Accromath Vol. 19 • hiver – printemps 2024

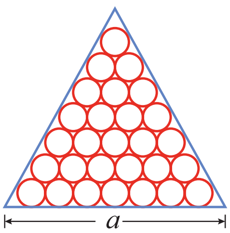




# Aire des cercles dans un triangle équilatéral

*La professeure de mathématiques de Léo a posé un problème qu'il peine à résoudre. Il demande conseil à Zia.*

**André Ross**
Professeur retraité




**Léo**

J'ai un problème à résoudre et je ne vois pas comment procéder.

**Zia**

C'est quoi ton problème ?

**Léo**

On inscrit des cercles de même rayon dans un triangle équilatéral. S'il y a $n$ cercles sur un côté de longueur $a$ du triangle, déterminer l'aire totale des cercles inscrits.

**Zia**

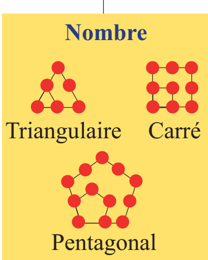
En fait, elle te pose deux problèmes : combien de cercles y-a-t-il dans le triangle, s'il y en a $n$ sur un côté de longueur $a$, et quelle est l'aire de ces cercles ?

**Léo**

Si tu veux.

**Zia**

Le nombre de cercles dans le triangle est le nombre triangulaire de rang $n$.




**Léo**

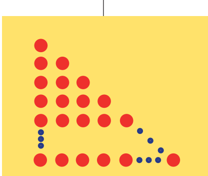
C'est quoi le « nombre triangulaire de rang $n$ » ?

**Zia**

L'appellation « nombre triangulaire » remonte à l'école de Pythagore, où on représentait les nombres par des points pour obtenir des formes géométriques.

**Léo**

Je vois. Et comment fais-tu pour trouver le nombre triangulaire de rang $n$ ?



**Zia**

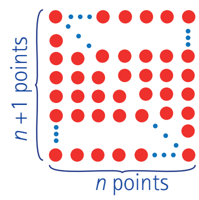
Pythagore avait remarqué que les points des nombres triangulaires pouvaient se disposer pour former des triangles rectangles.

**Léo**

Et comment procédait-il pour la somme ?

**Zia**

L'astuce consiste à supposer que le nombre de points sur les côtés est $n$, puis à dupliquer la figure en lui faisant effectuer une rotation de 180° et en la positionnant de façon à obtenir un rectangle.




Le nombre de points sur un des côtés est $n$ et sur l'autre côté, il est maintenant de $n+1$ points. Dans le rectangle, il y a donc au total $n(n+1)$ points. En divisant par 2, il obtient le nombre triangulaire de rang $n$, soit

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**Léo**

C'est un beau raisonnement.

**Zia**

De nos jours, le problème se pose de la façon suivante.

Calculer la somme des $n$ premiers nombres

$$1+2+3+4+\ldots+(n-2)+(n-1)+n.$$

On écrit la somme dans l'ordre inverse pour obtenir

$$n+(n-1)+(n-2)+\ldots+4+3+2+1$$

et, on additionne en colonne ce qui donne

$$\begin{array}{r} 1+2+3+4+\ldots+(n-2)+(n-1)+n \\ +\ n+(n-1)+(n-2)+\ldots+4+3+2+1 \end{array}$$

Dans chaque colonne, on obtient la même somme de $n+1$. Puisqu'il y a $n$ termes, cela fait un total de $n(n+1)$ et en divisant par 2, on a le nombre triangulaire de rang $n$.[1]

**Léo**

Oui, je me souviens qu'on ait vu cette démonstration en classe. Pythagore avait une démarche plus visuelle.

**Zia**

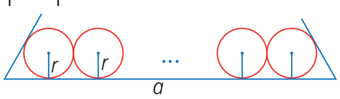
Ton premier problème est résolu. Il reste à calculer l'aire de ces cercles.

**Léo**

En fait, je savais comment trouver le nombre de cercles dans le triangle, mais je ne savais pas que c'était un « nombre triangulaire ». Mon problème est de trouver l'aire des cercles.

**Zia**

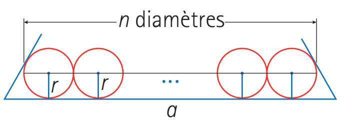
Je vois. Probablement qu'il faut exprimer le rayon en fonction du côté $a$ du triangle. Essayons de décomposer la longueur $a$ d'un côté en diverses longueurs pour essayer d'y voir un peu plus clair.




Qu'est-ce qu'on a en plus ?

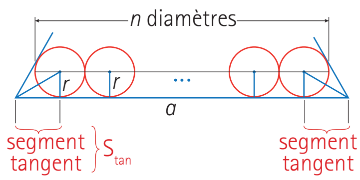
**Léo**

En traçant les diamètres horizontaux, on obtient un segment de droite dont la longueur est $n$ fois le diamètre.




**Zia**

On peut tracer le segment de droite reliant les sommets de la base du triangle au centre du cercle le plus près.




1. *Ce raisonnement aurait été tenu par Carl Friedrich Gauss alors qu'il était à l'élémentaire. Pour s'aménager du temps de correction, son professeur avait demandé à la classe de sommer tous les nombres de 1 à 100. Gauss a aussitôt remis sa solution. Pour la source de cette anecdote, voir « Glanures mathématico-littéraires (V) » Bernard R. Hodgson dans Accromath vol. 18, été-automne 2023 p.34.*

**Léo**

Super ! En soustrayant deux fois le rayon, et en additionnant deux fois le segment tangent aux extrémités, on obtient une égalité :

$$a = nd - 2r + 2S_{tan}.$$

Puisque $d = 2r$, cela donne

$$a = 2nr - 2r + 2S_{tan}.$$

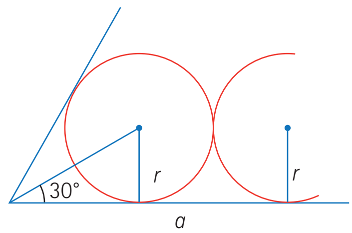
**Zia**

Oui, et en calculant la longueur des segments tangents, on obtient la relation entre $a$ et $r$.

**Léo**

Le segment tangent est le côté adjacent à un angle de 30° et le côté opposé à cet angle est $r$. L'hypoténuse est donc $2r$ (voir encadré) et

$$(S_{tan})^2 = (2r)^2 - r^2 = 4r^2 - r^2 = 3r^2.$$




La longueur d'un segment tangent est

$$S_{tan} = r\sqrt{3},$$

d'où
$$\begin{aligned} a &= 2nr - 2r + 2r\sqrt{3} \\ &= 2r(n - 1 + r\sqrt{3}). \end{aligned}$$

On peut donc isoler $r$ et on obtient

$$r = \frac{a}{2(n-1+r\sqrt{3})}.$$

La surface d'un cercle est donc

$$\pi r^2 = \frac{\pi a^2}{4(n-1+r\sqrt{3})^2}.$$

**Zia**

Voilà, il reste simplement à multiplier le nombre de cercles par la surface d'un cercle et l'aire occupée par les cercles est

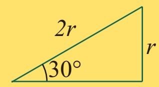
$$A = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{\pi a^2}{4(n-1+r\sqrt{3})^2}.$$

**Léo**

Bonne collaboration ! Merci !

### Triangle rectangle ayant un angle de 30°

Les géomètres grecs savaient déjà que dans un triangle rectangle qui a un angle de 30°, la mesure du côté opposé à l'angle de 30° est la moitié de celle de l'hypoténuse.




En s'appuyant sur des résultats de base en trigonométrie, on a que

$$\sin\theta = \frac{1}{2}.$$

et que l'hypoténuse est égale à

$$r/\sin 30° = 2r.$$

Dans sa cosmologie, Platon considère deux triangles « élémentaires » : le triangle dont « l'hypoténuse a une longueur double du plus petit côté » et le triangle isocèle rectangle, soit :