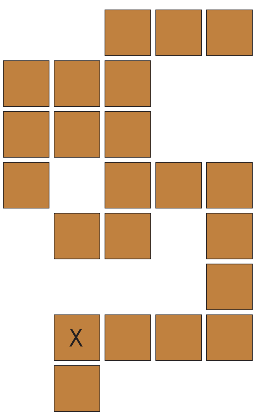
Section problèmes

Des dames sur d'étranges échiquiers

1. Prouver l'énoncé utilisé dans la preuve de Pólya. Généralement pour qu'une liste $(r_1, \ldots, r_n)$ soit une solution au problème des n dames sur un échiquier toroïdal, il faut et il suffit que :
   I. la liste $(r_1, \ldots, r_n)$ contienne tous les nombres de 1 à n, on dit donc que c'est une *permutation*;
   II. la liste
   $$((r_1 + 1) \bmod n, \ldots, (r_n + n) \bmod n)$$
   soit une permutation (avec $0 = n \bmod n$);
   III. la liste
   $$((r_1 - 1) \bmod n, \ldots, (r_n - n) \bmod n)$$
   soit une permutation (avec $0 = n \bmod n$).
2. Quelle est la borne supérieure équivalente pour le problème de domination des tours sur un polyomino de N cases? (Indice : quel serait alors le pavage nécessaire ?)
3. Que se passe-t-il si on essaie la même construction que dans l'article pour la figure ci-contre avec comme racine, le X?



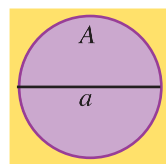
4. Que se passe-t-il si une des couleurs est vide dans la preuve du théorème d'Alpert-Roldán?
5. Le véritable théorème prouvé par Alpert et Roldán fonctionne en fait sur des polyominos de *dimension* d. Concentrons-nous sur $d = 3$ question de ne pas perdre l'intuition géométrique. Faut-il changer quelque chose à la preuve présentée pour qu'elle soit valide alors ?

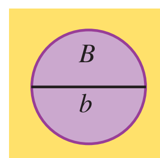
Indices

1. Vous parcourez une distance d que l'on divise en n parties égales parcourues aux vitesses respectives $v_1, \ldots, v_n$. Montrer que votre vitesse moyenne est
$$v = \frac{n}{\left(\frac{1}{v_1} + \cdots + \frac{1}{v_n}\right)}.$$
Ce nombre v est appelé la *moyenne harmonique* de $v_1, \ldots, v_n$.
2. Dans le cas de deux nombres positifs x_1 et x_2, montrer que leur moyenne arithmétique est toujours supérieure ou égale à leur moyenne géométrique, laquelle est supérieure à leur moyenne harmonique, et que ces trois moyennes sont toutes dans l'intervalle $[\min(x_1, x_2), \max(x_1 \text{ et } x_2)]$.

Comparaison d'aires

1. Expliquer en quoi consistait la méthode des leviers d'Archimède et indiquer quelques conjectures obtenus par cette méthode.
2. Quel est le principe fondamental de la méthode d'exhaustion selon la formulation d'Eudoxe? Illustrer numériquement ce postulat.
3. Pourquoi Archimède considérait-il que les résultats obtenus étaient simplement des conjectures qu'il fallait démontrer par exhaustion?





4. Décrire comment Archimède utilisait la méthode d'exhaustion pour démontrer des propriétés.
5. Archimède a montré que :
   Lorsqu'un cylindre est circonscrit à une sphère, le volume et la surface du cylindre sont une fois et demie le volume et la surface de la sphère.
   a) En utilisant le symbolisme moderne, déterminer les formules du volume et de l'aire de la surface du cylindre considéré par Archimède.
   b) En utilisant la relation établie par Archimède, déterminer les formules usuelles du volume et de l'aire de la surface de la sphère.
6. En supposant, comme l'a fait Archimède, que le rapport des aires est plus petit que le rapport des carrés des diamètres. Montrer que cela entraîne une contradiction.