons sur notre lancée :

$$p_3 = \frac{100}{728} = \frac{10^2}{9^3} \approx 0,1372,$$

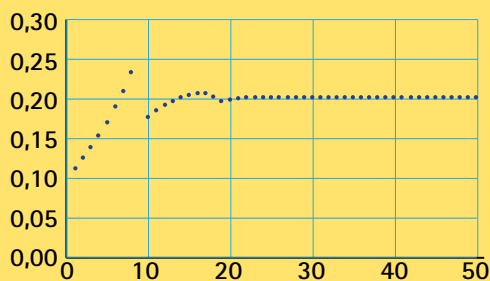
$$p_4 = \frac{1\,000}{6\,561} = \frac{10^3}{9^4} \approx 0,1524,$$

$$p_5 \approx 0,1694, \quad p_6 \approx 0,1882,$$

$$p_7 \approx 0,2091, \quad p_8 \approx 0,2323$$

$$p_9 \approx 0,2581.$$

Pour les prochaines valeurs des p_i , il est impossible d'obtenir directement N puisqu'il faudrait obtenir 10 ou plus lors du prochain lancer, ce qui est impossible avec notre dé. Le prochain lancer non nul aura une valeur entre 1 et 9 qui nous rapprochera du total N et nous mènera à l'une des situations dont nous avons déjà calculé les probabilités. Chacune des valeurs de 1 à 9 étant équiprobable, la valeur de p_i avant ce lancer est la moyenne des probabilités des 9 situations auxquelles on peut arriver. Il suffit donc de faire la somme de ces probabilités multipliées par $1/9$. On obtient ainsi la valeur de p_i . On continue de la même façon pour trouver les p_i qui suivent. Voici un graphique qui présente les 50 premiers p_i . On voit que ceux-ci se stabilisent autour de 0,2.



Les cinquante premiers p_i

Compter dans différentes bases

Habituellement, les nombres sont représentés en base 10 dans notre système de numération par position. Par exemple, 666 représente

$$6 \times 100 + 6 \times 10 + 6,$$

$$\text{ou } 666 = 6 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 6 \times 10^0.$$

La numération par position signifie que chacun des chiffres 6 a une valeur différente : le premier 6 vaut 600, le deuxième vaut 60 et le troisième vaut 6. Ce n'est pas le cas en chiffres romains : dans 8 = VIII, chacun des I vaut 1. Le fait qu'on utilise 10 chiffres et qu'on fasse des regroupements de 10 est purement arbitraire. Les Mayas utilisaient une numération en base 20. La numération en octal est une numération qui utilise seulement 8 chiffres (de 0 à 7), faisant des regroupements de 8. Par exemple, le nombre 666 s'écrit en octal 1 232 car

$$1 \times 8^3 + 2 \times 8^2 + 3 \times 8^1 + 2 \times 8^0 = 666.$$

On a vu qu'on obtient 666 en additionnant les premières décimales de π . Ce résultat est vrai en base 10, mais est-il vrai peu importe la base? En octal, le premier chiffre après la virgule représente le nombre de huitièmes, le deuxième le nombre de soixante-quatrièmes, etc. Voici π avec 208 chiffres après la virgule en octal.

$\pi = 3,1103755242\ 10264\ 30215\ 14230$
 63050 56006 70163 21122 01116 02105
 14763 07200 20273 72461 66116 33104
 50512 02074 61615 00233 57371 24315
 47464 72206 15460 12605 15574 45742
 41564 77411 52665 55243 41105 71102
 66535 46113 63754 33642 30413 51514
 337...

Si on s'intéresse aux 5 premiers chiffres après la virgule, cela signifie que

$$\pi \approx 3 + 1/8 + 1/8^2 + 0/8^3 + 3/8^4 + 7/8^5 \approx 3,14157.$$

Si on fait la somme des 207 premiers chiffres après la virgule, on obtient 660 et si on ajoute le chiffre suivant qui est un 7, on obtient 667. Il est donc impossible d'obtenir 666 en additionnant les premières décimales de π en base 8. Le nombre π est donc relié à la bête en base 10, mais pas en base 8.

En base 2, il n'y a que deux chiffres : 0 et 1. Avec n'importe quel nombre aléatoire sous forme binaire avec une infinité de décimales non nulles, il est possible d'atteindre 666 en additionnant les premières décimales. Effectivement, comme on n'additionne que des 1 et des 0, on va inévitablement atteindre 666 (ou n'importe quelle autre valeur).

Faites vous-même des sommes de décimales

Pour obtenir les valeurs de cet article pour les différentes sommes de décimales, les calculs ont été faits en Python avec la bibliothèque Sympy. L'idée de base pour obtenir la somme est cette formule :

$$\sum_{i=1}^n [N \times b^i - b \times \lfloor N \times b^{i-1} \rfloor]$$

où Σ est un opérateur de somme, N est le nombre dont on veut faire la somme des décimales, n est le nombre de décimales à additionner, b est la base (habituellement $b = 10$) et $\lfloor x \rfloor$ est la fonction plancher qui retourne le plus grand entier inférieur ou égal à x . On peut également entrer cette formule sur le site wolframalpha.com et obtenir la somme désirée. Par exemple, pour faire la somme des 144 premières décimales de π , on peut écrire cette commande.

$$\text{sum floor}(\pi * 10^i - 10 * \text{floor}(\pi * 10^{i-1})), i=1 \text{ to } 144.$$

Le Saint-Laurent a toujours été un moyen de communication important. Il était impérieux pour un capitaine de navire de connaître sa localisation en tout temps pour pouvoir se mettre à l'abri à l'arrivée d'une tempête tout en évitant les hauts-fonds.

Jean Deshayes et la cartographie du fleuve Saint-Laurent

Alain Ross
Chercheur indépendant

André Ross
Professeur retraité

Arpentage du fleuve

Très tôt, s'est imposée la nécessité de dresser une carte détaillée du Saint-Laurent. Cette voie d'accès est périlleuse pour qui s'y aventure sans en connaître les hauts-fonds et les différents écueils en cours de route. Il fallait une carte indiquant les mouillages permettant de jeter l'ancre et de s'abriter en cas de tempête et situant les obstacles. Dans ce but, Jean Deshayes est envoyé en Nouvelle-France en 1695. Pour mener à bien sa mission, il dispose d'un an et se voit confier une barque, une chaloupe, un canot d'écorce et sept hommes d'équipage. Les instruments qu'il a à sa disposition sont : une arbales-

trille, une sonde marine, une boussole et un demi-pied de Roy à l'aide duquel il fabrique un galon de fil de dix toises de long et imbibé de cire. Il indique qu'il a entendu dire que des ingénieurs se servent de cet instrument car il tient en peu de place une fois roulé et qu'il ne doit pas être très sensible aux variations de température. Le résultat de son travail est la carte reproduite en page 25.

En regardant cette carte, on remarque qu'elle est plus détaillée sur la rive nord que sur la rive sud. Il s'en explique dans le rapport de son expédition¹.

Les trois vents qui règnent le plus dans cette rivière et qui sont souvent très impétueux sont le noroît² qui débute de la côte du nord, le suroît et le nordet qui enfilent la rivière (pour le nordet il est quelquefois rare et longtemps attendu de ceux qui montent la Rivière). C'est à cause des vents noroît que l'on s'attache à longer la côte du Nord préférablement à celle du Sud. Cependant la côte sud serait utile à connaître si on y était emporté par le noroît comme il m'est arrivé.

Il va donc se consacrer plus particulièrement à l'arpentage de la rive nord pour ne faire que deux petites parties de la rive sud. Celle de Québec à Rivière-Ouelle et celle de l'entrée du fleuve : l'île d'Anticosti et de Percé jusqu'à la rivière Madeleine.

1. Les extraits du rapport de Jean Deshayes ont été réécrits en français moderne pour en faciliter la lecture.
2. Jean Deshayes écrit « les Nordouests qui deboutent de la coste du Nord et les Surouests et les Nord Ests qui enfilent la Rivière ».



Illustration : Alain Ross

L'arbalestrille (ou bâton de Jacob ou arbalète) est un instrument utilisé jusqu'au XVII^e siècle en arpentage, en astronomie et en navigation. C'est un long bâton carré et gradué auquel est rattachée une pièce mobile perpendiculaire, le marteau. Pour mesurer sa latitude, un capitaine porte une des extrémités du bâton à son œil. Il rapproche ou éloigne le marteau de son œil jusqu'à l'alignement de sa partie supérieure sur le soleil ou l'étoile Polaire et sa partie inférieure sur l'horizon. Il suffit ensuite de noter le point de rencontre du marteau et de la règle du bâton et de convertir le résultat en degrés en consultant une table de données. En le plaçant à l'horizontale, on utilise l'arbalestrille pour mesurer l'angle entre sa position et deux points fixes. D'autres instruments sont développés par la suite : l'astrolabe, l'octant et le sextant.

Arpentage de la rive sud

Durant l'hiver suivant son arrivée, il arpente la rive sud, de Québec à Rivière-Ouelle, en profitant du fait que la glace lui permet de marcher, de prendre des mesures en comptant ses pas et de traverser les cours d'eau. Il ne va pas plus loin que Rivière-Ouelle. Pour la partie de l'exploration allant de Québec à Rivière-Ouelle, il se déplace donc en raquettes sur la neige ou la glace. Il arrête à Rivière-Ouelle parce que les habitations sur la rive sud du fleuve ne vont pas plus loin et qu'il n'y aurait donc aucune possibilité de se restaurer.

Je ne fus point plus avant de ce côté-là parce que j'en fis le voyage en raquettes sur les ponts de glace et sur les neiges, et que les habitations ne s'étendent au-dessous de Québec que 20 lieues³ de marine au Sud jusqu'à la Rivière-Ouelle.

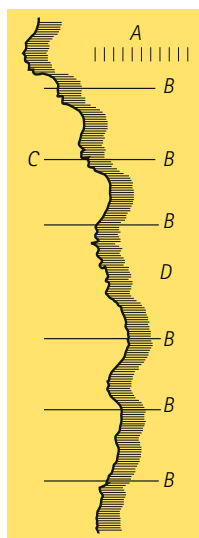
Durant ce parcours, il dessine le contour de la côte en s'orientant à la boussole. Il compte ses pas pour mesurer les distances, méthode utilisée depuis la nuit des temps.

Arpentage de l'île d'Orléans

Il entreprend ensuite l'arpentage de l'île d'Orléans. Il doit utiliser plusieurs feuilles pour tracer les contours de la côte et s'assurer que les différents dessins sont à une même échelle de façon à s'agencer correctement dans le produit fini. Il procède en faisant des marques A sur son dessin pour chaque intervalle de cent pas et des marques B pour chaque intervalle de 10 marques A, afin de s'assurer au final que les esquisses obtenues sont dans le même rapport.

De cent pas en cent pas, je faisais vers un coin de papier une des petites marques A et je dessinais ce que je voyais de la côte. Et de dix en dix des marques A, sur le dessin C les marques B dont le principal usage était de me montrer en dressant la carte finale les morceaux du dessin qui seraient à proportion dessinés trop long ou trop

3. Environ 96,56 km



court. Ainsi l'intervalle D serait trop long et devrait être fait plus court en dessinant la carte finale.

(...) Ayant fait de cette manière tout le tour de l'île d'Orléans qui est de douze ou treize lieues de marine⁴, lequel tour nécessita six demi-feuilles de papier séparées, et ayant assemblé ces feuilles comme une seule, la fin s'est trouvée juste avec le commencement et les deux côtés de l'île qui sont à peu près d'égale longueur avaient autant de marques de mille pas l'un que l'autre.

Triangulation de la rive Nord

Après avoir fait le tour de l'île, il va entreprendre l'arpentage de la rive nord du fleuve, en appliquant la méthode de triangulation. Pour faire une triangulation (voir encadré), il faut mesurer au moins une première distance. En fait, il en effectue trois en comptant ses pas. Il profite du fait que le fleuve est gelé et pas trop enneigé pour prendre les deux premières.

La première mesure fut faite sur la glace unie dans le commencement des glaces, avant qu'il ait beaucoup neigé, depuis la pointe des Roches de Québec jusqu'à la deuxième butte de la pointe de Lévis et fut trouvée de 1560 toises⁵. La deuxième est la largeur de la rivière perpendiculairement à la rive à partir de la pointe des Roches, 608 toises⁶. Et la dernière toute la longueur au nord de l'Isle aux Lièvres⁷ de 680 toises⁸.

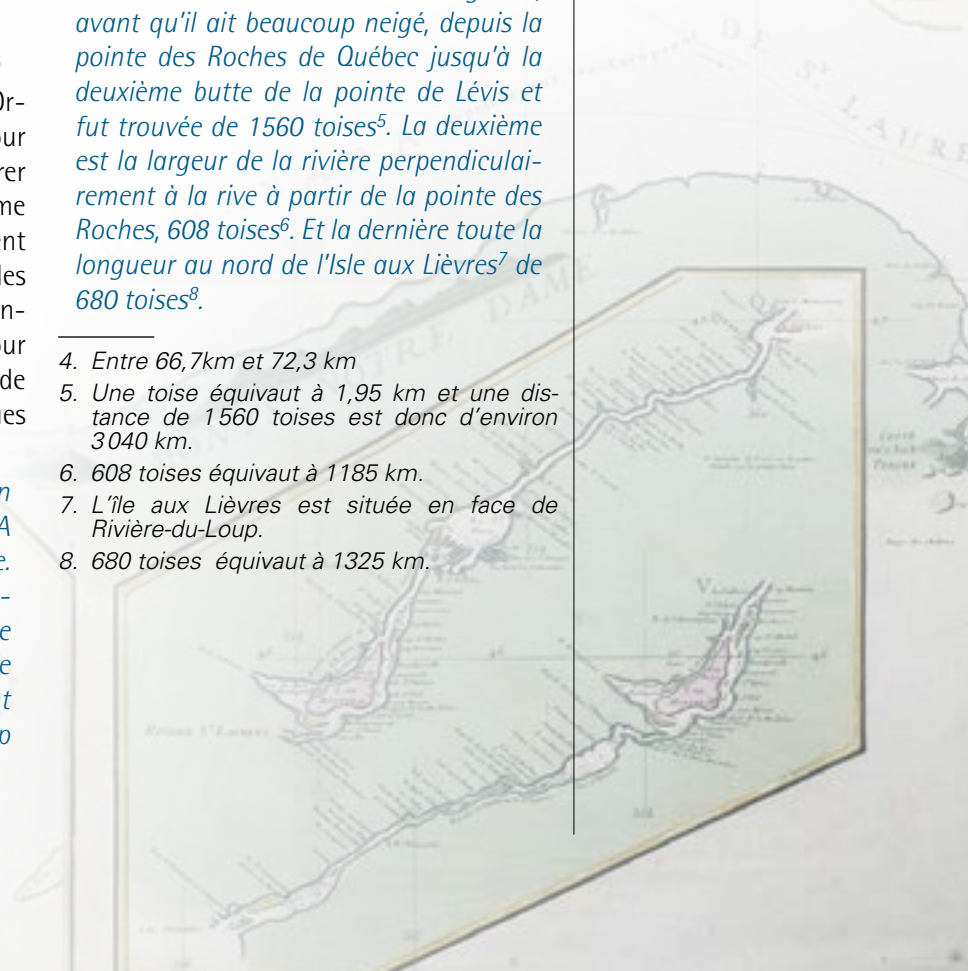
4. Entre 66,7km et 72,3 km

5. Une toise équivaut à 1,95 km et une distance de 1560 toises est donc d'environ 3040 km.

6. 608 toises équivaut à 1185 km.

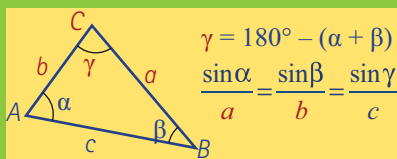
7. L'île aux Lièvres est située en face de Rivière-du-Loup.

8. 680 toises équivaut à 1325 km.

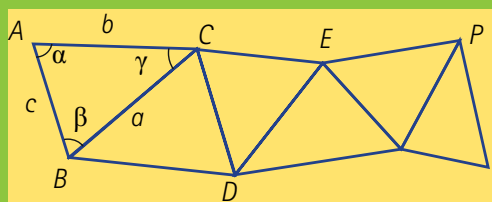


La triangulation

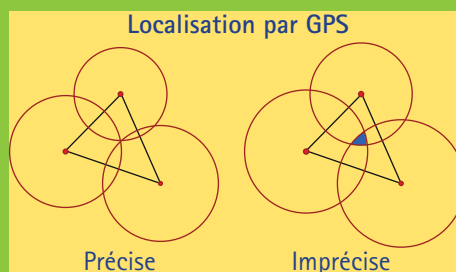
La triangulation est une technique trigonométrique consistant à mesurer les angles entre les extrémités d'une droite AB et un point C dont la position inconnue peut alors être calculée à l'aide de la trigonométrie, comme l'illustre l'image suivante dans laquelle les éléments en rouge sont les inconnues qu'il faut calculer.



Lorsqu'on doit mesurer la distance d'un point A à un point P au-delà de l'horizon, on intercale entre les deux points une chaîne de triangles dont les sommets sont des points visibles de proche en proche. Il suffit dans ce montage de connaître deux angles par triangle et la longueur de AB pour résoudre tous les triangles.



On parle également de triangulation pour situer, par exemple, la provenance d'un appel de détresse. Pour avoir une bonne précision, il faut cependant que les antennes qui captent le signal soient assez proches du lieu d'où provient l'appel, ce qui n'est pas le cas partout au Québec.



Dans les régions éloignées des grands centres, l'estimation du positionnement est sujette à caution : elle peut représenter un territoire de quelques kilomètres carrés.

Un développement récent sur certains téléphones portables permet, lorsqu'il n'y a pas de réseau, de communiquer directement avec un satellite pour indiquer sa position.

Normalement, pour effectuer une triangulation dans une région peuplée, on choisit des clochers d'église, des tours, des pics rocheux, etc. comme sommets de la chaîne de triangles. Jean Deshayes ne dispose pas de tels objets à pointer.

Le Canada étant un pays couvert et encore peu habité entre autres vers le bas de la rivière, il fournit peu d'objets commodes pour pointer les alignements comme sont les maisons, les tours et les moulins à vent. De plus la grande largeur de la rivière empêche que des stations de la côte nord on distingue bien toutes celles du sud, ni de celles du sud celles du nord. C'est pourquoi il a été nécessaire de pointer des sommets de montagnes éloignées qui ont servi de guide à plusieurs stations de suite.

On donne ci-dessous la liste des points retenus dont Deshayes établit la latitude. Ce tableau indique également, avec plus de précision, les valeurs actuellement retenues pour ceux des points facilement identifiables. Dans son rapport, il explique que la mesure ne peut être plus parfaite que l'instrument dont il dispose.

Latitudes mesurées par Jean Deshayes

(valeurs modernes pour les noms inchangés)

À Québec	46°55' (46°49'47")
À l'est de l'île Madame	47°05' (46°58'14")
Au Cap aux oies	47°37' (47°29'18")
Au Cap à l'aigle	47°48' (47°39'46")
À Port au saumon	47°51' (47°46' 0")
À Port à l'Esquille	47°58'
À l'ouest de la baie des rochers	48°02'
Lesquemins (Escoumins)	48°32' (48°20'52")
Aux îlets, rivière aux outardes	49°11'
Aux sables, rivière aux outardes	49°10'
Aux îlets Chevaliers	49°37'
À l'île aux Oeufs	49°45' (49°37'30")
À la cabane au ressac	49°50'
Au Caöuy	49°55'
Au cabanage, Est Caöuy	49°57'
À la première des Sept-Îles	50°10' (50°09'44")
À la quatrième des Sept-Îles	50°10' (50°09'44")
Pointe Est, baie des Sept-Îles	50°12'
<hr/>	
Ouest d'Anticosti	49°48' (49°23'25")
<hr/>	
Île Percée	48°34' (48°31'28")
Cabanage, anse Cap des Rosiers	48°52' (48°51'45")
Rivière Madeleine	49°15' (49°14' 0")

Pour déterminer la latitude de ces caps, il mesure des hauteurs d'étoiles en direction sud et, en direction nord, celle de l'étoile polaire. Voici comment il s'en explique dans son compte-rendu.

Je les ai observées (les latitudes) à tous les endroits où j'ai eu du beau temps. La plupart sont par des hauteurs d'étoiles, et j'en ai pris autant que j'ai pu à chaque endroit au nord l'étoile polaire, et plus d'une au sud.

En plus de mesurer les latitudes, il dessine le contour du rivage en orientant le dessin à l'aide d'une boussole. Il ne retient pas trop de détails du contour, puisque la profusion de détails serait perdue dans la production des cartes. Il se contente donc d'esquisser le contour du rivage de cap en cap.

Chemin faisant le long des côtes avec le canot d'écorce pour aller faire les stations pour les angles de cap en cap, je dessinais le détail du contour du rivage, et j'orientais le dessin grâce à une petite boussole que je tenais toujours dans une main.

Les hauts-fonds

Pour être utile à la navigation et éviter des naufrages, une carte doit indiquer le plus précisément possible les détails sous-marins afin qu'un capitaine sache où se réfugier en cas de gros temps. Il sonde les fonds marins pour en détecter les hauts-fonds.

... sans négliger de faire toujours sonder dans le canot aussi bien que dans la barque le plus souvent que je pouvais l'exiger des matelots et j'ai jeté quelques fois la sonde moi-même en repassant des côtes dont j'avais déjà le dessin; et en quelqu'autres endroits où j'ai soupçonné et trouvé que des matelots rebutés voulaient me tromper.

J'ai continué ainsi toute la côte du Nord environ cent lieues⁹ de marine depuis Québec jusque par delà les Sept-Îles.

Après avoir repéré les caps les plus saillants, dessiné les contours du rivage et sondé les fonds marins, il va s'intéresser à nouveau à la rive sud.

9. Environ 555,6 km.

Cette dernière partie de la côte du Sud à partir du haut de l'île d'Anticosti à 49 degrés 48 minutes de latitude et à environ vingt cinq lieues des Sept-Îles et ce que j'ai de la côte du Nord, tout cela contient ce qu'il y a de plus nécessaire pour la navigation des navires dans ce fleuve, et aussi tout ce que m'a permis la durée de ma campagne. La côte de l'île Percée et la position d'Anticosti à son égard servent à entrer dans la rivière, premièrement par leurs latitudes et de plus par leurs connaissances comme de la Table à Roland (voir encadré Table à Roland) sur la côte de l'île Percée.

Dans son rapport, il donne également des directives pour naviguer.

... on longe toujours la Côte du Nord, prenant garde principalement à la batture de Manicouagan de n'approcher pas la côte à plus d'une lieue et demie ou deux lieues, et pour cela il ne faut pas attendre que l'on ait passé sous les Monts Pelés¹⁰,

10. Cette appellation désigne les montagnes de la côte nord du fleuve. À environ 60 km à l'est de Baie-Comeau, à l'endroit où la côte du Saint-Laurent prend une direction franchement nord. Aux XVII^e et XVIII^e siècles, cette entité topographique a d'abord été connue sous le nom de Pointe des Monts Pelés. La masse laurentienne qui s'étend dans l'arrière-pays du Saguenay jusqu'à Sept-Îles a été connue au cours de cette période sous la dénomination de Monts Pelés.

Plomb de sonde

Pour sonder le fond marin, un matelot lance à l'eau un fil à plomb et le remonte lorsqu'il touche le fond. Le fil est muni de marqueur, fixés au fil et séparés par la longueur d'un bras appelés brasse. La profondeur des eaux est obtenue en comptant ensuite le nombre de marqueurs qui étaient immergés. Le plomb est échancre à sa base et rempli de suif ou de gras. Des échantillons de fonds marins comme de l'argile, du sable, du gravier et autres se collent au suif. Les marins les examinent ensuite pour mieux connaître la nature des fonds marins.



Archéolab. Québec

Jean Deshayes (1650-1706)

Jean Deshayes est né à Paris vers 1650 et est décédé à l'Hôtel-Dieu de Québec le 18 décembre 1706. Il enseigne les mathématiques et les principes de navigation aux officiers de marine à Rochefort jusqu'en 1681. En 1685, il est envoyé au Canada pour cartographier le fleuve Saint-Laurent.

En 1699, Deshayes participe à un nouveau voyage scientifique sur l'océan Atlantique, plus particulièrement à Cayenne, en Martinique et en Guadeloupe, à Saint-Domingue. Il vient à nouveau au Canada en 1702 pour occuper le poste d'hydrographe royal à Québec. Certaines de ses observations sont rapportées dans les mémoires publiés par l'Académie royale des sciences. Durant l'hiver, il enseigne les principes du pilotage aux jeunes pilotes au Collège des Jésuites, et l'été il poursuit la cartographie du fleuve. Il meurt à l'Hôtel-Dieu de Québec le 18 décembre 1706.

À sa mort, il laissa peu de biens, à part sa bibliothèque et quelques instruments. La bibliothèque contient : les *Cours de mathématiques* de Jacques Ozanam en cinq tomes; les *Récréations mathématiques et physiques* du même auteur; les *Éléments* d'Euclide en deux tomes; les *Éléments d'arithmétique et d'algèbre* de Thomas Fantet Delagny; le *Traité du triangle arithmétique* par Blaise Pascal; le *Tabulae astronomicae* par Philippe de La Hire; *Les Institutions de l'Arithmétique* de Jacques Chauvet; *l'Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes* de Guillaume François de l'Hospital.

Île Percée

Gravure de Pierre-Charles Canot produite en 1760 et montrant la présence de deux trous dans le rocher au XVIII^e siècle. L'œuvre a été réalisée d'après l'illustration de Hervey Smythe, aide de camp du général Wolfe, lors d'un passage à Percé en 1758, durant la guerre de la Conquête.



Table à Roland



BAnQ Québec, L. J. Désilets, 1946, E6, S7, SS1, P24651, Fonds Ministère de la Culture et des Communications

La table à Roland est le nom primitif du mont Sainte-Anne qui surplombe Percé. La plus ancienne mention connue de la *Table à Roland* est fournie par le récollet Gabriel Sagard dans son ouvrage *Le Grand Voyage au Pays des Hurons* publié en 1632.

Le lendemain nous eûmes la vue sur la montagne que les matelots ont surnommée Table de Roland, à cause de sa hauteur, et des diverses coupures qui sont comme au couteau.

La Commission de toponymie du Québec a formulé l'hypothèse que « table à Roland » est à relier à un épisode légendaire de *La chanson de Roland* (poème épique et chanson de geste de la fin du XI^e siècle) et à la croyance populaire qui s'ensuivit. Selon la légende, Roland, neveu de Charlemagne, en voulant briser son épée Durandal pour qu'elle ne tombe pas aux mains de l'ennemi, fendit la montagne à Roncevaux. On donne ainsi le nom de Roland à des entités physiques similaires. Vue du ciel, la montagne de Percé semble vraiment avoir été tranchée par une immense épée.

il faut commencer à prendre le large une lieue ou deux avant la rivière Sainte-Marguerite. Et quand on approche des détroits du grand fleuve qui commencent après la rivière Saguenay, il y a des précautions particulières qui sont marquées sur la Carte qui marque aussi les mouillages qui sont avant et après ces détroits en cas de vent contraire.

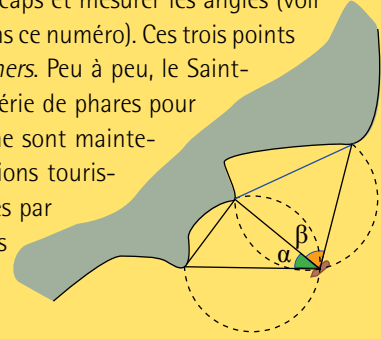
Jean Deshayes sait que pour représenter une distance sur la sphère, il faut utiliser la trigonométrie sphérique. Il considère que cela est négligeable dans son travail parce que les sommets des triangles contigus sont visibles l'un de l'autre et que la superficie couverte n'est pas très large.

Conclusion

Jean Deshayes a posé le premier jalon d'une longue démarche, la cartographie complète du Saint-Laurent. Cette première étape n'a pas été sans risques, le beau temps n'a pas toujours été au rendez-vous. Il a été confronté aux intempéries et a dû lutter contre les

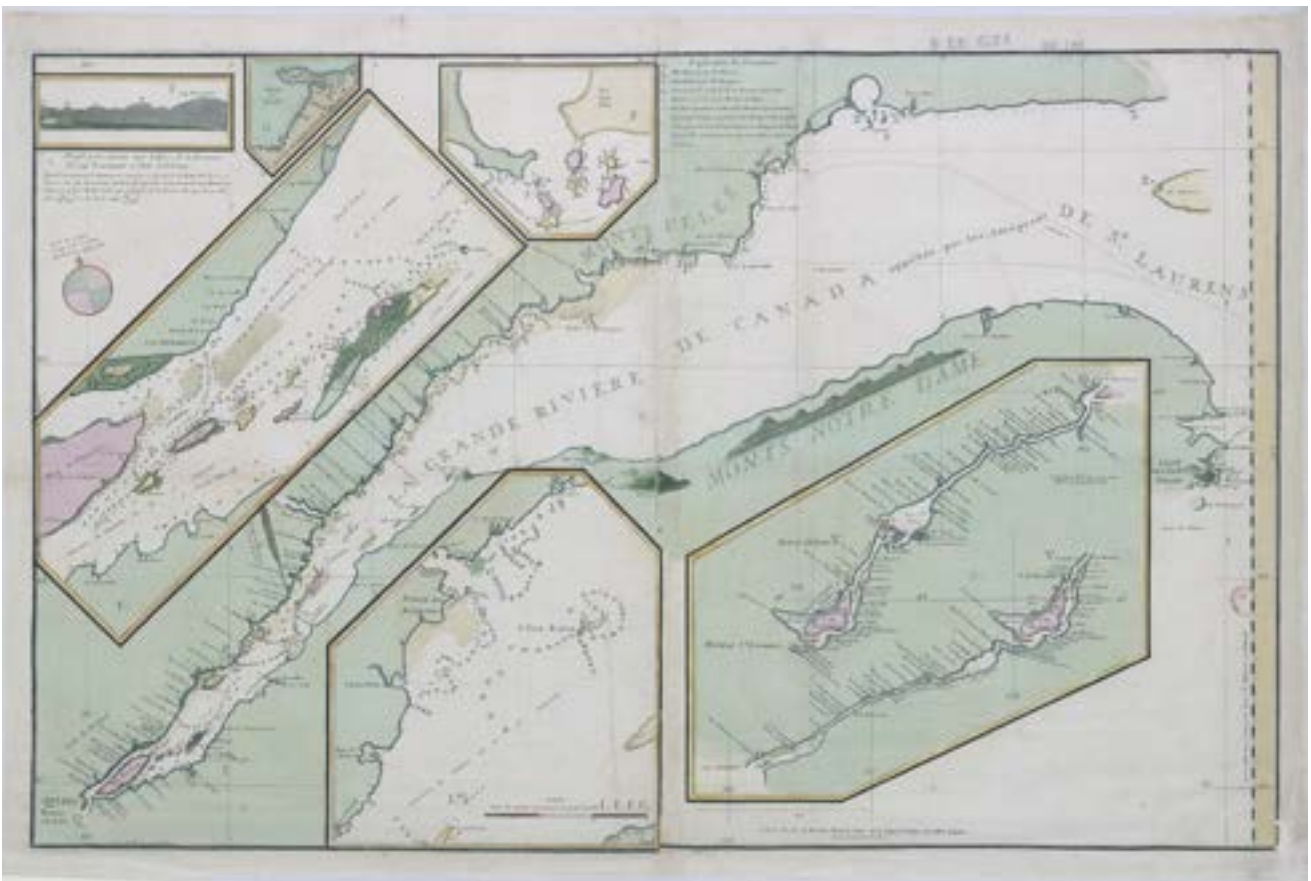
Position d'un navire

Un capitaine peut connaître la position de son navire sur une carte en relevant les angles entre trois points d'observation assez distants l'un de l'autre et en déterminant les arcs capables dont l'intersection est la position du navire. En utilisant la carte de Deshayes, il faut choisir trois caps et mesurer les angles (voir *La position d'un navire* dans ce numéro). Ces trois points de repère sont appelés *amers*. Peu à peu, le Saint-Laurent sera muni d'une série de phares pour aider à la navigation. Ils ne sont maintenant plus que des attractions touristiques, ayant été remplacés par des moyens plus modernes pour la navigation.



éléments. Il lui a fallu beaucoup de détermination pour mener à bien la tâche qui lui a été confiée. Son aventure n'a pas seulement donné une carte du fleuve utile pour la navigation, elle est la manifestation d'une des premières applications des mathématiques en Nouvelle-France.

Deshayes, Jean, Carte de la Grande rivière de Canada



Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

Comment faire pour trouver l'aire d'un polygone simple? Pour calculer l'aire de la figure ci-contre, où tous les sommets sont à coordonnées entières, on peut utiliser la formule de Pick¹. Lorsque certains des sommets ne sont pas à coordonnées entières, on a recours à la formule des lacets de souliers.

La formule des lacets de souliers

Marc-André Désautels
Cégep
St-Jean-sur-Richelieu

Si I est le nombre de points à coordonnées entières à l'intérieur du polygone et F le nombre de points à coordonnées entières sur la frontière du polygone, alors la formule de Pick dit que :

$$\text{Aire} = I + \frac{F}{2} - 1.$$

Dans notre exemple, $I=8$, et $F=10$, ce qui donne bien une aire de 12 unités².

Si nous utilisons l'image de gauche, celle-ci nous montre qu'il est possible de trianguler le polygone en de multiples triangles et d'additionner l'aire de tous ces triangles, on appelle cette démarche la *triangulation de polygones*².

Pour utiliser la formule de Pick, il est plus facile d'avoir le dessin sous les yeux et surtout d'avoir des points à coordonnées entières, ce qui est rarement le cas. Pour ce qui est de la triangulation de polygones, celle-ci devient rapidement inutilisable pour un humain qui souhaiterait trianguler un polygone contenant des milliers de points.

Que diriez-vous de plutôt utiliser une technique simple qui fonctionne peu importe le polygone simple de départ? Cette méthode, c'est celle des lacets de souliers.

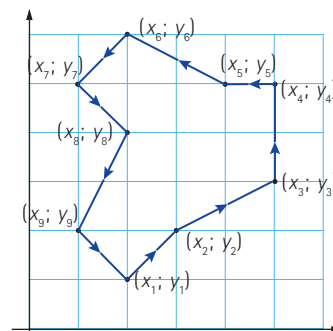
Que diriez-vous de plutôt utiliser une technique simple qui fonctionne peu importe le polygone simple de départ? Cette méthode, c'est celle des lacets de souliers.

1. Voir « La formule de Pick », Accromath, volume 5.2. - été-automne 2010.
2. Sur la triangulation, voir dans ce numéro « Surveiller une galerie d'art » et « Jean Deshaies, la cartographie du fleuve ».

Pourquoi des lacets de souliers?

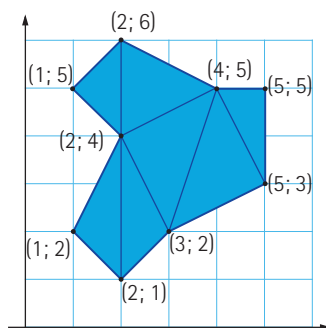
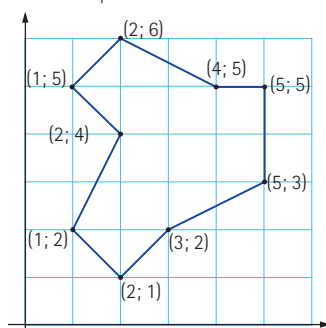
Pour comprendre d'où vient le nom « lacets de souliers », nous poserons tout d'abord notre problème. Rappelons qu'un *polygone* est une figure géométrique formée d'une ligne brisée qui se referme. Il est *simple* si l'intersection de deux côtés est vide ou réduite à un sommet pour deux côtés consécutifs.

Soit un polygone simple possédant n sommets orientés notés $(x_i; y_i)$ où $i=1, \dots, n$. Les sommets sont dits *orientés* si à partir d'un sommet choisi au hasard (noté $(x_1; y_1)$), nous numérotions tous les autres sommets en parcourant le polygone en sens *anti-horaire*. Nous verrons plus tard ce qui se passe lorsque nous numérotions en sens *horaire*. Dans la figure ci-dessous, nous avons choisi comme sommet de départ le point le plus bas du polygone et nous les avons numérotés en sens anti-horaire. À partir du premier sommet, nous numérotions les sommets en suivant les flèches.



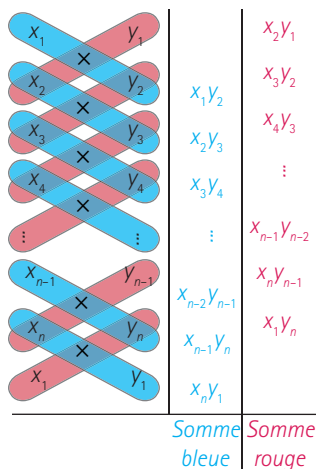
La méthode des lacets de souliers tire son nom d'une façon mnémotechnique de trouver l'aire du polygone.

- Pour débiter, nous plaçons dans deux colonnes les coordonnées x et y des sommets du polygone placés en sens anti-horaire.



- Nous *fermons* ensuite le polygone en ajoutant la coordonnée du sommet de départ à la dernière ligne.
- Nous ajoutons ensuite deux colonnes supplémentaires obtenues en multipliant en *diagonale* les coordonnées x et y .
 - La première de ces colonnes est obtenue en multipliant les coordonnées des diagonales bleues;
 - La seconde en multipliant les coordonnées des diagonales rouges.
- Nous trouvons enfin la somme de ces deux colonnes.

On peut voir apparaître la forme des lacets de souliers dans la figure ci-dessous.

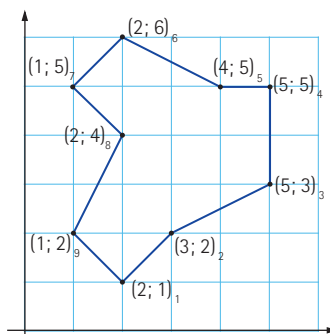


L'aire du polygone est obtenue en trouvant la différence entre la somme bleue et la somme rouge et en divisant par deux le résultat. C'est-à-dire:

$$\text{Aire} = \frac{\text{Somme bleue} - \text{Somme rouge}}{2}$$

Un exemple

Le meilleur moyen de comprendre la méthode des lacets de souliers est de l'utiliser dans un exemple concret. Nous reprenons donc le premier polygone rencontré où nous avons indiqué le numéro des sommets orientés en sens anti-horaire en l'indiquant en indice des coordonnées.



En représentant la méthode des lacets de souliers du polygone précédent, nous obtenons le tableau ci-dessous.

Sommet	Coordonnées		Produits	
	x	y	1	2
1	2	1		3
2	3	2	4	10
3	5	3	9	15
4	5	5	25	20
5	4	5	25	10
6	2	6	24	6
7	1	5	10	10
8	2	4	4	4
9	1	2	4	4
10	2	1	1	
			106	82

L'aire du polygone est donc donnée par :

$$\text{Aire} = \frac{106 - 82}{2} = 12 \text{ unités}^2$$



Nous obtenons la même aire que celle obtenue par la formule de Pick.

La méthode des lacets de souliers en langage mathématique

La méthode vue précédemment est un moyen visuel de se rappeler et d'utiliser la méthode des lacets de souliers. Par contre, pour être en mesure de démontrer pourquoi cette méthode fonctionne, nous devons utiliser une formulation mathématique.

Soit un polygone P possédant n sommets orientés en sens anti-horaire notés $(x_i; y_i)$ où $i = 1, \dots, n$.

En nous basant sur les lacets présentés plus tôt, et en débutant à la colonne des abscisses (les valeurs de x), nous remarquons que nous devons multiplier l'abscisse d'un sommet avec l'ordonnée (la valeur de y) du sommet *suivant* (représenté par $x_i; y_{i+1}$) les diagonales bleues et donc $x_{i+1}; y_i$. Nous devons ensuite multiplier l'ordonnée d'un sommet avec l'abscisse du sommet *suivant* (représenté par les diagonales rouges et donc $x_{i+1}; y_i$).

En langage mathématique, nous obtenons que l'aire du polygone P , notée $\text{Aire}(P)$ est donnée par³:

$$\begin{aligned} \text{Aire} &= \frac{1}{2} (\text{Somme bleue} - \text{Somme rouge}) \\ &= \frac{1}{2} ((x_1 y_2 + x_2 y_3 + \dots + x_n y_1) - (x_2 y_1 + x_3 y_2 + \dots + x_1 y_n)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) + (x_n y_1 - x_1 y_n) \right). \end{aligned}$$

Pourquoi tourner en sens anti-horaire?

Depuis le début de cet article, nous numérotions nos sommets en sens anti-horaire pour obtenir l'aire exacte de notre polygone. Mais qu'arriverait-il si nous numérotions en sens horaire?

Intuitivement, en numérotant les sommets en sens horaire, nous allons croiser les

mêmes paires de coordonnées mais en sens inverse. En d'autres termes, les diagonales qui sont formées des produits des coordonnées d'un sommet et du sommet *suivant* deviendront des produits des coordonnées d'un sommet et du sommet *précédent*. Les diagonales bleues deviendront les diagonales rouges et inversement. Plutôt que de faire *Somme bleue* moins *Somme rouge*, nous faisons l'inverse et nous obtenons la même valeur *au signe près*.

Plus simplement, l'aire du polygone numéroté en sens horaire est en valeur absolue égale à l'aire du polygone numéroté en sens anti-horaire.

$$|\text{Aire}(P_{\text{anti-horaire}})| = |\text{Aire}(P_{\text{horaire}})|$$

C'est pour cette raison que la plupart du temps la méthode des lacets de souliers est représentée avec une valeur absolue, indiquant qu'elle peut être utilisée en numérotant en sens anti-horaire ou horaire.

Mais en utilisant le sens anti-horaire on obtient toujours un nombre positif et son opposé si on utilise le sens horaire, cela justifie d'utiliser le sens anti-horaire.

Pourquoi ça fonctionne?

L'aire d'un triangle

Pour démontrer pourquoi la formule fonctionne, nous allons débiter en montrant qu'elle fonctionne pour un triangle quelconque. Nous utiliserons ensuite ce résultat pour montrer qu'elle fonctionne dans le cas de polygones.

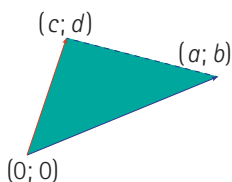
Soit un triangle ayant comme sommets l'origine ainsi que les points de coordonnées $(a; b)$ et $(c; d)$. Nous pourrions ensuite généraliser notre résultat en translatant le sommet du triangle dans le plan cartésien.

Pour faciliter notre démonstration de l'aire d'un triangle, nous trouverons plutôt l'aire du parallélogramme engendré par les deux vecteurs ayant comme sommet l'origine et

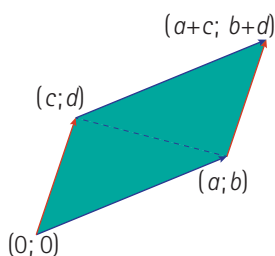
3. Le symbole \sum est un moyen d'écrire une somme sous une forme plus compacte, nous évitant ainsi d'écrire plusieurs additions. Par exemple, la somme des n premiers entiers peut s'écrire:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 98 + 99 + 100 = \sum_{i=1}^{100} i$$

comme extrémités les sommets $(a; b)$ et $(c; d)$. On peut aussi voir ce parallélogramme comme étant formé par la réflexion du triangle de départ par rapport au segment de droite pointillé.

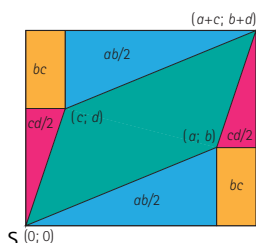


Il est clair que l'aire du triangle correspond à la moitié de l'aire du parallélogramme engendré.



Il est possible, en utilisant un peu d'algèbre, de trouver l'aire du parallélogramme précédent. Pour simplifier le processus, nous utiliserons une astucieuse *preuve sans mots*, c'est-à-dire une preuve où une image suffit à prouver un résultat. Par contre, pour vous aider un peu, j'utiliserai quand même quelques mots pour obtenir cette fameuse image.

À partir du parallélogramme précédent, nous construisons le rectangle où le sommet en bas à gauche correspond à l'origine et le sommet en haut à droite est obtenu en *additionnant* les deux points de coordonnées $(a; b)$ et $(c; d)$. Il suffit de réfléchir un peu et d'utiliser la symétrie de la figure pour obtenir l'image suivante.



En observant la figure précédente, l'aire du parallélogramme est donnée par la différence entre l'aire du rectangle et l'aire des triangles et des rectangles représentés.

$$\begin{aligned} \text{Aire}(P) &= (a+c)(b+d) - 2bc - 2\frac{1}{2}ab - 2\frac{1}{2}cd \\ &= ab + ad + bc + cd - 2bc - ab - cd \\ &= ad - bc. \end{aligned}$$

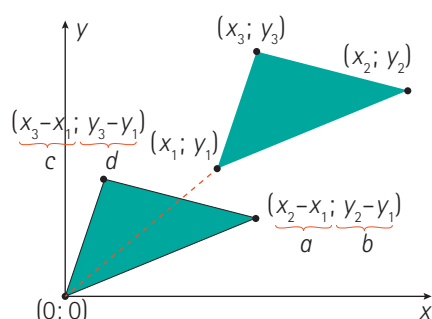
Puisque nous venons de trouver l'aire du parallélogramme, l'aire du triangle associé est la moitié de l'aire trouvée et donc égale à $(ad - bc)/2$.

Remarquons que la méthode des lacets de souliers redonne le même résultat lorsque utilisée avec un triangle de sommets $O(0; 0)$, $A(a; b)$ et $B(c; d)$. Prenons l'origine comme premier sommet et en numérotant ceux-ci en sens anti-horaire nous avons:

Coordonnées		Produits	
Sommet	x	y	
O	0	0	0
A	a	b	bc
B	c	d	ad
O	0	0	0
		ad	bc

L'aire du triangle est donc $(ad - bc)/2$, comme montré précédemment. Pour trouver cette aire, nous avons numéroté notre triangle en sens anti-horaire. Comme mentionné précédemment, si nous numérotons notre triangle en sens horaire, nous allons trouver une aire négative pour notre triangle, c'est-à-dire nous allons obtenir $(bc - ad)/2$.

Nous voulons maintenant trouver l'aire d'un triangle dont un des sommets ne se trouve pas à l'origine. Pour ce faire, nous allons prendre un triangle quelconque et translater un de ses sommets à l'origine. Dans la figure ci-dessous, nous avons pris un triangle de sommets $(x_i; y_i)$ où $i = 1, 2, 3$ et nous translaterons le point $(x_1; y_1)$ à l'origine. Les sommets $(x_2; y_2)$ et $(x_3; y_3)$ translattés deviennent donc respectivement les sommets $(a; b)$ et $(c; d)$.



En se basant sur le résultat obtenu à l'aide du triangle dont un sommet est à l'origine, nous obtenons que l'aire d'un triangle de sommets $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ et $C(x_3; y_3)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \text{Aire} &= \frac{ad - bc}{2} \\ &= \frac{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)}{2}. \end{aligned}$$

En écrivant cette aire un peu différemment, nous obtenons :

$$\frac{1}{2}((x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3))$$

qui peut être réécrite :

$$\frac{1}{2}((x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3))$$

Nous retrouvons notre formule des lacets de souliers!

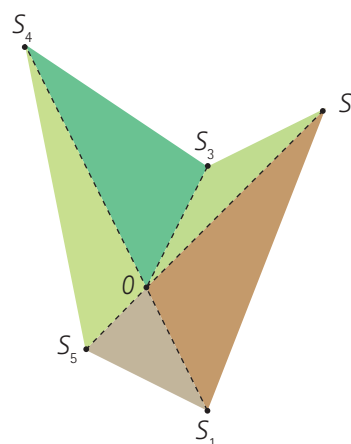
Comprendre intuitivement la méthode des lacets de souliers

Une preuve par récurrence de la méthode des lacets de souliers est présentée à la page suivante. Il est par contre difficile de comprendre intuitivement pour quoi la méthode fonctionne uniquement en étudiant cette preuve.

Rappelons que la méthode des lacets de souliers est obtenue en sommant les aires signées (positive si on numérote en sens anti-horaire et négative si on numérote en sens horaire) des triangles de sommets OS_iS_{i+1} où le sommet O peut être n'importe où dans le plan.

Puisque le point O peut se trouver n'importe où dans le plan, nous allons le choisir pour débiter à l'intérieur du polygone (le cas où le point O se trouve à l'extérieur du polygone est un peu plus compliqué, voir section *Problèmes*).

Soit le polygone ci-dessous ainsi que les triangles OS_iS_{i+1} . On remarque que tous les triangles indiqués sont numérotés en sens horaire et nous donnent des aires positives. Nous avons colorié tous les triangles de couleurs différentes.



Puisque la méthode des lacets de souliers est en fait la somme des aires signées des triangles, nous obtenons l'aire complète du polygone.

Conclusion

La méthode présentée dans cet article présente une manière simple de calculer l'aire d'un polygone, aussi compliqué soit-il. C'est la méthode utilisée par Google Earth si vous lui demandez une aire de polygone. En effet, la formule est utilisée en arpentage, où il suffit de rentrer les coordonnées des sommets, par exemple répertoriées par un GPS et la formule programmée à l'avance dans un appareil peut directement calculer l'aire encerclée par l'arpenteur.

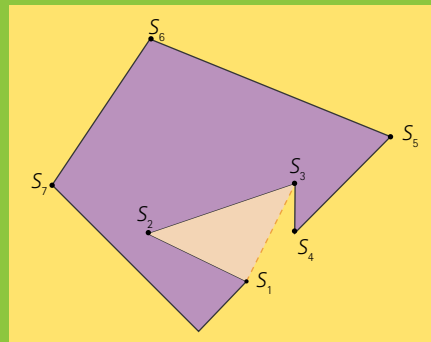
Une preuve par récurrence

Pour montrer que la méthode des lacets de souliers fonctionne pour un polygone possédant n sommets, nous procéderons par récurrence. Appelons S_i les sommets de notre polygone.

Nous savons que la méthode fonctionne pour un polygone $S_1S_2S_3$ (un triangle). Supposons que la méthode fonctionne pour un polygone $S_1S_2S_3\dots S_n$. Nous voulons prouver qu'elle fonctionne aussi pour un polygone $S_1S_2S_3\dots S_nS_{n+1}$.

Idéalement, nous voudrions découper le polygone $S_1S_2S_3\dots S_nS_{n+1}$ en deux polygones, le premier est un triangle formé des trois points $S_1S_nS_{n+1}$ et le second est le polygone formé des points $S_1S_2S_3\dots S_n$.

Le but est que ceci crée deux polygones en partant du polygone de départ et en le coupant le long de la diagonale S_1S_n . Mais une diagonale entre deux sommets dont les indices diffèrent de 2 n'est pas toujours à l'intérieur du polygone comme le montre l'exemple de la figure ci-contre.



Si une diagonale entre deux sommets dont les indices diffèrent de deux est à l'intérieur du polygone, alors elle découpe un triangle lui aussi à l'intérieur du polygone. Un tel triangle est appelé *oreille*. Un théorème de géométrie affirme qu'un polygone admet toujours au moins deux oreilles. Donc, la preuve fonctionne en choisissant le sommet S_1 à la sortie d'une oreille.

Un tel triangle est appelé *oreille*. Un théorème de géométrie affirme qu'un polygone admet toujours au moins deux oreilles. Donc, la preuve fonctionne en choisissant le sommet S_1 à la sortie d'une oreille.

Nous savons, par hypothèse et parce que le polygone $S_1S_nS_{n+1}$ est un triangle que :

$$\text{Aire}(S_1S_2S_3\dots S_n) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) + (x_n y_1 - x_1 y_n) \right),$$

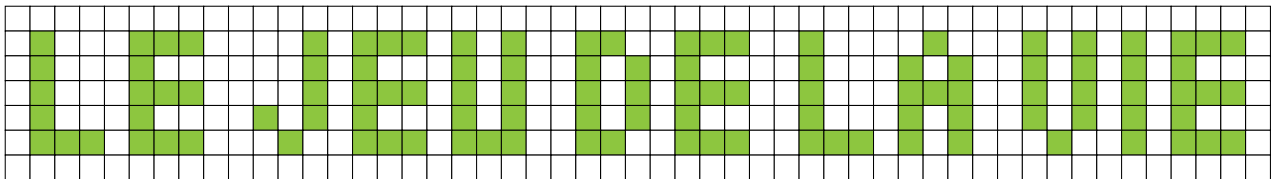
$$\text{Aire}(S_1S_nS_{n+1}) = \frac{1}{2} ((x_1 y_n + x_n y_{n+1} + x_{n+1} y_1) - (x_n y_1 + x_{n+1} y_n + x_1 y_{n+1})).$$

L'aire totale du polygone correspond à la somme des aires des deux polygones précédents :

$$\begin{aligned} \text{Aire}(S_1S_2S_3\dots S_nS_{n+1}) &= \text{Aire}(S_1S_2S_3\dots S_n) + \text{Aire}(S_1S_nS_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) + (x_n y_1 - x_1 y_n) \right) \\ &\quad \dots + \frac{1}{2} ((x_1 y_n + x_n y_{n+1} + x_{n+1} y_1) - (x_n y_1 + x_{n+1} y_n + x_1 y_{n+1})) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) + (x_{n+1} y_1 - x_1 y_{n+1}) \right). \end{aligned}$$

Nous venons donc de démontrer que la méthode des lacets de souliers fonctionne pour tout polygone.

En 1970, « the Game of Life », un jeu étrange inventé par le mathématicien John Conway, fut révélé au grand public dans la revue de vulgarisation *Scientific American*. Avec des principes d'une grande simplicité et des résultats surprenants, ce jeu suscita un engouement tel qu'il compte aujourd'hui encore de nombreux adeptes et continue d'inspirer de nouvelles recherches dans des domaines très variés. Qu'est-ce qui explique un tel succès ?



France Caron
Université de Montréal

Imaginez une grille comme celle d'une feuille de papier quadrillé, mais infinie : ce sera le plateau de jeu. Chacun des carreaux représente une cellule qui peut être soit morte, soit vivante. Au début de la partie, on connaît l'état de chaque cellule. Les règles du jeu (voir encadré) déterminent l'état de chaque cellule au prochain tour à partir de l'état actuel des 8 cellules voisines qui l'entourent. Le jeu consiste à suivre l'évolution dans le temps de cet ensemble de cellules.

Des structures étonnantes

Le choix des règles du Jeu de la vie, malgré leur simplicité, a demandé une longue période de réflexion, d'essai et d'ajustement à John Conway. Il cherchait à ce qu'elles réalisent les trois objectifs suivants : 1) permettre que des configurations initiales simples puissent se développer et changer sur plusieurs tours avant de se stabiliser, de disparaître complètement ou d'osciller; 2) faire voir que des configurations semblent se développer sans limite; 3) rendre impossible la preuve simple de la croissance infinie d'une configuration initiale.


Et en effet, selon la configuration initiale, on peut voir apparaître des figures d'une grande diversité. On note d'abord des structures stables, qui ne changent pas d'une itération à l'autre, comme celles-ci :




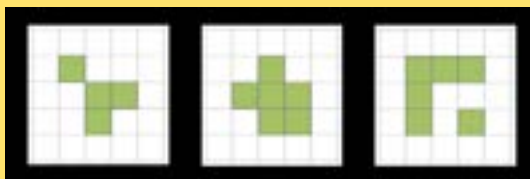
Il y a aussi des structures oscillant entre deux ou plusieurs états, comme celle-ci :



Règles du Jeu de la vie

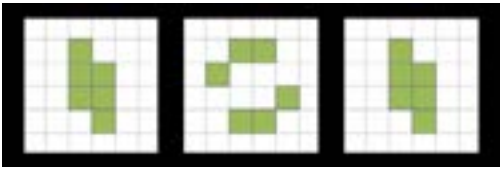
Pour une cellule qui est vivante  : si 2 ou 3 de ses cellules voisines sont aussi vivantes, elle continue de vivre au prochain tour; sinon elle meurt.

Pour une cellule qui est morte  : si exactement 3 de ses cellules voisines sont vivantes, elle devient vivante au prochain tour; sinon elle reste morte.



La séquence d'images de cet encadré illustre le résultat de l'application des règles pour les deux tours suivant l'état associé à la première image, où seules quatre cellules étaient vivantes.

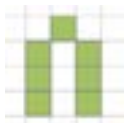
ou celle-là :



On observe aussi des structures oscillantes qui semblent se déplacer, comme si elles rampaient :



Le développement de la structure ci-haut a une période de 4 temps, au bout desquels elle reprend sa forme initiale mais décalée d'une case à droite et d'une case en bas, par une translation de $(+1, -1)$. À condition que d'autres structures ne viennent pas la déranger dans son parcours, elle peut ainsi se maintenir et se déplacer à l'infini. On appelle « vaisseaux » de telles structures.



D'autres configurations initiales très simples, comme celle ci-dessus (en $t=0$), peuvent donner lieu à des développements élaborés où les cellules vivantes paraissent vouloir se multiplier à l'infini (comme ici en $t=80$, où l'on peut apprécier le maintien de la symétrie) :



De tels développements finissent typiquement par se réduire à une configuration réduite, stable ou oscillante, après parfois des centaines ou des milliers d'itérations. John Conway formula la conjecture qu'aucune structure ne pouvait croître indéfiniment et offrit un prix de 50 \$ à qui pourrait prouver ou invalider cette conjecture avant la fin

de 1970. Le prix fut accordé en novembre 1970 à une équipe du MIT qui avait élaboré une structure produisant toutes les 30 itérations un nouveau vaisseau sans menaces extérieures, offrant ainsi à la fois une croissance infinie et une preuve simple de cette propriété.

Un jeu ?

S'agit-il vraiment d'un jeu ? Conway aimait dire que le Jeu de la vie était un jeu à zéro joueur, puisqu'une fois précisée la configuration initiale des cellules vivantes, il n'y a plus aucune décision à prendre. Comme il suffit d'appliquer les mêmes règles simples à répétition et comme ces règles ne font pas intervenir le hasard, le déroulement d'une partie est entièrement déterministe. Cela ne veut pas dire pour autant qu'on puisse en deviner facilement l'évolution. Et c'est ce que recherchait Conway : que du déterminisme des règles émerge l'incertitude du résultat, que de la simplicité émerge une certaine complexité.

En jouant avec différentes configurations initiales, on peut observer comment prennent forme des structures croissantes, décroissantes ou périodiques. On peut aussi apprécier l'effet majeur de changements en apparence mineurs. On peut chercher à créer le plus long développement avant stabilisation ou oscillation. Si John Conway avait initialement exploré à la main ces différentes possibilités, muni d'un simple jeu de go (une planche de bois quadrillée et des jetons), il est évidemment beaucoup plus rapide et efficace d'utiliser l'un des environnements informatiques¹¹ qui depuis ont été développés à cette fin. Des communautés se sont bâties pour poursuivre les explorations, et même l'intelligence artificielle est maintenant mise à contribution par certains.

Finalement, on peut aussi jouer à programmer soi-même le Jeu de la vie (voir l'encadré). C'est un problème parfait pour jouer avec les boucles : dans le temps, pour chacun des tableaux successifs, et dans l'espace pour parcourir l'ensemble des cellules. Il faut aussi garder en mémoire au moins deux versions du tableau, celle de l'état actuel des cellules et celle de leur état au prochain tour, car la

1. Voir playgameoflife.com ou conwaylife.com.



John Horton Conway

Né en 1937 à Liverpool (R-U), John Conway s'est intéressé très tôt aux mathématiques. Cela l'a conduit à poursuivre des études dans cette discipline à Cambridge, au premier cycle et au doctorat. Adeptes du backgammon, il développe un intérêt pour la théorie des jeux.

Devenu professeur à Cambridge en 1964, puis à Princeton en 1986, il contribuera à plusieurs domaines : géométrie, algèbre, théorie des groupes, théorie des nombres, théorie des jeux, topologie et même physique théorique.

Avec la grande popularité que connut son Jeu de la vie, il en vint à en vouloir à ce jeu simple de prendre toute la place dans ce que l'on semblait retenir de ses contributions. Avec le temps, il s'est réconcilié avec sa création, reconnaissant volontiers qu'il s'agissait d'une réalisation notable dont il pouvait être fier.

En avril 2020, il est décédé de complications liées à la COVID-19.

mise à jour des états doit se faire en même temps pour toutes les cellules. Et quand le programme finit par fonctionner, on a vraiment le sentiment d'avoir gagné !

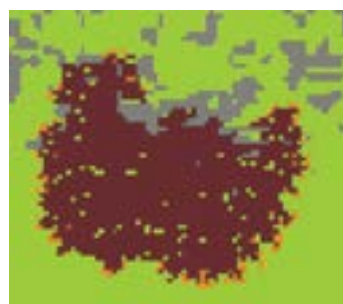
Un modèle de la vie ?

Le *Jeu de la vie* permet-il de simuler la vie ? Il est sûr qu'il n'en reflète pas la complexité, qu'on se situe au niveau des cellules, d'un organisme vivant ou d'un écosystème. Cela dit, peut-il, dans toute sa simplicité, constituer un modèle pour décrire ou expliquer en partie comment la vie se propage, se maintient et s'éteint ?

Les cellules du jeu ne correspondent pas strictement à des cellules biologiques; on doit plutôt les comprendre comme des entités ou des zones qui peuvent accueillir la vie, la favoriser, ou la menacer. On peut en effet voir dans les règles du jeu le respect de

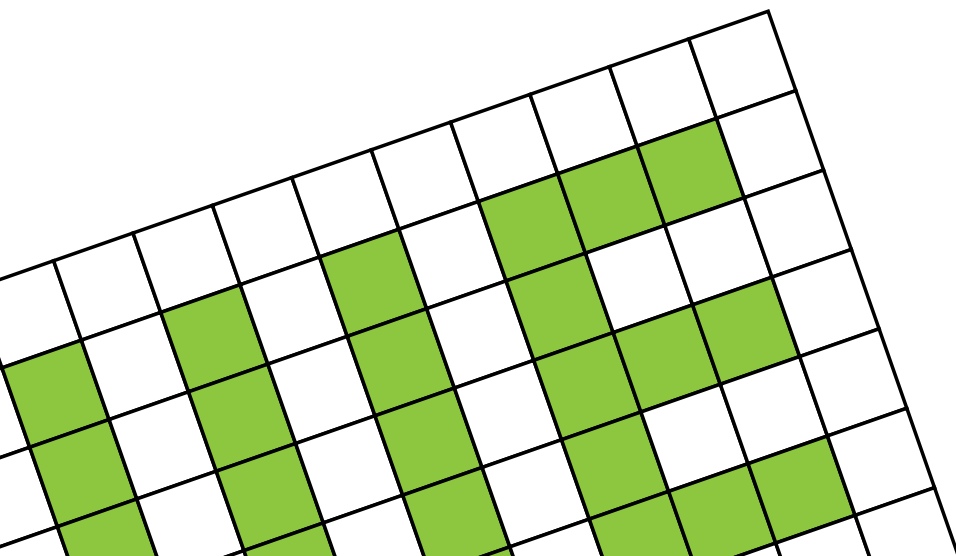
certains principes écologiques qui régulent l'évolution des populations. Le fait qu'une cellule meure si elle est entourée de moins de deux cellules vivantes est une illustration de la nécessité de soutien d'autrui pour survivre. Le fait qu'une cellule meure tout autant s'il y a plus de trois cellules vivantes qui gravitent autour d'elle reflète les dangers associés à une surpopulation. Le fait que les conditions soient encore plus sévères pour qu'une nouvelle vie émerge témoigne de la grande sensibilité de la reproduction aux conditions ambiantes.

Le Jeu de la vie est en fait un cas particulier d'*automate cellulaire*, un concept imaginé par le mathématicien et physicien John von Neumann pour modéliser et simuler sur une simple grille un processus d'autoreproduction. En se permettant un plus grand nombre d'états possibles pour les cellules, voire même en utilisant une variable continue pour les décrire, et en se dotant de règles différentes pour faire intervenir les cellules voisines, on peut construire des automates cellulaires pour modéliser et simuler un large éventail de phénomènes qui ne se limitent pas au domaine du vivant: croissance de cristaux, progression d'épidémies ou de feux de forêt (image² ci-dessous), urbanisation, propagation de la chaleur, de gaz ou d'opinions politiques, etc.



En fonction des besoins, on peut se doter de paramètres et de variables aléatoires pour définir les règles; on peut insuffler une direction privilégiée de propagation en accordant plus de poids à certains voisins

2. Image tirée de *A Cellular Automata Model for Fire Spreading Prediction*, Quartieri et al., 2010.



qu'à d'autres; on peut même envisager un automate tridimensionnel où chaque cellule cubique est entourée de 26 ($=3^3 - 1$) voisins.

Qu'en retenir ?

Le Jeu de la vie peut d'abord être vu comme un objet ludique offrant le plaisir de l'exploration et de la découverte.

C'est aussi un formidable rappel qu'un système constitué de plusieurs éléments qui s'influencent mutuellement peut donner lieu

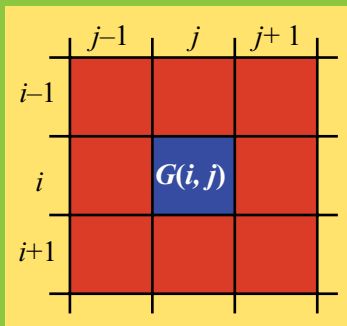
à long terme à des résultats difficilement prévisibles. Et cela, même si les règles d'interaction sont simples et connues. C'est l'une des grandes idées à la base de l'étude des systèmes dynamiques complexes.

Finalement, partir de ce jeu pour découvrir d'autres automates cellulaires peut étendre les possibilités de modélisation qu'on envisage. Cela peut même conduire à revoir la frontière perçue entre le continu et le discret.

Programmer le Jeu de la vie

Il est facile de trouver des vidéos en ligne qui montrent dans le détail des programmes du Jeu de la vie (Conway's Game of Life) dans différents langages : python, p5, Excel VBA, ... Nous nous contenterons ici de donner les grandes lignes d'un algorithme qui peut guider la définition d'un tel programme.

Commençons par réduire la grille infinie à un tableau G de dimension $n \times n$, qu'on peut encadrer d'une bordure de cellules à l'état fixe aux lignes et colonnes 0 et $n+1$ pour faire en sorte que chaque cellule $G(i, j)$ ait 8 voisines. (Une autre façon de faire consiste à considérer voisines les cellules aux deux extrémités d'une même ligne ou d'une même colonne, comme dans un jeu de pacman!)



Considérons à présent que chaque entrée $G(i, j)$ du tableau G a la valeur 1 si elle est vivante et 0 si elle ne l'est pas. Pour une cellule de la grille d'indices (i, j) le nombre de cellules vivantes parmi ses voisines immédiates (nV) sera donc la somme des $G(k, l)$ l'entourant. On peut définir cette somme de la façon suivante :

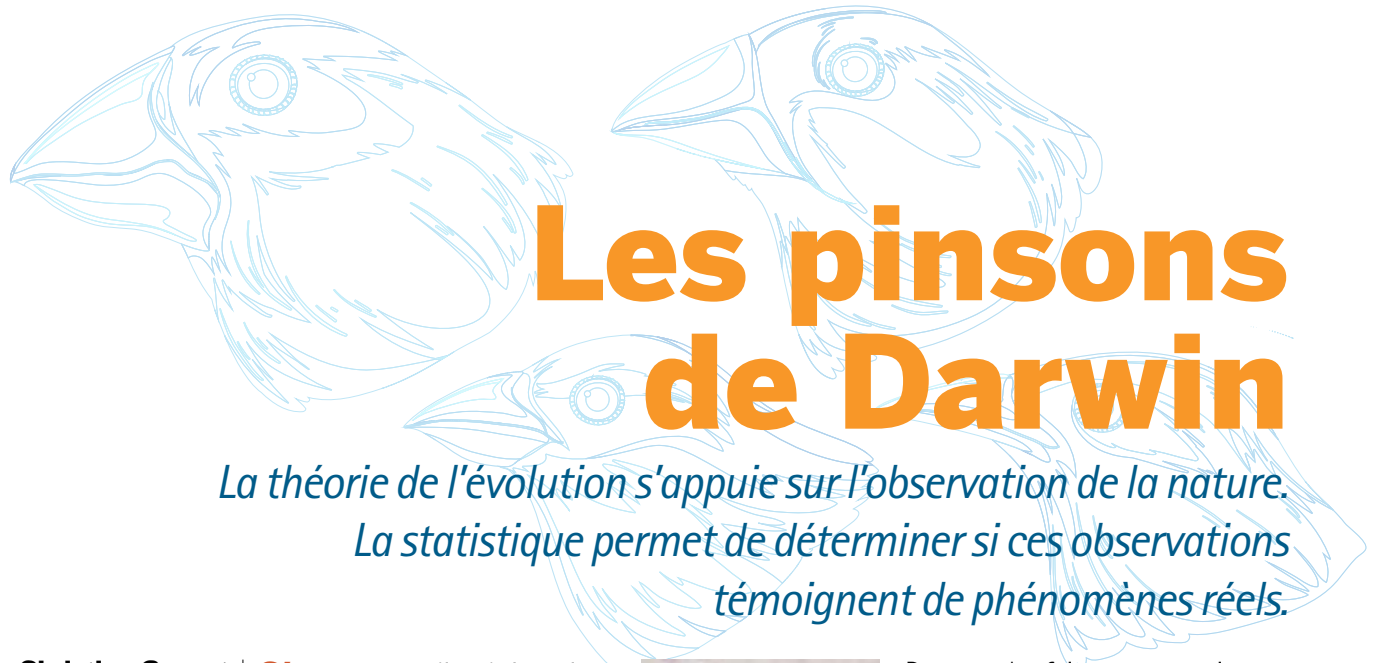
$$nV = \left(\sum_{k=i-1}^{i+1} \sum_{l=j-1}^{j+1} G(k, l) \right) - G(i, j)$$

En notant respectivement G_A et G_P la version actuelle du tableau G et sa version au prochain tour, le cœur de l'algorithme responsable de l'évolution de ces deux tableaux peut s'écrire, en pseudocode commenté :

```

Lire  $G_P$  * Entrée de la configuration initiale
Pour  $t = 0 \dots t_{\max}$  * Pour chaque nouveau tour,
   $G_A \leftarrow G_P$  * le futur devient actuel
  Pour  $i = 1 \dots n$ 
    Pour  $j = 1 \dots n$  * Pour chacune des cellules
       $nV \leftarrow 0$ 
      Pour  $k = i - 1 \dots i + 1$  * on parcourt
        Pour  $l = j - 1 \dots j + 1$  * ses voisines
           $nV \leftarrow nV + G_A(k, l)$  * on compte les vivantes
       $nV \leftarrow nV - G_A(i, j)$  * sauf la cellule au centre
      Si  $G_A(i, j) = 1$  * si la cellule est vivante
        Si ( $nV = 2$  ou  $nV = 3$ ) * et bien entourée
           $G_P(i, j) \leftarrow 1$  * la cellule restera vivante
        Sinon
           $G_P(i, j) \leftarrow 0$  * la cellule mourra
      Sinon * la cellule est morte
        Si  $nV = 3$  * si elle est très bien entourée
           $G_P(i, j) \leftarrow 1$  * la cellule revivra
        Sinon
           $G_P(i, j) \leftarrow 0$  * la cellule restera morte
  
```

À cela s'ajoute évidemment la programmation des aspects graphiques pour rendre bien vivante la version qu'on se crée du Jeu de la vie.



Les pinsons de Darwin

La théorie de l'évolution s'appuie sur l'observation de la nature.
La statistique permet de déterminer si ces observations témoignent de phénomènes réels.

Christian Genest
Université McGill

Louis-Paul Rivest
Université Laval

C'est au naturaliste britannique Charles Darwin (1809-1882) que nous devons la théorie de l'évolution selon laquelle les espèces vivantes sont en perpétuelle transformation morphologique et génétique. Cette théorie, aujourd'hui largement admise, allait à l'encontre des dogmes religieux du 19^e siècle et il fallut à Darwin plus de vingt ans de travaux pour bâtir son argumentaire et convaincre ses contemporains du bien-fondé de cette thèse par le truchement de son monumental ouvrage, *L'origine des espèces*, paru en 1859.

Selon cette théorie, différents phénomènes, dont la sélection naturelle, font en sorte que les individus les mieux adaptés à leur environnement se reproduisent davantage que les autres, ce qui conduit à terme à l'apparition ou à la disparition de certaines espèces. Darwin conçut cette théorie à la suite des travaux d'observation géologiques et zoologiques qu'il réalisa entre 1831 et 1836 au cours de trois voyages d'exploration en Amérique du Sud et dans l'océan Indien à bord du navire *HMS Beagle*.

Sur les îles Galápagos, Darwin observa la présence d'une douzaine d'espèces d'oiseaux apparentés mais présentant des particularités quant à leur comportement, leur chant, et surtout la taille et la forme de leur bec. Une fois rentré en Angleterre, il montra ses spécimens au célèbre ornithologue John Gould (1804-1881), qui conclut que malgré leurs différences morphologiques, ces espèces appartenaient toutes aux genres *Geospiza* et *Camarhynchus*. Il s'agissait dans tous les cas de passereaux, communément appelés pinsons.



Geospiza magnirostris (1)¹



Geospiza fortis (2)

Partant du fait que ces pinsons n'étaient pas répartis uniformément sur les îles de l'archipel, Darwin en conclut que l'isolement géographique, la diversité des habitats et des sources d'alimentation avaient conduit à la création d'espèces distinctes issues d'ancêtres communs. Ce phénomène dit de spéciation, manifeste dans la morphologie du bec des pinsons des Galápagos, nourrit les réflexions de Darwin sur l'évolution des espèces et la sélection naturelle en réponse à des changements environnementaux.

Depuis ce temps, de nombreux autres exemples de spéciation sont venus confirmer la théorie de Darwin. Dans un ouvrage de vulgarisation intitulé « *The Beak of the Finch* » qui lui a valu le prix Pulitzer en 1994, l'écrivain américain Jonathan Weiner a notamment décrit les travaux réalisés subséquentement par les biologistes britanniques Peter et Rosemary Grant, qui ont mis en évidence certaines évolutions de ces espèces.

Répartition des pinsons sur les îles

À la base, la théorie de Darwin repose sur l'observation que les 13 espèces de pinsons des îles Galápagos ne sont pas réparties au hasard dans l'archipel. Le tableau 1 témoigne de ce fait. Douze espèces de pinsons et 17 îles de l'archipel y figurent. La 13^e espèce, présente partout, a été exclue par souci d'économie.

1. Sources : la Fondation Charles Darwin, Ebird et Flickr

Espèces	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	Total
1 : <i>G. magnirostris</i>	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	14
2 : <i>G. fortis</i>	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	13
3 : <i>G. fuliginosa</i>	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	14
4 : <i>G. difficilis</i>	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	10
5 : <i>G. scandens</i>	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	12
6 : <i>G. conirostris</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	2
7 : <i>C. psittacula</i>	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	10
8 : <i>C. pauper</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
9 : <i>C. parvulus</i>	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	10
10 : <i>C. crassirostris</i>	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	11
11 : <i>C. pallidus</i>	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	6
12 : <i>C. heliobates</i>	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
Total	3	3	10	9	9	7	8	9	7	8	3	8	3	6	8	2	2	105

Tableau 1.

Présence (1) ou absence (0) de 12 espèces de pinsons sur 17 îles de l'archipel des Galápagos. Les 17 îles répertoriées sont les suivantes : A = Seymour, B = Baltra, C = Isabela, D = Fernandina, E = Santiago, F = Rábida, G = Pinzón, H = Santa Cruz, I = Santa Fe, J = San Cristóbal, K = Española, L = Floreana, M = Genovesa, N = Marchena, O = Pinta, P = Darwin, Q = Wolf.

En termes mathématiques, le tableau 1 est une matrice X à double entrée dont l'élément X_{ij} , situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j , est tel que $X_{ij} = 1$ si l'espèce de pinson i est présente sur l'île j et $X_{ij} = 0$ sinon. On remarque que certaines espèces sont présentes sur plusieurs îles et d'autres non. Par exemple, l'espèce #1 se retrouve sur 14 îles et l'espèce #12 sur à peine deux d'entre elles.

Par ailleurs, on constate que certaines espèces ont tendance à cohabiter, tandis que d'autres pas, comme le montre le tableau 2 des « co-occurrences » entre les espèces. Ce tableau n'est autre que le produit $S = XX^T$ de la matrice X par sa transposée X^T . L'élément S_{ij} , situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j de la matrice S représente le nombre d'îles où les espèces i et j cohabitent. Cette matrice est forcément symétrique et l'élément S_{ii} représente le nombre d'îles sur lesquelles vit l'espèce $i \in \{1, \dots, 12\}$.

À titre d'exemple, l'espèce #2 habite sur 13 îles. L'espèce #1 est aussi présente sur 11 d'entre elles mais l'espèce #6 sur aucune d'elles. Autrement dit, on a $S_{21} = 11$ et $S_{26} = 0$. Ces observations pourraient-elles n'être que le fruit du hasard ou, au contraire, témoignent-elles de réels phénomènes biologiques ou comportementaux? La question mérite réflexion car il serait hasardeux de chercher une explication, voire d'échafauder une théorie, sur de simples coïncidences. C'est ici que la statistique « vole » à la ressource, pour ainsi dire.

Espèces	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	14	11	11	10	10	1	10	0	10	11	6	2
2	11	13	13	7	12	0	10	0	10	11	6	2
3	11	13	14	7	12	1	10	1	10	11	6	2
4	10	7	7	10	6	1	6	0	7	7	5	2
5	10	12	12	6	12	0	9	0	9	10	5	1
6	1	0	1	1	0	2	0	1	0	0	0	0
7	10	10	10	6	9	0	10	0	9	10	5	2
8	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
9	10	10	10	7	9	0	9	0	10	10	6	2
10	11	11	11	7	10	0	10	0	10	11	6	2
11	6	6	6	5	5	0	5	0	6	6	6	2
12	2	2	2	2	1	0	2	0	2	2	2	2

Tableau 2.

Matrice S des co-occurrences (et totaux par espèce sur la diagonale).

Le test exact de Fisher

Supposons que l'espèce i soit présente sur m îles et qu'une autre espèce j soit présente sur n îles. Supposons en outre qu'il y ait $S_{ij} = x$ îles où les deux espèces sont présentes. Pour évaluer si la valeur de x sort de l'ordinaire ou non (et donc si cette observation mérite que l'on s'y arrête), le test exact de Fisher procède en deux étapes, comme suit :

1. Énumérer les valeurs possibles de x et en déterminer les probabilités sous l'hypothèse que c'est par pur hasard que les deux espèces ont choisi les îles où elles sont établies.
2. Pour juger si la valeur observée x témoigne ou non d'une tendance à cohabiter, calculer la probabilité $\Pr(X \geq x)$ d'observer par hasard une valeur au moins aussi grande que x .



Geospiza fuliginosa (3)



Geospiza difficilis (4)



Geospiza scandens (5)



Geospiza conirostris (6)



Camarhynchus psittacula (7)



Camarhynchus pauper (8)



Camarhynchus parvulus (9)

Considérons par exemple le cas des espèces $i = 1$ et $j = 2$. Le tableau 2 nous révèle que l'espèce #1 est présente sur $m = 14$ îles et l'espèce #2 sur $n = 13$ îles. De plus, elles coexistent sur $x = 11$ îles. Si les espèces ont choisi les îles où elles habitent par pur hasard, alors il y a

$$a) (17 \times 16 \times 15) / (3 \times 2 \times 1) = 680 \text{ façons de choisir } m = 14 \text{ îles pour l'espèce } j;$$

$$b) (17 \times 16 \times 15 \times 14) / (4 \times 3 \times 2 \times 1) = 2380 \text{ façons de choisir } n = 13 \text{ îles pour l'espèce } j.$$

Il y a donc au total $680 \times 2380 = 1\,618\,400$ façons possibles de remplir les deux premières lignes du tableau 1 et elles sont toutes équiprobables si les espèces se répartissent au hasard. Chacune d'entre elles conduit à une valeur de x . En compilant les résultats, on aboutit au tableau 3.

Valeur de x	10	11	12	13
Fréquence	680 680	742 560	185 640	9 520
Pourcentage	42,06 %	45,88 %	11,47 %	0,59 %

Tableau 3.
Valeurs et fréquences du nombre x de co-occurrences des espèces $i = 1$ et $j = 2$ sous le postulat d'équiprobabilité. Les pourcentages sont calculés en fonction du total, soit 1 618 400.

Puisque la valeur observée est $x = 11$, on trouve

$$\Pr(X \geq x) = 937\,720 / 1\,618\,400 \approx 0,579,$$

ce qui constitue le seuil observé du test. Cette valeur étant assez élevée, il n'est pas exclu que ces 11 co-occurrences soient attribuables au hasard. Autrement dit, on ne peut pas se baser sur cette observation pour élaborer une théorie.

On peut répéter l'exercice pour d'autres paires d'espèces et donc faire au total $(12 \times 11) / 2 = 66$ tests différents, dont les seuils observés sont donnés dans la partie triangulaire supérieure du tableau 4. Dans ce tableau, l'entrée $p_{ij} = \Pr(X \geq S_{ij})$ représente le seuil observé du test exact de Fisher pour les espèces $i < j$. On a par exemple $p_{12} = 0,579$, tel que calculé plus haut.

Heureusement, la combinatoire permet de simplifier les calculs. En effet, quelles que soient les m îles choisies par la première espèce, il y aura x co-occurrences si la seconde espèce choisit au hasard x îles parmi les m déjà identifiées par la première espèce et $n - x$ îles parmi les autres. Ceci n'est possible que pour les valeurs entières de x telles que $x \leq \min(m, n)$ et $n - x \leq 17 - m$. Pour chaque telle valeur de x , on trouve alors

$$\Pr(X = x) = \frac{\binom{m}{x} \binom{17-m}{n-x}}{\binom{17}{n}},$$

$$\text{où } \binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$$

dénote le coefficient binomial. Cette équation permet de calculer relativement facilement le seuil observé $\Pr(X \geq S_{ij})$ pour chaque paire (i, j) d'espèces.

En consultant le tableau 4, on constate que certains seuils observés sont très petits. Par exemple, on trouve $p_{25} = 0,002$, ce qui suggère que les espèces #2 et #5 ont véritablement tendance à cohabiter. Il appert aussi que les espèces #7, 9 et 10 occupent la même niche écologique (puisque les seuils observés

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1		0,579	1	0,051	0,676	0,978	0,051	1	0,051	0,029	0,243	0,669
2	0,879		0,006	0,912	0,002	1	0,015	1	0,015	0,006	0,139	0,574
3	0,535	1		1	0,015	0,978	0,051	0,824	0,051	0,029	0,243	0,669
4	1	0,441	0,176		0,959	0,846	0,646	1	0,268	0,484	0,16	0,331
5	0,809	1	1	0,278		1	0,06	1	0,06	0,028	0,395	0,926
6	0,331	0,044	0,331	0,669	0,074		1	0,118	1	1	1	1
7	1	1	1	0,732	0,997	0,154		1	0,004	0,001	0,16	0,331
8	0,176	0,235	1	0,412	0,294	1	0,412		1	1	1	1
9	1	1	1	0,948	0,997	0,154	1	0,412		0,001	0,017	0,331
10	1	1	1	0,855	0,999	0,11	1	0,353	1		0,037	0,404
11	1	1	1	0,983	0,925	0,404	0,983	0,647	1	1		0,11
12	1	1	1	1	0,515	0,772	1	0,882	1	1	1	

Tableau 4.
Matrice des seuils observés des tests exacts de Fisher unilatéraux. Au-dessus de la diagonale se trouvent les seuils des tests d'association positive entre les espèces; sous la diagonale se trouvent les résultats des tests d'association négative.

sont aussi petits). Il vaudrait donc la peine qu'un.e biologiste se penche sur la question et cherche les causes de ce phénomène, lequel ne semble pas relever du hasard.

Quant aux valeurs rapportées sous la diagonale principale du tableau 4, ce sont celles des probabilités $p_{ij} = \Pr(X \leq S_{ij})$ pour toute paire d'espèces $i > j$. De très petits seuils observés permettraient de conclure que les espèces correspondantes cherchent à s'éviter. Cela ne semble pas être le cas, puisque la plus petite valeur observée, $p_{62} = 0,044$, n'est pas significative.

Comparaisons multiples

Bien que la méthodologie associée au test de Fisher soit irréprochable et éprouvée, le fait de l'utiliser à répétition sur le même échantillon peut conduire à l'identification de « faux positifs ». Pour illustrer ce problème, supposons qu'un.e chercheur.e juge un résultat significatif au seuil de 1%, c'est-à-dire si la valeur x prise par la variable X est telle que $\Pr(X \geq x) = 0,01$. Ce choix est raisonnable car il n'y a alors que 1% des chances de conclure à tort à la présence d'un signal.

Or si on répétait la procédure k fois sur des échantillons indépendants, la probabilité qu'au moins une des 100 valeurs observées de X soit supérieure à x par hasard serait alors $q = 1 - (0,99)^k$. Quand $k = 5$, on trouve $q \approx 0,049$ et quand $k = 66$, alors $q \approx 0,485$. Plus le nombre de tests augmente, plus la probabilité d'obtenir au moins un faux positif devient grande.

Dans le cas des pinsons des îles Galápagos, la situation est aussi compliquée par le fait que les 66 tests possibles doivent tous être effectués sur le même échantillon. Avant de procéder à des comparaisons par paire, il importe donc de réaliser à prime abord un test global, c'est-à-dire qui tienne compte simultanément des 12 espèces et de leurs co-occurrences sur les 17 îles.

Un test global d'association

À partir du moment où l'on veut comparer plus de deux espèces, il est plus commode de raisonner en termes de co-occurrences négatives. Une telle co-occurrence se produit entre deux espèces i et j chaque fois qu'il existe deux îles U et V telles que i est présente sur U et pas sur V tandis que j est présente sur V mais pas sur U .

Considérons par exemple les espèces $i = 1$ et $j = 2$. En se référant au tableau 1, on doit donc chercher tous les patrons du type

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où les deux colonnes correspondent aux choix possibles d'ensembles d'îles $\{U, V\}$. Comme il y a 17 îles, il y a en principe $17 \times 16 / 2 = 136$ comparaisons à faire, mais à peine 6 d'entre elles révèlent une co-occurrence négative entre ces deux espèces. Les ensembles d'îles correspondants sont $\{A, M\}$, $\{A, P\}$, $\{A, Q\}$, $\{B, M\}$, $\{B, P\}$ et $\{B, Q\}$.

Il se trouve en fait que le nombre de co-occurrences négatives entre deux espèces i et j se déduit facilement du tableau 2. En effet, il est tout simplement donné par le produit

$$C_{ij} = (S_{ii} - S_{ij}) \times (S_{jj} - S_{ij}).$$

Dans notre exemple, on a $S_{ii} = 14$, $S_{jj} = 13$ et $S_{ij} = 11$, d'où $C_{ij} = 3 \times 2 = 6$.

Motivés par cette observation, le zoologiste israélien Lewi Stone et l'environnementaliste australien Alan Roberts ont proposé en 1990 de faire tout simplement la moyenne de toutes les valeurs C_{ij} obtenues en faisant varier i et j systématiquement dans l'ensemble $\{1, \dots, r\}$ des r espèces. Leur statistique, appelée C -score, s'exprime donc comme suit :

$$C = \frac{1}{\binom{r}{2}} \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r C_{ij}.$$



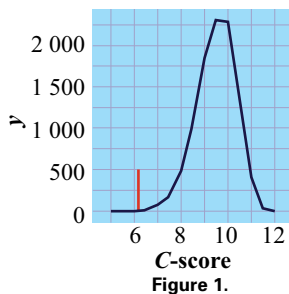
Camarhynchus crassirostris (10)



Camarhynchus pallidus (11)



Camarhynchus heliobates (12)



Polygone de fréquences de la statistique C simulée 10 000 fois et, en rouge, valeur de cette statistique pour les données du tableau 1.

Ainsi, plus la valeur de C est grande, plus il y a présence d'association négative entre les espèces.

Pour les pinsons des îles Galápagos, on trouve $C \approx 6,22$. Pour déterminer si cette valeur est révélatrice ou non d'une association négative entre les espèces, on procède alors selon la même logique que pour le test de Fisher. Autrement dit, il faut :

1. Énumérer les valeurs possibles de C et en déterminer les probabilités sous l'hypothèse que c'est par pur hasard que les r espèces ont choisi les îles où elles sont établies.
2. Pour juger si la valeur observée c témoigne ou non d'une tendance à cohabiter, calculer la probabilité $\Pr(C \leq c)$ d'observer par hasard une valeur au moins aussi petite que c .

Comme on l'a déjà vu, il y a $680 \times 2380 = 1\,618\,400$ façons possibles de remplir les deux premières lignes du tableau 1. Il y a aussi 680 façons de remplir la 3^e ligne, 19 448 façons de remplir la 4^e ligne, etc. Au total, il y aurait donc plus de $2,4 \times 10^{39}$ cas à énumérer pour pouvoir calculer la loi exacte de la statistique C sous l'hypothèse que les 12 espèces sont distribuées au hasard.

Malheureusement, cette tâche est hors de portée avec les moyens de calcul actuels. On procède donc plutôt par simulation, en générant au hasard un grand nombre de matrices, disons 10 000, sous l'hypothèse de répartition aléatoire des espèces. On calcule alors les 10 000 valeurs correspondantes de la statistique C , ce qui conduit à un polygone de fréquences, comme celui de la figure 1.

Cette figure montre que les 10 000 valeurs de la statistique C simulées à partir des totaux lignes du tableau 1 varient entre 6 et 12. Il se trouve qu'à peine 4 des 10 000 valeurs simulées sont plus petites que la valeur observée, soit $C \approx 6,22$. Comme la valeur calculée sur les données est beaucoup plus petite que la vaste majorité de celles obtenues en simulant sous le modèle d'indépendance, on conclut, comme précédemment, qu'il existe des associations positives entre certaines espèces.

Prise en compte de la taille des îles

Bien que l'analyse statistique présentée ci-dessus soit parfaitement rigoureuse au plan mathématique, elle n'est pas exempte de critique. En effet, si on jette un coup d'œil à la carte des îles Galápagos représentée à la figure 2, on se rend vite compte que certaines îles sont beaucoup plus grandes que les autres. Par exemple, Isabela (C) a une superficie de plus de 4500 km², alors que Pinta (O) en fait à peu près 60.



Figure 2.

Carte Google Maps de l'archipel des îles Galápagos.

L'île Isabela, la plus vaste, se trouve à quelque 1 102 km à l'ouest des côtes équatoriales. Une distance de 929 km sépare le continent de la plus orientale des îles, San Cristóbal. L'archipel se compose d'une quarantaine d'îles volcaniques formant une province de l'Équateur depuis 1832 avec Puerto Baquerizo Moreno pour capitale. Il accueille le parc national des Galápagos et la réserve marine des Galápagos qui constituent un site du patrimoine mondial de l'Unesco.

On s'attend donc à retrouver plus d'espèces sur les grandes îles que sur les petites, et c'est effectivement ce que l'on constate au tableau 1. Or, ni le test exact de Fisher ni celui de Stone et Roberts ne tient compte de ce facteur. Alors que le nombre total d'espèces par île varie de 2 à 10, moins de 3% des 10 000 matrices 12×17 simulées aléatoirement reflétaient une telle étendue. L'analyse précédente doit donc être nuancée, puisqu'elle ne reproduit pas les conditions dans lesquelles les pinsons ont été observés sur les îles Galápagos.

Est-il possible de réaliser une analyse qui tienne compte des tailles très variables des îles? La réponse à cette question est oui. Il suffit pour cela de comparer la valeur observée de la statistique C à sa distribution sur l'ensemble des matrices 12×17 dans lesquelles les 0 et les 1 sont placés au hasard, mais de telle sorte que les totaux de lignes et de colonnes soient les mêmes que ceux observés dans le tableau 1. On peut aussi faire de même pour toute statistique de la forme S_{ij} , où $i < j$, et ainsi réaliser $r(r-1)/2$ tests exacts à totaux de lignes et de colonnes fixés.

Sauf dans des cas triviaux, on ne dispose pas d'une formule simple pour le calcul du nombre de tableaux $r \times s$ dont les totaux des lignes et des colonnes sont fixés. On peut toutefois générer de telles matrices aléatoirement à l'aide de méthodes dites MCMC fondées sur des chaînes de Markov Monte-Carlo. Un tel algorithme s'appuie sur une méthode de permutation proposée par les statisticiens britanniques Julian Besag et Peter Clifford.

Les analyses précédentes ont donc été refaites avec une méthode de simulation des matrices de présences-absences qui préservent les totaux des lignes et des colonnes du tableau 1. Ceci permet de révéler la présence d'associations négatives significatives entre certaines espèces. La plus marquée se produit entre les espèces #2 (*G. fortis*, à bec moyen) et #6 (*G. conirostris*, à bec conique). La première est présente sur 13 îles et la seconde sur deux îles. Cependant, on ne les trouve jamais sur la même île. Alors que le seuil observé du test d'association négative entre ces deux espèces était de 4,4% au tableau 4, il chute à 0,4% si on tient compte de la taille des îles.

Dans un article paru en 1973, l'ornithologue britannique Mike Harris (décédé tout récemment à l'âge de 84 ans) discute des co-occurrences et suggère que cette association négative est liée à la forme du bec des deux espèces. L'espèce #6, à bec conique, est spécialisée. Son bec long lui permet de s'alimenter sur les îles Española et Genovesa, qui sont relativement petites et arides (voir figure 2). En revanche, la diversité des sources d'alimentation sur les autres îles favorise l'espèce #2, le pinson à bec moyen, qui est plus polyvalent.

Conclusion

Les méthodes statistiques présentées ici permettent à la fois de confirmer des observations de terrain et de mettre en lumière certains phénomènes sur lesquels les biologistes peuvent alors se pencher pour formuler des conjectures, confirmer des hypothèses ou simplement approfondir nos connaissances sur l'évolution des espèces et la spéciation.

Au plan strictement mathématique, ces méthodes posent aussi des défis intéressants, dont celui d'énumérer toutes les matrices 0-1 à totaux de lignes et de colonnes fixés. Il reste aussi beaucoup de travail à faire pour améliorer l'efficacité des algorithmes utilisés pour générer de telles matrices et étudier leurs propriétés.



Charles Robert Darwin

Né le 12 février 1809 à Shrewsbury et mort le 19 avril 1882 à Downe, Darwin est un naturaliste et paléontologue britannique. Son ouvrage *L'Origine des espèces* paru en 1859, qui porte sur l'évolution des espèces vivantes, a changé notre perception du monde.

Un monde mathématique immobile

Rubrique des Paradoxes

Jean-Paul Delahaye
Université des Sciences
et Technologies de Lille

Le principe de récurrence est l'un des outils les plus puissants du raisonnement mathématique. Il consiste, pour établir une propriété générale du type « pour tout n , $P(n)$ », à prouver deux affirmations :

- (i) $P(0)$ est vrai
- (ii) si $P(n)$ est vrai pour $n=0, 1, \dots, k$, alors $P(k+1)$ est vrai.

Dans un raisonnement par récurrence, malheureusement l'intuition est un peu perdue, aussi des erreurs deviennent possibles. Voici un exemple de raisonnement par récurrence conduisant à une absurdité.

Nous allons démontrer qu'en mathématiques rien ne bouge, plus précisément, nous allons établir que toutes les fonctions $x \rightarrow x^n$ (n un entier fixé) sont des fonctions constantes.

- i) C'est vrai pour $n=0$ car $x^0 = 1$ (par convention) et que la dérivée d'une constante est la fonction nulle.
- ii) Supposons que c'est vrai pour $n=0, 1, \dots, k$, c'est-à-dire que la dérivée de la fonction $x \rightarrow x^n$ est nulle :

$$(x^n)' = 0 \text{ pour } n=0, 1, \dots, k.$$

Utilisons maintenant la formule de dérivation d'un produit $(uv)' = u'v + uv'$. On a :

$$(x^{k+1})' = (x \cdot x^k)' = x' \cdot x^k + x \cdot (x^k)'$$

On obtient 0 car, d'après l'hypothèse de récurrence, on a $x' = (x^1)' = 0$ (on utilise l'hypothèse avec $n=1$) et $(x^k)' = 0$ (on utilise l'hypothèse avec $n=k$).

Nous avons donc $(x^{k+1})' = 0$, ce que nous souhaitons. Qu'est-ce qui cloche ?

Solution du paradoxe précédent

Le dé le plus fort

Si l'on admet que les organisateurs des jeux de Loto ne trichent pas, alors toutes les grilles ont la même probabilité d'être tirées et cela à chaque tirage qui sera indépendant des précédents. En particulier, il est inutile de noter les numéros déjà tombés lors des tirages passés et de les éviter (si l'on pense qu'ayant déjà été tirés ils le seront moins) ou de les jouer de préférence aux autres (si l'on pense que ce sont des numéros chanceux dont il faut tirer parti).

Tout comportement tentant d'exploiter des informations sur les numéros déjà tombés est une forme de superstition. Y succomber est certes un penchant natu-

rel et c'est une forme de paradoxe que de nombreuses personnes ayant suivi des cours de probabilités basent leurs martingales pour le Loto sur les numéros anciennement tombés. Cependant, ce n'est pas de ce paradoxe psychologique dont nous voulons parler ici. Le paradoxe qui nous intéresse est que :

- même si les organisateurs du jeu ne trichent pas et que le passé des tirages n'a pas la moindre influence sur les prochains tirages, il est faux d'en déduire que l'on doit jouer au hasard et que les numéros

Solution du paradoxe précédent

choisis quand on coche une grille sont sans importance. Certaines grilles sont meilleures que d'autres pour une raison sérieuse qui ne contredit en rien les lois admises des probabilités. Pourquoi ?

Solution du paradoxe

Le Loto, tel qu'il se pratique en France et dans de nombreux autres pays, répartit la somme gagnée entre les joueurs ayant choisi les numéros gagnants. L'intérêt d'un joueur est donc de jouer une grille que personne d'autre ne joue. Il n'augmente pas sa probabilité de gagner, mais il augmente la somme d'argent qu'il gagne le jour où il gagne. Son espérance de gain – la somme moyenne qu'il gagne à chaque fois qu'il joue – augmente donc.

Ceux qui ne peuvent pas se passer du plaisir de rêver que l'on éprouve en remplissant une grille, et qui voudraient rendre leurs méthodes de jeux plus rationnelles, doivent réfléchir aux grilles les plus jouées pour les éviter et chercher à connaître plus généralement les numéros que les joueurs cochent le plus fréquemment.

Pour connaître les numéros joués préférentiellement, on peut faire appel au bon sens psychologique. Les joueurs composent assez souvent leurs grilles à partir de dates. Cela favorise les nombres entre 1 et 12 (les numéros des mois), les nombres entre 1 et 31 (les numéros des jours), et le 20 (à cause des années récentes qui commencent par 20). On sait aussi que les numéros pris dans le monde réel sont souvent soumis à la loi de Benford qui favorise les nombres commençant par un 1 par rapport à ceux commençant par un 2, ceux commençant par un 2 par rapport à ceux commençant par un 3, etc.

L'hypothèse que les petits numéros sont plus joués que les autres peut être confirmée très simplement en considérant le nombre de gagnants des diverses grilles et en vérifiant que les grilles composées de petits numéros ont plus de gagnants que les autres. Les tests statistiques menés dans ce sens donnent des

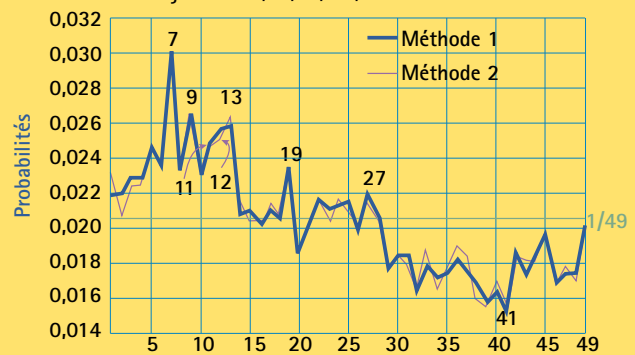
résultats très nets. On trouve par exemple que (a) la moyenne des numéros des grilles pour lesquelles il n'y a eu aucun gagnant de rang 1 est 26,91 ; (b) la moyenne des numéros des grilles ayant eu 8 gagnants de rang 1 est 23,68 ; (c) la moyenne des numéros des grilles ayant 16 gagnants de rang 1 est 21,66. Plus la moyenne des numéros d'une grille est faible, plus elle a de gagnants..., et moins elle rapporte. Dernière confirmation élémentaire de la préférence pour les petits numéros : le plus petit gain obtenu par des gagnants de rang 1 l'a été le 27 août 1994 pour la grille 4-5-7-14-15-17 qui ne comporte aucun numéro au-delà de 17.

N'oubliez pas cependant que, même en utilisant les données statistiques des numéros joués par les parieurs, il apparaît quasiment impossible de rattraper le pourcentage pris par la Française des Jeux et qu'elle ne redistribue pas. Autrement dit, il semble qu'au Loto aucune méthode ne conduise à des stratégies de jeux où l'espérance de gains soit supérieure à l'argent dépensé pour jouer. Il vaut mieux ne pas jouer !

Courbe des numéros choisis

Plus joués : 7, 9, 13, 12, 11, 5

Moins joués : 41, 39, 32, 38, 40

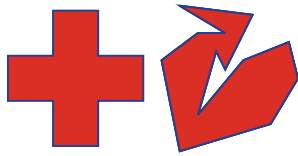


Estimation des fréquences avec lesquelles les joueurs de Loto choisissent les numéros qu'ils cochent

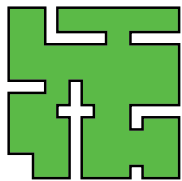
Cette courbe indique les numéros les plus joués par les joueurs du Loto de la Française des Jeux. Chaque numéro, à priori, devrait être joué avec une probabilité de 1/49. Cependant, parce que les joueurs choisissent des dates ou de numéros provenant de données réelles ou parce que certains numéros ne plaisent pas (le 2 par exemple), les probabilités se trouvent parfois au-dessus ou au-dessous de 1/49. La Française des Jeux ne publie pas ces données. Elles ont été calculées par des méthodes d'estimations statistiques indirectes. Deux méthodes différentes ont été utilisées. Le fait qu'elles coïncident presque en tout point assure qu'elles sont proches des données réelles gardées secrètes. On remarque que le numéro 7 est le plus populaire et qu'une tendance générale est que plus le numéro est grand, moins il est joué, ce qui est conforme aux explications invoquant l'attrait des joueurs pour les dates et une incidence de la loi de Benford.



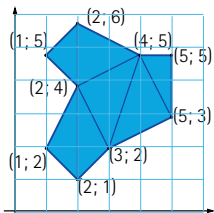
Section problèmes



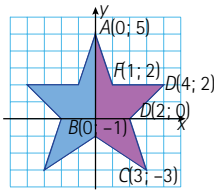
Forteresses



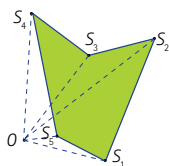
Galerie d'art



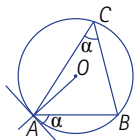
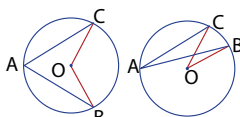
Polygone convexe



Polygone étoilé



Point à l'extérieur du polygone



Les casiers de l'école

- Montrer que les nombres naturels possédant un nombre impair de diviseurs sont précisément les carrés parfaits.
- Étant donné un naturel n écrit comme le produit de deux facteurs, $n = a \times b$ (avec $a \leq b$), montrer que $a \leq \sqrt{n}$ et $b \geq \sqrt{n}$.
- Considérant les 1 000 casiers de l'école de la Longue-Pointe,
 - quel est le premier casier touché par les élèves E_5 et E_7 ? E_6 et E_8 ? E_4 et E_8 ? E_6 , E_8 et E_{30} ?
 - quels sont tous les casiers touchés par les élèves E_5 et E_7 ? etc. (voir a).
 - quels sont tous les élèves touchant aux casiers C_8 et C_{10} ? C_8 et C_{16} ? C_{24} et C_{36} ? C_{45} et C_{49} ? C_{10} , C_{25} et C_{45} ?
 - quel est le dernier élève touchant aux casiers C_8 et C_{10} ? etc. (voir c).
- À l'école du Rond-Point, les 1 000 casiers sont placés tout autour d'un long corridor circulaire. Quelles portes sont ouvertes et lesquelles sont fermées, après le passage des 1 000 élèves?

Tuyau : Examiner des cas simples – par exemple des écoles avec n casiers et n élèves, pour $1 \leq n \leq 8$. À noter que tout élève doit éventuellement toucher au casier C_n (pourquoi?), et c'est alors qu'il arrête son manège. Une étude détaillée de l'action de chacun des élèves, dans le cas $n = 12$, peut suggérer qu'il est souvent possible de les associer deux par deux.

La position d'un navire

- Montrer que la mesure d'un angle inscrit dont les côtés ne passent pas par le centre d'un cercle vaut la moitié de l'angle au centre interceptant le même arc.
- Montrer que l'angle entre une corde et la tangente au cercle au point d'intersection de la corde et du cercle est égal à l'angle inscrit sous-tendu par cette corde.

- Le capitaine a calculé que l'angle entre la position du bateau et les points A et B est de 35° , et qu'il est de 48° avec les points B et C . Déterminer la position du bateau sur la carte et calculer le rayon des arcs capables.

Surveiller une galerie d'art

- Montrer que pour tout n , alors $\lfloor (n+1)/2 \rfloor = \lceil n/2 \rceil$, et pour tout $n \geq 3$, alors $\lfloor (n+2)/3 \rfloor \leq \lceil n/2 \rceil$
- Considérant les deux forteresses (en rouge), appliquer l'algorithme de la forteresse pour déterminer où placer les caméras pour en surveiller l'extérieur.
- Placer des caméras permettant de surveiller cette galerie (en vert)
 - par une triangulation du polygone,
 - par une division du polygone en quadrilatères convexes.

La formule des lacets de souliers

- Trouvez l'aire du polygone convexe (en bleu) en utilisant la triangulation proposée à la première figure de l'article.
- Trouvez l'aire du polygone étoilé en utilisant la méthode des lacets de souliers.
- Démontrez que la méthode des lacets de souliers correspond bien à la somme des aires signées des triangles $OS_i S_{i+1}$, lorsque le point o est à l'extérieur du polygone (en vert).

Les pinsons de Darwin

Montrer que dans le cas de $n = 2$ espèces, le test fondé sur la statistique C se réduit au test exact de Fisher.

Suggestion : noter que

$$C = C_{12} = (S_{11} - S_{12}) \times (S_{22} - S_{12})$$

est une fonction décroissante de S_{12} puisque $S_{12} \leq \min(S_{11}, S_{22})$.

Pour en savoir plus!

Accro-flashes

Les casiers de l'école

- Le problème des casiers de l'école (version « école de la Longue-Pointe ») est un classique de la littérature portant sur la formation mathématique des enseignants. Voir par exemple Bell, Max S., Karen C. Fuson, et Richard A. Lesh, *Algebraic and Arithmetic Structures: A Concrete Approach for Elementary School Teachers*. New York: The Free Press, 1976 (p. 620).
- La généralisation à la version « école du Rond-Point » a été proposée par Cassidy, Charles, et Bernard R. Hodgson, « Because a door has to be open or closed... » *The Mathematics Teacher* 75 (1982) 155-158.
(Article réédité sous le titre « Because a door has to be open or closed: An intriguing problem solved by some inductive exploration. » In : Stephen I. Brown et Marion I. Walter, dir., *Problem Posing: Reflections and Applications*. Hillsdale, N.J. : Lawrence Erlbaum Associates, 1993, pp. 220-228.)

Histoire des mathématiques

Jean Deshayes et la cartographie du fleuve Saint-Laurent

- Jean Deshayes, rapport d'expédition, Archives du Séminaire de Québec.
<https://1drv.ms/b/s!AsJJ9mYtYW0iTDdjpdtL-XgwUea>
- Pour avoir accès à la carte du Saint-Laurent par Deshayes (p. 25) : <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b59733439>

Application des mathématiques

La formule des lacets de souliers

- Braden, Bart. « The surveyor's area formula ». *The College Mathematics Journal* 17 (4): 326–37, 1986.
https://www.academia.edu/8176010/The_Surveyors_Area_Formula
- Golomb, Solomon W. « Proof without words: A 2×2 determinant is the area of a parallelogram ». *Mathematics Magazine* 58 (2): 107–7, 1985. <https://doi.org/10.1080/0025570X.1985.11977163>.
- Lim, Woong. « Shoelace formula: connecting the area of a polygon and vector cross product ». *The Mathematics Teacher* 110 (April): 631–36, 2017. https://www.researchgate.net/profile/Woong-Lim-2/publication/315737612_Shoelace_formula_Connecting_the_area_of_a_polygon_and_vector_cross_product/links/5a5ae4de0f7e9b5fb388bb98/Shoelace-formwula-Connecting-the-area-of-a-polygon-and-vector-cross-product.pdf
- Laforest, Marc, et Isabelle Jalliffier-Verne. « La formule de Pick ». *Accromath*, vol. 5, été-automne, 2010, pp. 10–13.
<https://accromath.uqam.ca/wp-content/uploads/2013/04/Pick.pdf>
- Rakhmanov, Ochilbek. « A new approach (extra vertex) and generalization of shoelace algorithm usage in convex polygon (point-in-polygon) ». *CoRR abs/1907.11015*, 2019. <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1907/1907.11015.pdf>

Statistique

Les pinsons de Darwin

- Besag, J. & P. Clifford (1989). « Generalized Monte Carlo significance tests ». *Biometrika*, vol. 76, pp. 633-642.
- Harris, M. P. (1973). « The Galápagos avifauna ». *The Condor*, vol. 75, pp. 265-278.
<https://sora.unm.edu/sites/default/files/journals/condor/v075n03/p0265-p0278.pdf>
- Stone, L. & A. Roberts (1990). « The checkerboard score and species distributions ». *Oecologia*, vol. 85, pp. 74-79.
<https://www.tau.ac.il/lifesci/departments/zoology/members/stone/documents/checkerboardscoreandspecies.pdf>
- Les pinsons des Galapagos de Darwin. <https://fr.happygringo.com/blog/darwins-galapagos-finch/>

Accromath est une publication de l'Institut des sciences mathématiques (ISM) et du Centre de recherches mathématiques (CRM). La revue s'adresse surtout aux étudiantes et étudiants d'école secondaire et de cégep ainsi qu'à leurs enseignantes et enseignants.



L'Institut des sciences mathématiques est une institution unique dédiée à la promotion et à la coordination de l'enseignement et de la recherche en sciences mathématiques au Québec. En réunissant huit départements de mathématiques des universités québécoises (Concordia, Université Laval, McGill, Université de Montréal, UQAM, UQTR, Université de Sherbrooke, Bishop's), l'Institut rassemble un grand bassin d'expertises en recherche et en enseignement des mathématiques. L'Institut anime de nombreuses activités scientifiques, dont des séminaires de recherche et des colloques à l'intention des professeurs et des étudiants avancés, ainsi que des conférences de vulgarisation données dans les cégeps. Il offre également plusieurs programmes de bourses d'excellence.

L'ISM est financé par le Ministère de l'Enseignement supérieur et par ses huit universités membres.



Le Centre de recherches mathématiques est un centre national pour la recherche fondamentale en mathématiques et ses applications. Les scientifiques du CRM comptent plus d'une centaine de membres réguliers et de stagiaires postdoctoraux. Lieu privilégié de rencontre, le Centre est l'hôte chaque année de nombreux visiteurs et d'ateliers de recherche internationaux.

Les activités scientifiques du CRM comportent deux volets principaux : les projets de recherche qu'entreprennent ses laboratoires, et les activités thématiques organisées à l'échelle internationale. Ces dernières, ouvertes à tous les domaines, impliquent des chercheurs du CRM et d'autres universités. Afin d'assurer une meilleure diffusion des résultats de recherches de ses collaborateurs, le CRM a lancé en 1989 un programme de publications en collaboration avec l'American Mathematical Society et avec Springer.

Le CRM est principalement financé par le CRSNG (Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada), le FQRNT (Fonds québécois de recherche sur la nature et les technologies), l'Université de Montréal, et par six autres universités au Québec et en Ontario.

Accromath bénéficie de l'appui de la Dotation Serge-Bissonnette du CRM.

