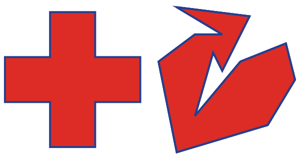
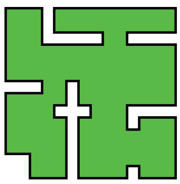
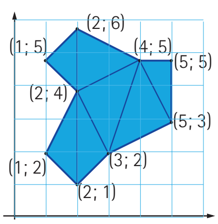
Section problèmes



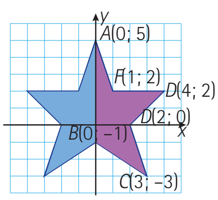
Forteresses



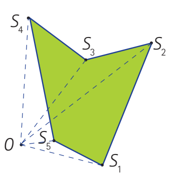
Galerie d'art



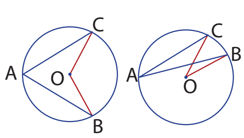
Polygone convexe

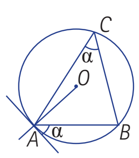


Polygone étoilé



Point à l'extérieur du polygone





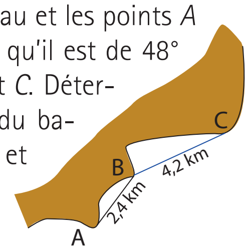
Les casiers de l'école

1. Montrer que les nombres naturels possédant un nombre impair de diviseurs sont précisément les carrés parfaits.
2. Étant donné un naturel n écrit comme le produit de deux facteurs, $n = a \times b$ (avec $a \leq b$), montrer que $a \leq \sqrt{n}$ et $b \geq \sqrt{n}$.
3. Considérant les 1 000 casiers de l'école de la Longue-Pointe,
   a) quel est le premier casier touché par les élèves E_5 et E_7? E_6 et E_8? E_4 et E_8? E_6, E_8 et E_{30}?
   b) quels sont tous les casiers touchés par les élèves E_5 et E_7? etc. (voir a).
   c) quels sont tous les élèves touchant aux casiers C_8 et C_{10}? C_8 et C_{16}? C_{24} et C_{36}? C_{45} et C_{49}? C_{10}, C_{25} et C_{45}?
   d) quel est le dernier élève touchant aux casiers C_8 et C_{10}? etc. (voir c).
4. À l'école du Rond-Point, les 1 000 casiers sont placés tout autour d'un long corridor circulaire. Quelles portes sont ouvertes et lesquelles sont fermées, après le passage des 1 000 élèves?

   Tuyau : Examiner des cas simples — par exemple des écoles avec n casiers et n élèves, pour $1 \leq n \leq 8$. À noter que tout élève doit éventuellement toucher au casier C_n (pourquoi?), et c'est alors qu'il arrête son manège. Une étude détaillée de l'action de chacun des élèves, dans le cas $n = 12$, peut suggérer qu'il est souvent possible de les associer deux par deux.

La position d'un navire

1. Montrer que la mesure d'un angle inscrit dont les côtés ne passent pas par le centre d'un cercle vaut la moitié de l'angle au centre interceptant le même arc.
2. Montrer que l'angle entre une corde et la tangente au cercle au point d'intersection de la corde et du cercle est égal à l'angle inscrit sous-tendu par cette corde.
3. Le capitaine a calculé que l'angle entre la position du bateau et les points A et B est de 35°, et qu'il est de 48° avec les points B et C. Déterminer la position du bateau sur la carte et calculer le rayon des arcs capables.



Surveiller une galerie d'art

1. Montrer que pour tout n, alors $\lfloor (n+1)/2 \rfloor = \lceil n/2 \rceil$, et pour tout $n \geq 3$, alors $\lfloor (n+2)/3 \rfloor \leq \lceil n/2 \rceil$
2. Considérant les deux forteresses (en rouge), appliquer l'algorithme de la forteresse pour déterminer où placer les caméras pour en surveiller l'extérieur.
3. Placer des caméras permettant de surveiller cette galerie (en vert)
   a) par une triangulation du polygone,
   b) par une division du polygone en quadrilatères convexes.

La formule des lacets de souliers

1. Trouvez l'aire du polygone convexe (en bleu) en utilisant la triangulation proposée à la première figure de l'article.
2. Trouvez l'aire du polygone étoilé en utilisant la méthode des lacets de souliers.
3. Démontrez que la méthode des lacets de souliers correspond bien à la somme des aires signées des triangles OS_iS_{i+1}, lorsque le point est à l'extérieur du polygone (en vert).

Les pinsons de Darwin

Montrer que dans le cas de $n = 2$ espèces, le test fondé sur la statistique C se réduit au test exact de Fisher.

Suggestion : noter que

$$C = C_{12} = (S_{11} - S_{12}) \times (S_{22} - S_{12})$$

est une fonction décroissante de S_{12} puisque $S_{12} \leq \min(S_{11}, S_{22})$.