Le déménagement miraculeux

Rubrique des **Paradoxes**

Jean-Paul Delahaye
Université des Sciences
et Technologies de Lille

Les âges des cinq habitants de la rue Kurt Gödel sont 8, 14, 20, 23 et 35 ; leur âge moyen est donc :

$$\frac{8+14+20+23+35}{5} = 20 \text{ ans.}$$

Les 6 habitants de la rue Alan Turing ont respectivement : 25, 30, 35, 40, 45 et 59 ans. Leur âge moyen est donc :

$$\frac{25+30+35+40+45+59}{6} = 39 \text{ ans.}$$

Jacques, qui habite la rue Gödel, a 35 ans. Il déménage et va habiter dans la rue Turing. Maintenant, l'âge moyen dans la rue Gödel est devenu :

$$\frac{8+14+20+23}{4} = 16{,}25 \text{ ans}$$

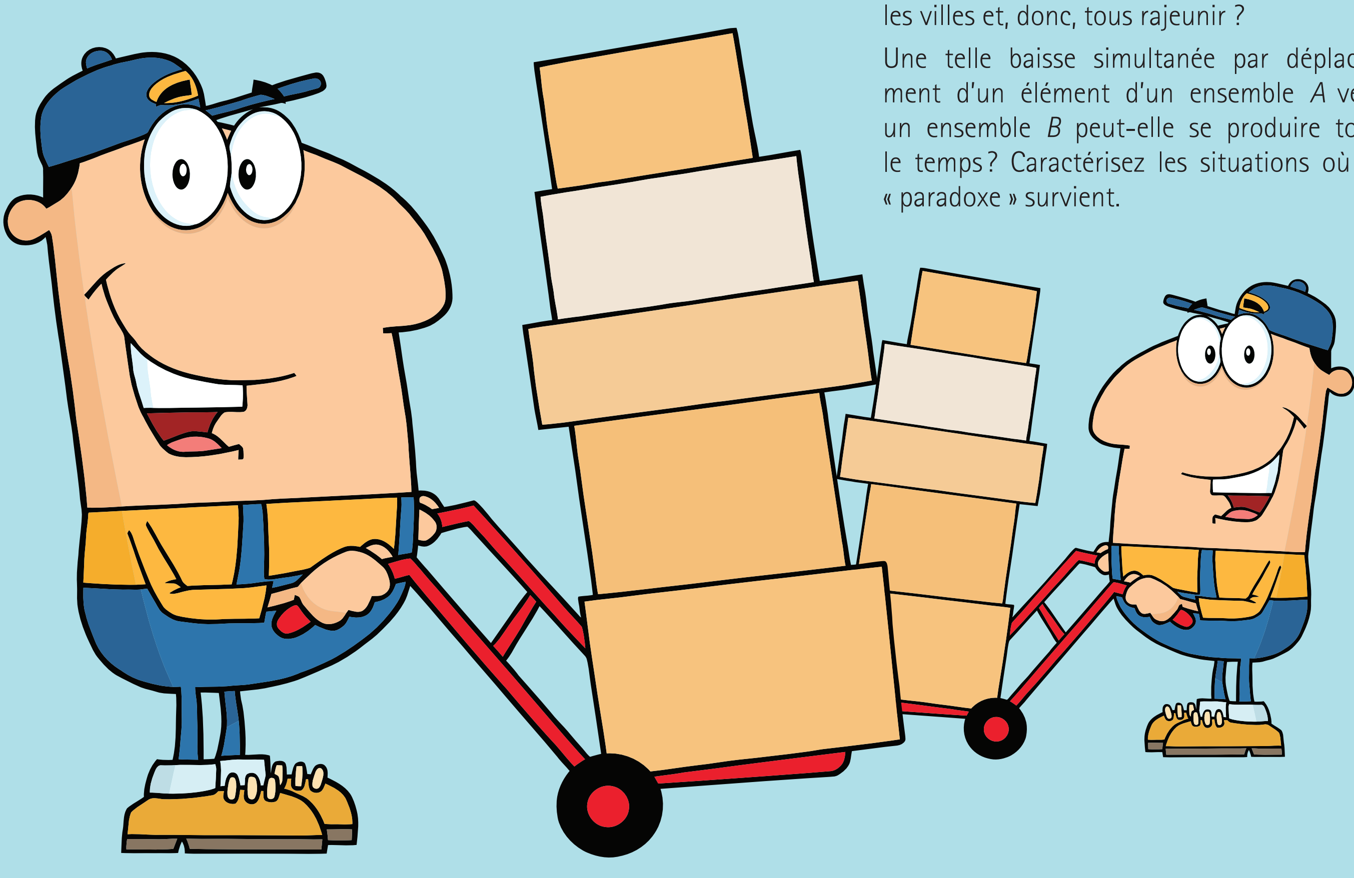
et l'âge moyen dans la rue Turing s'établit à :

$$\frac{25+30+35+35+40+45+59}{7} = 38{,}42 \text{ ans.}$$

Ne trouvez-vous pas paradoxal que les moyennes des âges dans les deux rues aient toutes les deux diminuées ?

En organisant des déménagements de ce type, ne pourrait-on pas alors faire baisser les âges moyens de toutes les rues dans toutes les villes et, donc, tous rajeunir ?

Une telle baisse simultanée par déplacement d'un élément d'un ensemble A vers un ensemble B peut-elle se produire tout le temps ? Caractérisez les situations où le « paradoxe » survient.



Solution du paradoxe précédent

Encore une histoire de chapeaux

Neuf joueurs portent des chapeaux dont la couleur est rouge, noire ou blanche. Chacun peut voir tous les autres chapeaux mais pas le sien. Les chapeaux ont été tirés au hasard à l'aide d'un dé (1 et 2 donnent noir, 3 et 4 donnent rouge, 5 et 6 donnent blanc). L'arbitre annonce que chaque joueur doit deviner la couleur de son chapeau en voyant les autres chapeaux, et que, si au moins trois d'entre eux donnent la bonne réponse, alors ils auront gagné un voyage à Londres tous ensemble. Les joueurs ont pu convenir d'une stratégie collective avant que les chapeaux soient disposés sur leurs têtes, mais ils donnent leur réponse simultanément sans avoir aucun échange entre eux une fois les chapeaux en place. En répondant au hasard, les joueurs auront une chance non négligeable de perdre. Précisément, ils perdent si 7, 8 ou 9 joueurs se trompent, ce qui se produit dans 37,7 % des cas. Même si cela vous semble paradoxal, ils peuvent réduire leur risque de perdre à 0, en convenant avant le jeu d'une stratégie astucieuse qui les fera gagner de manière certaine quelle que soit la répartition des chapeaux sur leur tête. Quelle est cette stratégie ?

Solution

Les joueurs se séparent en trois groupes de trois :

Groupe A : A_0 , A_1 , A_2 ,

Groupe B : B_0 , B_1 , B_2 ,

Groupe C : C_0 , C_1 , C_2 .

Dans chaque groupe, ils vont s'arranger pour que l'un d'eux donne la bonne réponse.

Attribuons un numéro à chacune des couleurs 0, 1 ou 2. Le joueur A_0 va jouer en proposant, pour son chapeau, la couleur telle que la somme des trois couleurs du groupe A fasse 0 ou 3 (c'est-à-dire 0 mod 3). Si, par exemple, il voit 1 et 1 pour les deux autres joueurs de son groupe, il parie 1 pour la couleur de son chapeau ; s'il voit 2 et 1, il parie 0 pour lui, etc.

Le joueur A_1 va jouer en proposant, pour son chapeau, la couleur telle que la somme des trois couleurs du groupe A fasse 1 ou 4 (c'est-à-dire 1 mod 3).

Le joueur A_2 va jouer en proposant, pour son chapeau, la couleur telle que la somme des trois couleurs du groupe A fasse 2 ou 5 (c'est-à-dire 2 mod 3).

L'un des trois aura correctement deviné la couleur de son chapeau, car la somme des trois couleurs du groupe A vaut

- soit 0 mod 3 (auquel cas A_0 aura bon),
- soit 1 mod 3 (auquel cas A_1 aura bon),
- soit 2 mod 3 (auquel cas A_2 aura bon).

Les joueurs du groupe B conviennent d'une méthode analogue, ainsi que ceux du groupe C. Dans chacun des groupes, un joueur devinera la couleur de son chapeau. Au total, trois joueurs (exactement) auront deviné la couleur et donc ils gagneront.