Section problèmes

Glanures mathématico-littéraires

1. *« Sommes à la Gauss »*
   a) Évaluer la somme des entiers de 1 à 100 en vous appuyant sur un « calcul efficace », par exemple un réarrangement inspirant des termes de la somme.
   b) Votre calcul de la partie a) peut-il s'interpréter géométriquement?
   c) Et que dire de la somme des entiers de 1 à 99?
   d) Soit maintenant une *progression* (ou *suite*) *arithmétique* quelconque. Il s'agit donc de nombres de la forme $u_n = a + nd$, avec $a, d \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. (Le réel d est la différence entre deux termes consécutifs de la suite. On suppose que $d \neq 0$.)

      Posant $S_n = u_0 + u_1 + \cdots u_{n-1}$ — une somme de n termes —, trouver une expression générale pour S_n en fonction de l'indice n et des paramètres a et d. (La partie a) porte sur le cas où $n = 100$ et $a = d = 1$.
2. On appelle *progression* (ou *suite*) *géométrique* une suite de nombres de la forme $v_n = ar^n$, où $a, r \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. (Cette suite est dite de *raison* r, ce réel donnant le rapport entre deux termes consécutifs de la suite. On suppose que a et r ne sont pas nuls.)
   a) Posant $S_n = v_0 + v_1 + \cdots v_{n-1}$, trouver une expression générale pour S_n en fonction de l'indice n et des paramètres a et r.

      Tuyau : En introduisant l'expression rS_n, on peut produire un phénomène de « télescopage » permettant d'éliminer beaucoup de termes.
   b) Montrer que dans une progression arithmétique, chaque terme, sauf le tout premier u_0, est la moyenne (arithmétique) de ses deux voisins.
   c) Montrer de même que chaque terme d'une progression géométrique est la moyenne géométrique de ses deux voisins.

      Rappel : Étant donné deux entiers positifs, leur *moyenne géométrique* est la racine carrée de leur produit.
3. À propos de la proposition I.47 des *Éléments* d'Euclide, Proclus s'intéresse entre autres à une méthode qu'il attribue à Pythagore afin de trouver des triplets pythagoriciens[1] — voir encadré p. 39.
   a) Traduire cette méthode à l'aide d'une expression algébrique, puis en vérifier algébriquement l'exactitude.
   b) En donner une preuve géométrique plausible dans le cadre des mathématiques grecques de l'Antiquité.
   c) Trouver trois triplets pythagoriciens différents à l'aide de cette méthode. Existe-t-il des triplets pythagoriciens qui ne résultent pas de cette méthode ?
4. Mêmes questions, cette fois en lien avec la méthode attribuée à Platon par Proclus — voir encadré p. 39.
5. Soit (x, y, z), un triplet pythagoricien[1]. On dit que ce triplet est *primitif* si le PGCD de ses trois composantes est 1.
   a) Donner trois exemples de triplets pythagoriciens primitifs.
   b) Montrer que dans un triplet pythagoricien primitif, les deux composantes x et y sont de parité opposée. En déduire que z est forcément impair.
   c) Montrer que le triplet (x, y, z) est pythagoricien et primitif si, et seulement si, il est de la forme

$$(\#) \begin{cases} x = r^2 - s^2 \\ y = 2rs \\ z = r^2 + s^2, \end{cases}$$

      où r et s sont deux entiers de parité opposée et dont le PGCD est 1 (avec $r > s > 0$).

      Tuyau : Une « moitié » de cette équivalence se démontre aisément ; l'autre relève d'un cours élémentaire de théorie des nombres.
   d) Trouver tous les triplets pythagoriciens primitifs, pour $2 \leq r \leq 7$.

1. *On appelle* triplet pythagoricien *un triplet (x, y, z) d'entiers positifs tels que $x^2 + y^2 = z^2$.*