Été-automne 2022
Solutions

Des dames sur d'étranges échiquiers

1. Rappelons qu'une liste $(r_1,\dots, r_n)$ équivaut à placer les dames en positions

$$(c, r) \in \{(1, r_1),\dots,(n, r_n)\},$$

où c est la colonne et r la rangée.

Le premier point est nécessaire. Par construction, toutes les dames de la liste sont sur des colonnes différentes, et la liste est une permutation si et seulement si toutes les dames sont sur des rangées différentes.

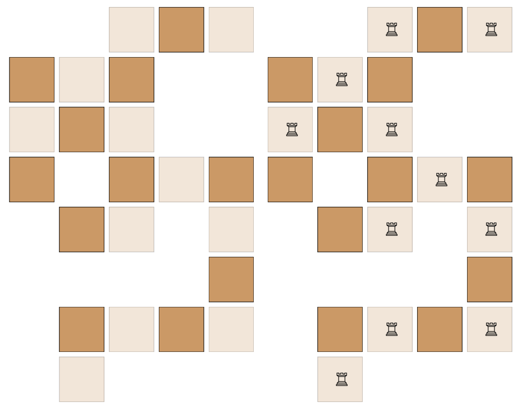
Deux dames (c_1,r_1) et (c_2,r_2) sont sur la même diagonale SE sur un tore si $c_1 + r_1 = c_2 + r_2$ mod n. Le deuxième point indique donc, en remplaçant c_d, r_d par les positions de $(1,r_1),\dots,(n,r_n)$, qu'aucune paire de dames ne partage la même diagonale SE.

De même, (c_1,r_1) et (c_2,r_2) sont sur la même diagonale NE sur un tore si $c_1 - r_1 = c_2 - r_2$ mod n. Ainsi le troisième point assure que jamais deux dames ne partagent la même diagonale NE.

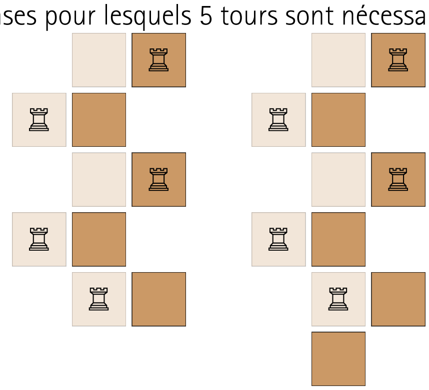
Ainsi les trois points doivent être vérifiés pour constituer une position valide, et les vérifier garantit que la position solutionne le problème toroïdal des n dames, puisque les rangées, les colonnes et les diagonales ne contiennent jamais deux dames.

2. Il est toujours possible de surveiller un polyomino de $N \geq 2$ cases avec $\lfloor N/2 \rfloor$ tours, et parfois ce nombre est nécessaire. Pour voir ceci, il suffit de placer le polyomino sur un grand échiquier. Les cases du polyomino seront donc blanches ou noires, et comme le polyomino est connexe, chaque case noire aura une voisine blanche. Mettre une tour sur chaque case de la couleur la moins représentée donne alors la domination.

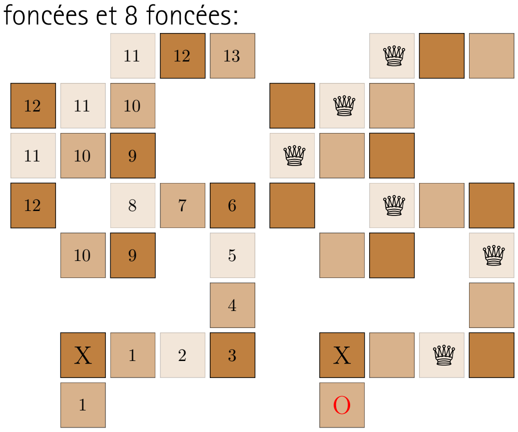
Voici un exemple sur le polyomino de l'exercice suivant :



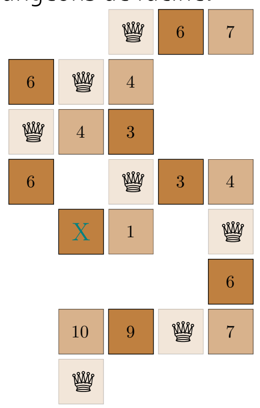
Ce nombre est parfois nécessaire comme l'illustrent les diagrammes suivants de 10 et 11 cases pour lesquels 5 tours sont nécessaires:



3. Faisons le même procédé. Nous obtenons le coloriage suivant avec 6 cases claires, 8 mi-foncées et 8 foncées:



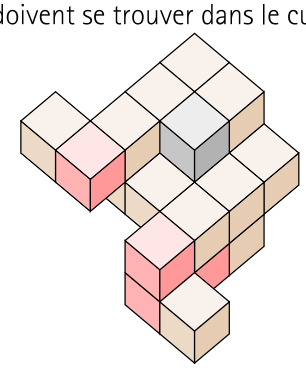
Mais placer les dames sur les cases claires laisse une case non surveillée (avec un rond rouge dans la deuxième la figure, sous le X). Ceci illustre un exemple de ce qui peut mal tourner si on ne débute pas avec une case aux extrémités, donc qui n'a qu'une voisine. Voici ce qui arrive si nous changeons de racine:



Il y a maintenant 7 cases claires, 7 cases mi-foncées et 8 cases foncées. Placer les dames sur les cases claires ou mi-foncées permet de surveiller le polyomino.

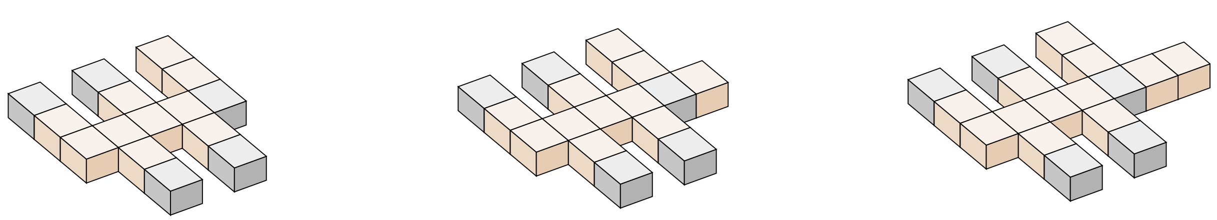
4. Le théorème est valide pour des polyominos d'au moins 3 cases. Il y a trois couleurs données par la distance à la racine. La «couleur» 0 n'est jamais vide comme c'est la couleur de la racine. Si la couleur 1 est vide, alors cela veut dire que la racine n'a pas de case voisine, et donc que le polyomino a seulement 1 case, puisqu'il est connexe. Finalement, la couleur 2 peut être vide, mais cela veut dire que les cases à distance 1 de la racine n'ont que la racine comme voisine. En particulier, le polyomino a maximalement 5 cases. En ce cas, il suffit de placer une dame sur la racine pour le surveiller.

5. La preuve fonctionne sans ajuster, mais il faut bien définir le mouvement des dames et ce qu'est un polyomino de dimension 3. En 3D, une case devient un cube et un polyomino est un ensemble de cubes connexes, donc de sorte qu'il soit possible de se déplacer entre tous deux points du polyominos en traversant les faces des cubes. On définit le déplacement d'une dame comme suit: une dame en 3D peut atteindre les 27 cases du cube 3×3 qui l'entoure. Pour le reste, le prolongement en droites de chacune de ces directions est gardée par la dame. Dans un polyomino, on ajoute la condition que toutes les cases du mouvement de la droite doivent se trouver dans le cube.



Sur ce polyomino, la dame sur le cube en gris peut atteindre toutes les cases sauf celles en rouge.

Pour se convaincre que la preuve fonctionne, remarquons deux choses. De l'une, la situation en 2D est incluse dans celle en 3D. La borne est ainsi parfois atteinte en prenant les polyominos construits dans l'article dans un plan de l'espace. De l'autre, le concept de distance reste le même: on compte la distance entre deux cases du polyomino par le nombre minimal de pas traversant les faces de cubes qu'il faut faire pour s'y rendre. Alors prendre une racine, numéroter les cubes selon leur distance et placer les dames comme dans la preuve fonctionne.



Ces 3-polyominos de 15, 16 et 17 cubes nécessitent, pour chacun, 5 dames placées sur les cubes gris.

Indices

1. Il vous a fallu un temps $t = \dfrac{d/n}{v_i}$

 pour parcourir la i-ième partie de la distance, donc un temps total de
 $$t = \frac{d}{n}\left(\frac{1}{v_1} + \cdots + \frac{1}{v_n}\right).$$
 La vitesse moyenne, v, est donnée par
 $$v = \frac{d}{t}\left(\frac{n}{\frac{1}{v_1} + \cdots + \frac{1}{v_n}}\right).$$

2. Soit x_1 et x_2, notons

 $M_a = \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2)$, leur moyenne arithmétique,

 $M_g = \sqrt{x_1 x_2}$, leur moyenne géométrique,

 $M_h = \dfrac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}$, leur moyenne harmonique.

 On doit montrer
 $$\min(x_1, x_2) \le M_h \le M_g \le M_a \le \max(x_1, x_2).$$
 $$\begin{aligned} M_g \le M_a &\Leftrightarrow M_a^2 \ge M_g^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2 \ge x_1 x_2 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2 \ge 0, \end{aligned}$$
 qui est toujours vérifié.

 Supposons $x_1 \le x_2$. Alors,
 $$M_a \le \frac{1}{2}(x_2 + x_2) = x_2 = \max(x_1, x_2).$$
 De même si $x_2 \le x_1$.

 Remarquons que $M_h = \dfrac{2x_1x_2}{x_1 + x_2} = \dfrac{M_g^2}{M_a}$
 $$\begin{aligned} M_h \le M_g &\Leftrightarrow M_h^2 \le M_g^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{M_g^4}{M_a^2} \le M_g^2 \\ &\Leftrightarrow M_g^2 \le M_a^2, \end{aligned}$$
 déjà montré précédemment.

 Supposons $x_1 \le x_2$. Alors,
 $$\min(x_1, x_2) = x_1 = \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1}} \le \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} = \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2},$$
 car
 $$x_1 - \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2} = \frac{x_1(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2} \le 0.$$
 De même si $x_2 \le x_1$.

Méthode d'exhaustion

1. La méthode des leviers consiste à décomposer, par la pensée, une surface ou un solide en tranches parallèles et à comparer, à l'aide d'une balance à fléau, ces tranches à celles d'une surface ou d'un solide connu pour déterminer la relation entre ceux-ci. Il a ainsi déterminé l'aire de la surface d'une section de parabole et le volume de la sphère.

2. Le principe fondamental de la méthode d'exhaustion énoncé par Eudoxe et repris par Euclide est à l'effet qu'en soustrayant itérativement d'une grandeur une autre grandeur supérieure ou égale à sa moitié, on peut rendre la grandeur restante aussi petite que l'on voudra.

 En considérant 1 comme valeur initiale et soustrayant itérativement les trois quarts de la valeur, on obtient :
 $$1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$
 $$\frac{1}{4} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$
 $$\frac{1}{16} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{64}$$
 $$\frac{1}{64} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{64} = \frac{1}{256}$$
 $$\ldots$$
 En poursuivant ainsi, on peut rendre la valeur restante aussi petite que l'on voudra.

 En utilisant cette méthode, Archimède a établi diverses conjectures :

 L'aire d'un segment de parabole est les quatre tiers de l'aire du triangle inscrit.

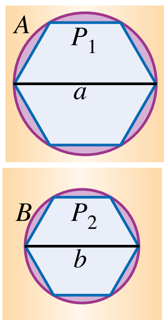
 Le volume d'une sphère est les deux tiers du volume du cylindre circonscrit.

 L'aire de la surface d'une sphère est les deux tiers de l'aire de lasurface du cylindre circonscrit.

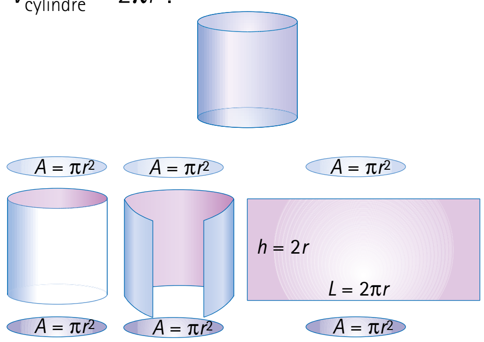
3. Archimède considérait que la méthode des leviers pouvait produire des résultats faux et que

la seule façon d'être assuré de la validité d'un résultat était d'en faire une démonstration par la méthode d'exhaustion.

4. Après avoir établi sa conjecture, il appliquait une double réduction à l'absurde pour montrer que l'aire ou le volume ne pouvait être ni plus grand ni plus petit que la valeur obtenue par la méthode des leviers.



5. a) Le volume d'un cylindre est donné par le produit de l'aire de sa base par sa hauteur, soit $V = \pi r^2 h$. Dans le cylindre considéré par Archimède, on a $h = 2r$. Le volume est donc $V_{\text{cylindre}} = 2\pi r^3$.



L'aire de la surface du cylindre est la somme de l'aire de la surface latérale et de l'aire des deux cercles constituant ses bases. L'aire de la surface latérale est le produit de la longueur de la circonférence par la hauteur, soit $A_{\text{latérale}} = 2\pi rh = 4\pi r^2$.

L'aire des bases est $A_{\text{bases}} = 2\pi r^2$.

L'aire du cylindre est donc :

$$\begin{aligned} A_{\text{cylindre}} &= A_{\text{latérale}} + A_{\text{bases}} \\ &= 4\pi r^2 + 2\pi r^2 = 6\pi r^2. \end{aligned}$$

b) Selon la relation établie par Archimède, le volume et l'aire de la surface du cylindre sont une fois et demie le volume et l'aire de la surface de la sphère. Ce qui signifie que le volume et l'aire de la surface de la sphère sont les deux tiers du volume et de l'aire de la surface du cylindre. On a donc :

$$V_{\text{sphère}} = \frac{2}{3} V_{\text{cylindre}} = \frac{2}{3} \times 2\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

$$\text{et } A_{\text{sphère}} = \frac{2}{3} A_{\text{cylindre}} = \frac{2}{3} \times 6\pi r^2 = 4\pi r^2.$$

6. Supposons que le rapport des aires est plus petit que le rapport des carrés des diamètres, soit :

$$\frac{A}{B} < \frac{a^2}{b^2}.$$

Dans le second cercle, inscrivons un polygone régulier dont l'aire diffère si peu de B que l'on a :

$$\frac{A}{B} < \frac{A}{P_2} < \frac{a^2}{b^2}.$$

Considérons de plus le polygone régulier semblable inscrit dans le premier cercle dont l'aire est P_1. Alors, puisque les polygones sont semblables, on a :

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{a^2}{b^2},$$

$$\text{d'où } \frac{A}{B} < \frac{A}{P_2} < \frac{a^2}{b^2} = \frac{P_1}{P_2} \quad \text{et} \quad \frac{A}{P_2} < \frac{P_1}{P_2}.$$

Puisque les dénominateurs sont égaux, on obtient $P_1 > A$, ce qui est une contradiction puisque l'aire du polygone régulier ne peut excéder l'aire du cercle circonscrit.