Dossier Applications

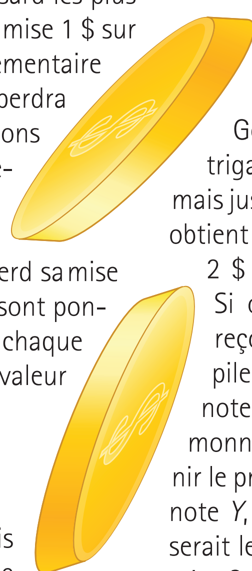
Le paradoxe de Saint-P

Pendant la pandémie, Georges s'est trouvé un nouveau passe-temps : il joue de l'argent virtuel dans des casinos en ligne. Il en profite pour faire quelques calculs à l'occasion afin de déterminer à quel point le casino propose des jeux qui lui sont favorables. Dans le cas d'un jeu étrange de pile ou face qui pourrait s'étirer à l'infini, Georges est toutefois médusé. Pour trancher son dilemme, il devra en fait résoudre le paradoxe de Saint-Pétersbourg.

Michel Adès
UQAM
Jean-François Plante
HEC Montréal
Serge B. Provost
Université Western Ontario

Pile ou face à l'infini

Considérons l'un des jeux de hasard les plus simples : pile ou face. Si Georges mise 1 \$ sur pile, alors il gagnera 1 \$ supplémentaire si la pièce tombe sur pile, mais perdra 1 \$ si on obtient plutôt face. Notons P le montant que le croupier remet à Georges à la fin du jeu. En pratique, soit Georges gagne un dollar de plus ($P = 2$), soit il perd sa mise ($P = 0$). En moyenne, ces valeurs sont pondérées par les probabilités de chaque événement, et on appelle cette valeur l'espérance de P notée par:

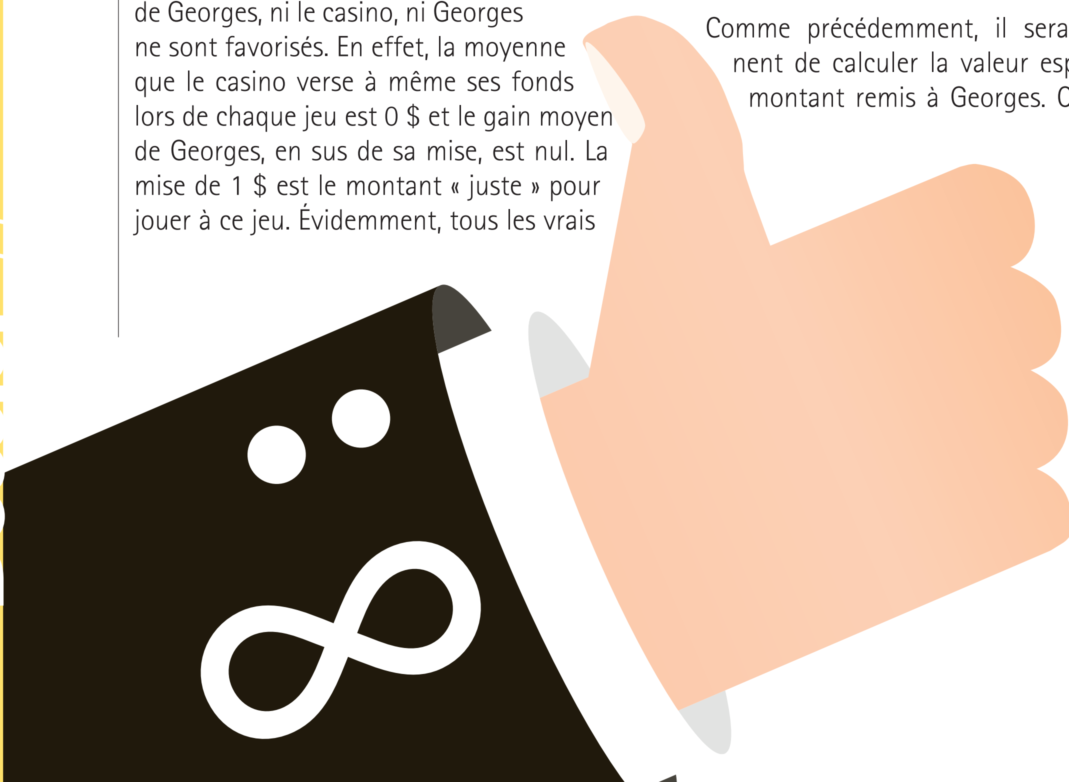


$$E(P) = 2 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{2} = 1$$

Comme le montant moyen remis par le croupier est égal à la mise de Georges, ni le casino, ni Georges ne sont favorisés. En effet, la moyenne que le casino verse à même ses fonds lors de chaque jeu est 0 \$ et le gain moyen de Georges, en sus de sa mise, est nul. La mise de 1 \$ est le montant « juste » pour jouer à ce jeu. Évidemment, tous les vrais casinos s'assurent que l'espérance joue en leur faveur, par exemple en demandant plus de 1\$ pour ce pari, ce qui leur garantit de faire des profits à long terme.

Georges s'intéresse à une variante intrigante du jeu. La même pièce est lancée, mais jusqu'à l'obtention du premier pile. Si on obtient pile au premier lancer, le joueur reçoit 2 \$ du croupier, comme précédemment. Si on obtient face, puis pile, le joueur reçoit alors 4 \$. Avec deux faces puis un pile, il reçoit 8 \$. De façon générale, on note X le nombre de lancers de la pièce de monnaie qui furent nécessaires afin d'obtenir le premier pile. Le montant remis, que l'on note Y, est alors égal à 2^X. Pour ce jeu, quel serait le montant juste que Georges pourrait miser?

Comme précédemment, il serait pertinent de calculer la valeur espérée du montant remis à Georges. On a une



étersbourg

chance sur deux d'avoir pile en partant. La probabilité d'obtenir face, puis pile, est de

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

De façon générale, la probabilité d'obtenir le premier pile au $x^{\text{ième}}$ lancer est de $\frac{1}{2^x}$.

Ainsi, l'espérance de l'argent remis par le croupier est maintenant:

$$\begin{aligned}E(Y) &= 2\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{4}+8\times\frac{1}{8}+\cdots\\ &= 1+1+1+\cdots,\end{aligned}$$

une somme qui diverge clairement vers l'infini! Georges devra-t-il miser un montant infini d'argent pour participer à un tel jeu?

Étant donné ce résultat mathématique, il serait nécessaire de disposer d'un temps infini et de réserves monétaires infinies de la part du casino, ce qui est paradoxal compte tenu de la limite de notre temps et la finitude de nos moyens. D'ailleurs, il est assez improbable que le jeu dure très longtemps. Regardons la probabilité de parties courtes:

$$\begin{aligned}P(X\le 2) &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4},\\ P(X\le 4) &= \frac{15}{16},\\ P(X\le 6) &= \frac{63}{64}.\end{aligned}$$

En général,

$$P(X\le x)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

Georges note alors que les longues parties sont très rares. Si X = 25, les 24 premiers essais furent face, et la probabilité d'un tel événement est alors

$$P(X=25)=\frac{1}{2^{25}}=\frac{1}{33\ 554\ 432}.$$

Imaginez une partie encore plus longue, par exemple de plus de 30 lancers, alors la probabilité de cet événement correspond à:

$$\begin{aligned}P(X>30) &= 1-P(X\le 30)\\ &= \frac{1}{1\,073\,741\,824}.\end{aligned}$$

Daniel Bernoulli (1700-1782)

Daniel Bernoulli a été dix fois récipiendaire du prix de l'Académie de Paris. L'ensemble de ses travaux est surtout en physique mais il a également apporté des contributions en mathématiques, en économie et en médecine.

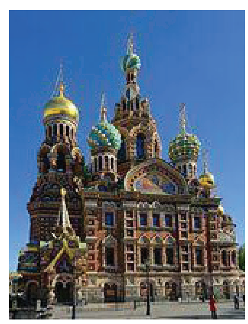
Avec une probabilité inférieure à un sur un milliard, on n'est pas près de voir cette partie survenir! Pourtant, peu importe la mise que Georges peut envisager, la théorie dicte que l'espérance du montant remis est $E(Y)=\infty$. Où se trouve alors le juste équilibre pour que le jeu soit équitable?

Daniel Bernoulli fut le premier, en 1738, à présenter un exposé sur ce paradoxe dans les *Transactions de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg*. Mais en réalité, ce paradoxe fut proposé à l'origine en 1713 par Nicolas Bernoulli, l'oncle de Daniel qui l'a repris et modifié. Depuis lors, ce problème est connu comme étant le *paradoxe de Saint-Pétersbourg*. L'historique du paradoxe et son aspect moderne sont savamment décrits par Peterson (2019) et Samuelson (1977).

Même Crésus n'est pas assez riche

Les casinos ne disposent pas d'une quantité infinie de fonds. Si un montant maximum est imposé aux gains, le montant gagné en moyenne sera nécessairement fini. Disons que le casino dispose de 1 000 000 $. Si on atteint 20 lancers ou plus, le montant originalement prévu au jeu excédera ce maximum puisque 2^{20} = 1 048 576. Dans ce cas, le montant remis en moyenne sera

$$\begin{aligned}E(Y) &= 2\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{4}+\cdots\\ &\quad +1\,000\,000\times P(X\ge 20)\\ &= 19+1000000\left(\frac{1}{2^{19}}\right)=20,91.\end{aligned}$$



Cathédrale Saint-Sauveur-sur-le-Sang-Versé de Saint-Pétersbourg

Le juste prix pour participer à ce jeu s'élèverait donc à 20,91$. De même, si le casino dispose de 1 000 000 000 $ qu'il est prêt à verser dans le cadre de ce jeu, il atteindra son plafond à 30 lancers, avec $2^{30} = 1\,073\,741\,824$, et alors:

$$\begin{aligned} E(Y) &= 29 + 1\,000\,000000\left(\frac{1}{2^{29}}\right) \\ &= 30,86. \end{aligned}$$

Pour permettre d'allonger le jeu, au-delà de 30 lancers, le casino devrait disposer d'une fortune colossale. Pour un chanceux obtenant le premier pile au centième lancer, il devrait verser la somme vertigineuse de $1,27 \times 10^{30}$ $, plus d'un quintillion de dollars. Cette somme dépasse largement toutes les richesses de la terre, estimées présentement à un demi billiard par le Crédit suisse.

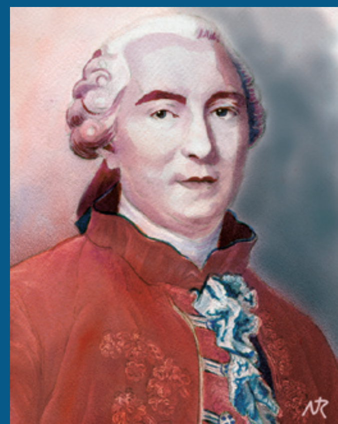
Le test empirique du Comte de Buffon

Georges-Louis Leclerc, comte de Buffon (1707-1788), connu pour l'estimation du nombre π par des lancers successifs d'une aiguille sur un plancher de lattes (Rousseau et Roy-Fortin, 2015). Il a également testé empiriquement le paradoxe de Saint-Pétersbourg[1]. Selon la rumeur, Buffon aurait engagé un enfant pour tirer à pile ou face, et il a enregistré les résultats de 2 048 parties. Les résultats sont reproduits au Tableau 1.

Un total de 20 114 $ aurait ainsi été versé aux joueurs, ce qui revient à 9,82 $ en moyenne par partie.

Nombre de lancers (k)	Gain (2^k)	Nombre d'occurences	Pourcentage
1	2	1 061	0,518
2	4	494	0,241
3	8	232	0,113
4	16	137	0,067
5	32	56	0,027
6	64	29	0,014
7	128	25	0,012
8	256	8	0,004
9	512	6	0,003
Total		2 048	1,000

Tableau 1: Les données de l'expérience de Buffon, telles que rapportées dans sa publication de 1777.



Georges-Louis Leclerc, comte de Buffon (1707-1788)

Le comte de Buffon est un naturaliste, mathématicien, biologiste, cosmologiste, philosophe et écrivain français.

L'expérience de Buffon est *stochastique* (aléatoire) : si on la répète, on n'obtient pas exactement la même valeur à chaque fois. De nos jours, les ordinateurs permettent de la répéter très rapidement, à de nombreuses reprises, sans avoir recours au travail d'enfants ! Le Tableau 2 présente d'ailleurs les quantiles des montants moyens obtenus en répétant l'expérience de Buffon 100 000 fois. La moyenne de ces 100 000 gains moyens est de 28,08 $. Évidemment, même avec un très grand nombre d'expériences, il demeure improbable d'observer les événements très rares qui eux, coûtent très cher au casino.

En répétant la simulation originale de Buffon, on constate qu'une valeur de 9,82 $ est somme toute assez petite. En effet, seulement 7 543 des 100 000 expériences ont conduit à un retour moyen aussi petit.

1. *Il existe des variations dans la description du Paradoxe de Saint-Pétersbourg. Dans les écrits originaux de Buffon, il semble que le paiement au joueur était de 2^{x-1} s'il obtenait un premier face au lancer x, alors que nous utilisons une remise de 2^x si on obtient le premier pile au lancer x. Ces variations par rapport à la décision ne changent en rien la nature du paradoxe.*

Quantiles								
Min	1 %	5 %	25 %	50 %	75 %	95 %	99 %	Max
7,26	8,65	9,51	11,37	13,61	18,15	44,43	145,41	131 081,33

Tableau 2:
Quantiles du gain moyen obtenus dans le cadre de 100 000 expériences de Buffon comportant chacune 2 048 parties.

Le combat des infinis

Dans son expérience, le comte de Buffon a observé une cagnotte maximale de 512 $. Pourtant, en répétant son expérience 100 000 fois, nous avons généré un total de $100\,000 \times 2\,048 = 204\,800\,000$ parties comportant davantage d'événements rares, notamment une séquence de 28 lancers conduisant à un prix d'un quart de milliard! C'est dans cet esprit que William Feller (1906-1970), un des grands probabilistes du 20e siècle, propose de tenir compte du nombre de fois où le jeu sera joué. En effet, plus on joue souvent, plus on sera certain d'observer des événements coûteux. Pour arriver à sa réponse, il considère même un nombre infini de parties!

Après n parties, notons S_n le montant cumulatif gagné par le joueur et e_n le total des mises qu'il a effectuées à date. Plutôt que de référer au gain moyen, que nous savons infini, il est possible de regarder le ratio des sommes gagnées et misées. *Même si ces deux sommes vont vers* l'infini, leur ratio, lui, peut être maîtrisé. Pour que le jeu soit équitable s_n/e_n doit tendre vers 1 lorsque $n \to \infty$.

Grâce à des opérations mathématiques et à la loi faible des grands nombres, les mathématiciens Feller, Gorroochurn et Székely démontrent que le choix de mise donné par $e_n = n \log_2 n$ permet d'obtenir un quotient s_n/e_n qui tend vers 1, lorsque $n \to \infty$, plus précisément:

$$\text{pour tout } \varepsilon > 0, P\left(\left|\frac{s_n}{e_n} - 1\right| > \varepsilon\right) \to 0$$

lorsque $n \to \infty$.

William Feller (1906-1970)

Mathématicien croate, né à Zagreb, naturalisé américain, spécialiste de la théorie des probabilités.

Le Tableau 3 donne une indication de la mise requise pour chaque partie, selon le nombre de parties jouées de manière consécutive. Évidemment, il est peu probable de trouver un casino solvable et suffisamment déraisonnable pour se lancer dans de tels paris!

L'argent n'a pas la même valeur pour tous

Un lot de 100 000 $ fait rêver la plupart des gens, mais pour les milliardaires, il en va autrement. Dans les approches précédentes, la valeur de l'argent était la même pour le casino et le joueur, mais en pratique, le capital n'a pas la même *utilité* pour tous. En laissant de côté les bénéfices possibles générés pour le casino, peut-on mesurer l'importance des gains possibles du point de vue du joueur?

Nombre de parties	5	10	20	50	100	200	500	1000
Mise par partie	2,32$	3,32$	4,32$	5,64$	6,64$	7,64$	8,96$	9,96$

Tableau 3:
Mise équitable par nombre de parties selon Feller.

Suivant la pensée de Daniel Bernoulli, si le capital c s'accroît par dc, alors l'accroissement de l'utilité est inversement proportionnel au capital. En termes mathématiques, on peut représenter ce principe par une équation différentielle liant l'utilité (u) au capital (c):

$$du = k\frac{dc}{c},$$

qu'il est possible d'intégrer pour trouver

$$u(c) = k\ln(c) + \text{ constante.}$$

Pour fin d'illustration, on peut fixer la constante d'intégration à 0 et choisir $k = 1$, ce qui donne $u(c) = \ln(c)$, une fonction qui croît plutôt lentement.

Revenons à notre jeu de hasard. Même s'il est possible d'atteindre des cagnottes considérables, l'utilité que Georges pourra en tirer connaîtra certaines limites. Un montant juste pourrait ainsi être établi au montant d'argent dont l'utilité pour Georges correspond à l'utilité moyenne de son gain. Comme $u(c)$ croît lentement, l'espérance de l'utilité pourrait être finie, même si l'espérance du gain lui-même diverge vers l'infini. En effet, si C est la variable aléatoire donnant le capital gagné, alors l'espérance de l'utilité correspondante est donnée par:

$$\begin{aligned} E\{u(c)\} &= \sum_{c=1}^{\infty}\ln(2^c)P(C=c) \\ &= \sum_{c=1}^{\infty}\ln(2^c)2^{-c} \\ &= \ln(2)\sum_{c=1}^{\infty}c2^{-c} \\ &= 2\ln(2) < \infty. \end{aligned}$$

on admettra sans preuve la toute dernière égalité[2].

2. *Pour les plus ambitieux, cette preuve peut être obtenue en dérivant une série géométrique et l'expression de sa somme.*

Pour Georges, l'utilité moyenne du jeu correspond à un montant M qui peut être trouvé en résolvant:

$$u(M) = E\{u(C)\} = 2\ln(2).$$

Comme $u(M) = \ln(M)$, alors

$$M = e^{2\ln(2)} = 2^2 = 4,$$

et Georges pourrait miser jusqu'à 4 \$. Le Tableau 4 (page suivante) présente une partie du calcul de cette espérance.

Notez que la somme cumulative de l'espérance de l'utilité du gain converge vers $2\ln(2) = 1{,}386\,294$. Il est intéressant de noter que les montants astronomiques mais improbables contribuent peu à l'utilité espérée. Même si le casino limitait les parties à 10 lancers pour éviter la faillite, le joueur serait déjà prêt à payer $e^{1{,}373\,442} = 3{,}95$ \$. À 15 lancers, on arrondit déjà à 4 \$.

Le montant proposé de 4 \$ convient à Georges, en autant que sa fonction d'utilité soit $u(c) = \ln(c)$. Pour un autre individu, le montant sera différent. Disons que pour Gisèle,

$$u(c) = \begin{cases} c & \text{si } c \le 2^{19} \\ 2^{19} + \log_2(c/2^{19}) & \text{si } c > 2^{19} \end{cases}$$

Alors la mise équitable pour elle sera d'environ 20 \$. En effet, en développant et en simplifiant les sommes, on peut trouver

$$\begin{aligned} E\{u(c)\} &= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{u(2^i)}{2^i} \\ &= \sum_{i=1}^{19}\frac{2^i}{2^i} + \sum_{i=20}^{\infty}\left[\frac{2^{19}+\log_2(2^i/2^{19})}{2^i}\right] \\ &= 19 + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i} + 2^{-19}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\log_2(2^i)}{2^i} \\ &= 20 + 2^{-19}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{2^i} = 20 + 2^{-18}. \end{aligned}$$

$n^{\text{ième}}$ lancer	Probabilité d'obtenir face au $n^{\text{ième}}$ lancer	Gain	Utilité du gain	Contribution à l'espérance de l'utilité du gain	Somme cumulative de l'espérance del'utilité
1	1/2	2 $	0,693 147	0,346 573	0,346 573
2	1/4	4 $	1,386 294	0,346 573	0,693 146
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10	1/1024	1 024 $	6,931 471	0,006 769	1,373 442
11	1/2048	2 048 $	7,624 618	0,003 722 9	1,380 198
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
15	1/32 768	32 768 $	10,397 20	0,000 317 2	1,385 930
16	1/65 536	65 536 $	11,090 35	0,000 169 2	1,386 100
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
20	1/1 048 576	1 048 576 $	13,862 94	0,000 013 22	1,386 275

Tableau 4:
Espérance de l'utilité du gain.

On vient d'utiliser des changements de variables pour les sommes et les propriétés assez connues des sommes géométriques selon lesquelles :

pour $0 \leq a < 1$, $\sum_{i=1}^{\infty} a^i = 1/(1-a)$ et

$$\sum_{i=1}^{\infty} ia^i = a/(1-a)^2.$$

Selon la fonction d'utilité, les calculs peuvent s'avérer plus ou moins compliqués. Bien souvent, un calcul numérique pourrait également s'avérer adéquat. En économie, des approches empiriques ont d'ailleurs été développées pour ***éliciter*** la fonction d'utilité d'un individu, permettant ainsi de la déterminer grâce à un certain nombre de questions.

Conclusion

Le paradoxe de Saint-Pétersbourg est l'un de plus marquants en théorie des jeux, et ses conséquences en économie ont été largement étudiées. À travers le temps, plusieurs mathématiciens de renom ont contribué à la discussion, notamment Euler en découvrant une des propriétés de ce qu'on appelle aujourd'hui la fonction d'utilité (Euler 1862) et von Neumann. En outre, von Neumann a développé la théorie de l'utilité espérée qui a résolu de nombreuses particularités liées au comportement des gens en regard de l'incertitude.

En mathématiques, il est souvent plus simple de résoudre un problème pour des éléments infiniment petits ou infiniment grands. Ces outils très élégants, dits *asymptotiques*, sont d'une utilité indéniable. Le paradoxe de Saint-Pétersbourg nous rappelle toutefois que nous vivons dans un monde fini, avec un temps et des ressources finis, du moins à l'échelle humaine. Parfois, une solution pratique doit tenir compte de cette finitude !

En cherchant davantage (*En savoir +*), Georges note que des articles scientifiques récents se penchent encore sur le paradoxe de Saint-Pétersbourg en proposant d'autres approches à sa résolution. Le constat que cette énigme fait encore couler beaucoup d'encre de nos jours, inspire Georges qui se met à rêver à une façon moderne d'illustrer le paradoxe afin de partager son savoir avec les masses sur les réseaux sociaux. Saura-t-il en faire un TikTok viral ? (*En savoir +*)