Les casiers de l'école

La prof de maths de Roméo a donné à résoudre un problème qu'il trouve trop long et difficile. Il s'en plaint auprès de sa copine Juliette.

Bernard Hodgson
Université Laval

Juliette

Tu as l'air bougonneux, Roméo. Qu'est-ce qui se passe?

Roméo

Parle-m'en pas! C'est ma prof de maths qui nous a encore donné pour la fin de semaine un problème qui n'a pas d'allure. Regarde. *(Il lui tend un papier où est inscrit le texte en encadré.)*

Les casiers de l'école de la Longue-Pointe

Les casiers des 1 000 élèves sont tous situés à la queue leu leu le long d'un interminable corridor. Lorsqu'elle veut tester la bonne forme des élèves, l'enseignante d'éducation physique organise l'activité suivante :

- un premier élève part à la course en ouvrant toutes les portes des casiers;
- une deuxième élève court de deux en deux, en commençant avec le casier C_2, et ferme toutes les portes qu'elle touche;
- un troisième élève – appelons-le E_3 – va de trois en trois en commençant à C_3, ouvrant les portes qui sont fermées et fermant celles qui sont ouvertes;
- et ainsi de suite jusqu'à l'élève E_{1000}, dont la tâche consiste à courir tout au bout du corridor et à changer l'état de la porte du casier C_{1000}.

À la fin de cet athlétique processus, quelles portes sont ouvertes et lesquelles sont fermées?

Juliette

Oh! que ça a l'air chouette comme problème! As-tu essayé quelque chose?

Roméo

Pas vraiment. Je trouve l'énoncé trop mêlant. Et puis 1000! Ça n'a pas de bon sens!

Juliette

Mon prof de maths nous rappelle toujours : si un problème a l'air compliqué, essayez de le simplifier mais sans le dénaturer, en conservant sa « substantifique moelle », comme il dit – il aime ça nous citer du Rabelais.

1000 élèves, 1000 casiers, c'est beaucoup. Essayons pour des nombres plus petits.

Roméo

Petits nombres? OK. J'essaie. S'il y a un élève et un casier, facile : l'élève ouvre la porte du casier et c'est fini.

Deux élèves? Hum, l'élève E_1 ouvre les portes des casiers C_1 et C_2, puis l'élève E_2 ferme la porte C_2. Donc la porte C_1 est ouverte et C_2, fermée.

Juliette

C'est bien parti! Et avec trois élèves, E_1 ouvre les trois portes C_1, C_2 et C_3, puis E_2 ferme C_2 et finalement E_3 ferme C_3. Donc ouvert, fermé, fermé.

Roméo

Attends un peu. J'ai compris! 2 et 3 sont des nombres premiers. La semaine dernière en classe, la prof nous a reparlé des nombres premiers. Une vraie marotte chez elle : elle revient souvent sur l'idée que c'est tellement important comme type de nombres… C'est donc ça l'affaire : elle veut qu'on pense aux nombres premiers. Et si je regarde le casier C_{11}, sa porte va être fermée, car E_1 l'ouvre, E_{11} la ferme, et personne d'autre n'y touche. Donc, porte fermée pour tous les nombres premiers!

Juliette

Bravo! C'est bien parti. Mais il faudrait aussi voir quoi dire quand on a un nombre composé.

Bon, je dois y aller : j'ai un travail de français à remettre lundi sans faute. On s'en reparle plus tard. Mais essaye de faire un tableau montrant en détail ce qui se passe pour, mettons, une douzaine de casiers. Bye!

(Quelques jours plus tard.)

Roméo

Juliette! Juliette! Regarde : j'ai fait un tableau, comme tu me l'as suggéré. Je le trouve joli, mais je n'arrive pas à le « faire parler ».

J'ai travaillé avec 12 casiers / 12 élèves. À la ligne 1 de mon tableau, pour indiquer que l'élève E_1 ouvre toutes les portes, j'ai mis des O partout. À la ligne 2, j'ai mis des F pour représenter E_2 qui ferme les portes de deux en deux. Puis E_3 ferme ou ouvre successivement les portes C_3, C_6, C_9 et C_{12}. Jusqu'à E_{12}, qui ne fait que fermer la porte du casier C_{12}.

État de la porte du casier C_k après le passage de l'élève E_k

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}
E_1	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
E_2		F		F		F		F		F		F
E_3			F			O			F			O
E_4				O				O				F
E_5					F					O		
E_6						F						O
E_7							F					
E_8								F				
E_9									O			
E_{10}										F		
E_{11}											F	
E_{12}												F

Je vois ainsi, sur la diagonale du tableau, que les portes correspondant à un nombre premier sont bel et bien fermées, comme je le pensais. Mais il y en a d'autres fermées, comme C_8 et C_{10}.

Juliette

Mais c'est super ton tableau! Il montre que ce ne sont pas les nombres premiers en soi qui sont en jeu ici, mais plutôt la notion de *diviseur*. La porte d'un casier change de position chaque fois qu'un élève lui touche. Et qui touche à la porte C_k? Tous les élèves dont le numéro est un diviseur de *k*.

Regarde ta colonne C_{12} : on y voit que cette porte est touchée par six élèves : E_1, E_2, E_3, E_4, E_6 et E_{12}. Et ça donne O–F–O–F–O–F. La porte est donc fermée!

Diviseurs de 12
1
2
3
4
6
12

Roméo

Oui, je comprends. Mais en fait, je pense que ce qui importe, ce n'est pas tant le *nombre* de diviseurs, mais plutôt de savoir si le nombre de diviseurs est *pair* ou *impair*. La porte C_{12} est fermée, car 12 a un nombre pair de diviseurs. Mais la porte C_9 a été touchée par E_1, E_3 et E_9, un nombre impair de fois, et donc elle reste ouverte.

Juliette

La parité du nombre de diviseurs de k! C'est donc là que réside la réponse à la question: *la porte du casier C_k est-elle ouverte ou fermée?* Bravo, cher Roméo! Le mystère est enfin résolu…

Roméo

L'est-il vraiment? C'est bien beau de savoir que les portes ouvertes sont celles dont le numéro a un nombre impair de diviseurs. Mais cela ne me dit pas quelles sont ces portes au juste.

Juliette

Mais si! Ne te rappelles-tu pas? On a vu ça l'année dernière. Regarde un nombre comme 12 et écris-le comme produit de deux facteurs. Ses diviseurs viennent alors deux par deux, l'un plus petit et l'autre plus grand que sa racine carrée ($\sqrt{12} \approx 3{,}46$). Le nombre 12 a donc un nombre pair de diviseurs.

$$\begin{aligned} 12 &= 1 \times 12 \\ &= 2 \times 6 \\ &= 3 \times 4 \end{aligned}$$

Mais c'est différent pour un carré parfait comme 36, car parmi ses factorisations en produit de deux nombres, il y a celle impliquant sa racine carrée, qui n'introduit de ce fait qu'un seul diviseur. Comme tout carré parfait, 36 a un nombre impair de diviseurs.

Diviseurs de 36
1
2
3
4
6
9
12
18
36

$$\begin{aligned} 36 &= 1 \times 36 \\ &= 2 \times 18 \\ &= 3 \times 12 \\ &= 4 \times 9 \\ &= 6 \times 6 \end{aligned}$$

Roméo

C'est donc ça le truc : *les portes ouvertes sont celles dont le numéro est un carré parfait!* En effet, c'est joli!

Mais je me demande ce qui se passerait si la rangée de casiers était en cercle – on pourrait dire qu'on s'en va à l'école du Rond-Point!

Voyons… Les élèves tourneraient tout autour du corridor circulaire. Mais il faut qu'ils arrêtent à un moment donné… OK, j'ai pigé : il faut stopper un élève au moment où il en viendrait à toucher une même porte une deuxième fois, ce qui va immanquablement arriver. Si on ne l'arrête pas, il poursuivrait ses rondes en défaisant sempiternellement ce qu'il vient tout juste de faire.

Mais, quelles seraient-elles alors, les portes ouvertes?

Juliette

Joli changement de décor ![1]

1. *Voir la* Section problèmes.