Différence de carrés

En calculant les différences des carrés d'entiers successifs, Léo constate une chose qui lui semble étonnante et il en discute avec Zia.

André Ross
Professeur retraité

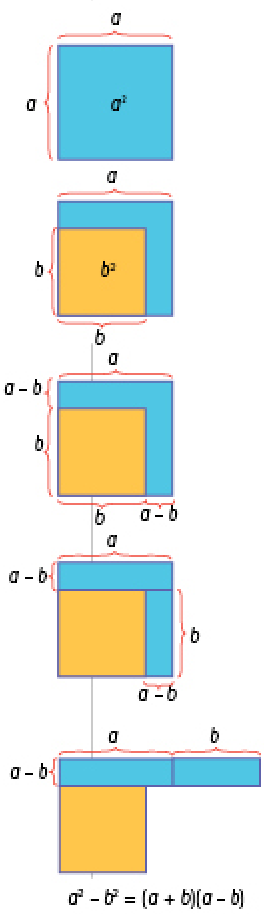
Léo
As-tu déjà remarqué une chose intrigante sur les différences de carrés ?

Zia
Quoi donc ?

Léo
Si je fais la différence des carrés de deux nombres entiers successifs, ça me donne la somme de ces deux nombres. Par exemple,

$$2^2 - 1^2 = 3 = 2 + 1,$$
$$3^2 - 2^2 = 5 = 3 + 2,$$
$$4^2 - 3^2 = 7 = 4 + 3,$$
$$5^2 - 4^2 = 9 = 5 + 4,$$

Je me demande si c'est toujours vrai et comment m'en assurer.



Zia
Une chose est certaine, ce n'est pas en continuant d'effectuer des calculs que tu vas le savoir.

Léo
Pourquoi ?

Zia
As-tu pensé qu'il y a un nombre infini de différences de carrés de nombres entiers successifs dont il te faut calculer la différence ? Tu en as pour l'éternité et plus encore, car tu n'auras même pas fini.

Léo
Oui, je sais bien, mais comment faire.

Zia
Il faut imaginer une autre approche. Dans tes exemples, tu fais la différence des carrés de deux nombres successifs.

$$a^2 - b^2.$$

Léo
Bien, oui!

Zia
Une différence de carrés est factorisable et on obtient

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Tu obtiens la somme des deux entiers parce que leur différence $a - b$ est égale à 1, soit

$$a^2 - b^2 = a + b$$

Léo
Ah! ça signifie que c'est toujours vrai. Par exemple

$$135^2 - 134^2 = 135 + 134 = 269.$$

Zia
Tout à fait.

Léo
Oh! Je vois qu'on peut exprimer cette somme autrement.

Supposons que le plus petit des deux entiers est n, l'entier suivant est $n + 1$. La différence des carrés est alors

$$(n + 1)^2 - n^2$$

En factorisant, j'obtiens

$$\begin{aligned}(n + 1)^2 - n^2 &= (n + 1 + n)(n + 1 - n)\\ &= (2n + 1) \times 1.\end{aligned}$$

La différence des carrés de deux entiers successifs est donc 2 fois le plus petit plus 1.

Zia
Ça te permet d'impressionner ceux qui ne connaissent pas la relation.

Léo
Je ne comprends pas.

Zia
Par exemple, tu demandes à quelqu'un : peux-tu me calculer de tête

$$265^2 - 264^2 ?$$

Léo
Il va sûrement me dire que c'est impossible alors que moi je n'ai qu'à faire le calcul

$$2 \times 264 + 1 = 529.$$

C'est plate qu'on ne puisse pas généraliser cette relation.

Zia
Qu'est-ce que tu veux dire ?

Léo
Si la différence des deux nombres n'est pas 1, ça ne marche pas.

Zia
On peut peut-être trouver autre chose. Considérons que la différence des deux nombres est 2. Qu'est-ce que ça donnerait ?

Léo
En supposant que le plus petit des deux entiers est n l'entier suivant est $n + 2$. La différence des carrés est alors

$$(n + 2)^2 - n^2.$$

En factorisant, j'obtiens

$$\begin{aligned}(n + 2)^2 - n^2 &= (n + 2 + n)(n + 2 - n)\\ &= (2n + 2) \times 2.\end{aligned}$$

Zia
On essaie avec une différence de trois ?

Léo
Pourquoi pas?

En supposant que le plus petit des deux entiers est n le plus grand est $n + 3$. La différence des carrés est alors

$$(n + 3)^2 - n^2.$$

En factorisant, j'obtiens

$$\begin{aligned}(n + 3)^2 - n^2 &= (n + 3 + n)(n + 3 - n)\\ &= (2n + 3) \times 3.\end{aligned}$$

Zia
Je pense qu'on peut généraliser en supposant que la différence des deux entiers est k, qu'en dis-tu ?

Léo
Je crois aussi qu'on peut généraliser. Essayons pour être certain.

On représente par n le plus petit des deux entiers et le plus grand par $n + k$. La différence des carrés est alors

$$(n + k)^2 - n^2.$$

En factorisant, j'obtiens

$$\begin{aligned}(n + k)^2 - n^2 &= (n + k + n)(n + k - n)\\ &= (2n + k) \times k.\end{aligned}$$

Zia
Avec ce résultat, tu peux impressionner la galerie.

Léo
Impressionner la galerie ?

Zia
Je vais te montrer. Supposons que tu es la personne que je veux impressionner. Je te demande de choisir deux nombres entre 1 et 50.

Léo
Je choisis 27 et 36.

Zia
Tu demandes à la personne si elle peut calculer

$$36^2 - 27^2$$

plus vite que toi.

Léo
Je vois. La différence des nombres est $k = 9$, je calcule donc

$$\begin{aligned}(2 \times 27 + 9) \times 9 &= 63 \times 9\\ &= 60 \times 9 + 3 \times 9\\ &= 540 + 27 = 567.\end{aligned}$$

Super ! À ton tour. Choisis deux chiffres de 1 à 50.

Zia
Je choisis 4 et 48.

Léo
La différence est 44, en l'additionnant à deux fois le plus petit nombre, ça donne 52 et en multipliant par 44, ça donne

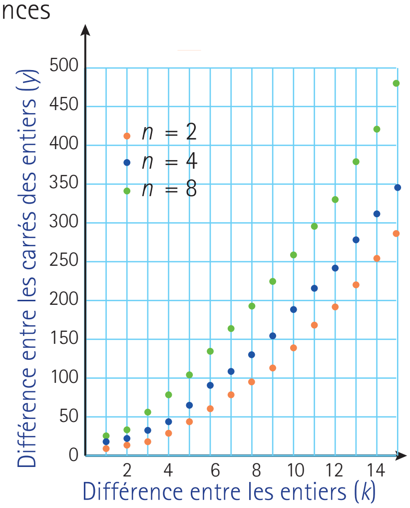
$$\begin{aligned}52 \times 44 &= (50 + 2) \times (40 + 4)\\ &= 50 \times 40 + 2 \times 40 + 50 \times 4 + 2 \times 4\\ &= 2\,000 + 80 + 200 + 8 = 2\,288.\end{aligned}$$

On dirait que plus la différence entre les deux nombres est grande, plus celle entre leurs carrés est grande.

Zia
C'est croissant, mais selon quelle courbe ?

Léo
Représentons graphiquement les différences entre les carrés. En notant k la valeur de la différence entre les entiers, celle entre les carrés est $y = k^2 + 2nk$. J'ouvre une feuille de calcul dans Excel et je représente graphiquement.

k \ n	2	4	8
1	5	9	17
2	12	20	36
3	21	33	57
4	32	48	80
5	45	65	105
6	60	84	132
7	77	105	161
8	96	128	192
9	117	153	225
10	140	180	260
11	165	209	297
12	192	240	336
13	221	273	377
14	252	308	420
15	285	345	465



Zia
On voit que la croissance est parabolique. On aurait dû s'en douter, puisque $y = k^2 + 2nk$ est l'équation d'une parabole.