Été–automne 2021 Solutions

Euler et le problème de Bâle

1. Samuel Moreno, professeur de mathématiques à l'Université de Jaén en Espagne, propose de procéder comme suit pour démontrer l'identité au moyen d'outils élémentaires.

Le problème de Bâle porte sur la somme exacte des réciproques des carrés des entiers positifs, soit :

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Pour démontrer ce résultat, nous utilisons l'identité trigonométrique bien connue

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=\frac{\sin(nx+x/2)}{2\sin(x/2)} \qquad (1)$$

pour $n \geq 0$, pour $x \in \mathbb{R}$ (lorsque $x = 2m\pi$, avec $m \in \mathbb{Z}$, le membre de droite doit être pris comme sa valeur limite).

Le deuxième élément crucial de cette preuve est le théorème de la valeur moyenne pour les intégrales.

Si $f:[a,\ b]\to\mathbb{R}$ est continue sur $[a,\ b]$ et $g:[a,\ b]\to\mathbb{R}$ est intégrable et non négative sur $[a, b]$ alors, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Solution

En multipliant (1) par $x^2 - 2\pi x$, et en intégrant sur l'intervalle $[0, \pi]$ (utiliser l'intégration par parties si nécessaire), et ensuite en appliquant le théorème de la valeur moyenne pour les intégrales, on obtient

$$-\frac{\pi^3}{3}+\sum_{k=1}^{n}\frac{2\pi}{k^2}$$

$$=\int_0^{\pi}\underbrace{(x-2\pi)\frac{x/2}{\sin(x/2)}}_{u}\underbrace{\sin(nx+x/2)dx}_{dv}$$

$$=\left.\underbrace{(x-2\pi)\frac{x/2}{\sin(x/2)}}_{u}\underbrace{\frac{-\cos(nx+x/2)}{n+1/2}}_{v}\right]_0^{\pi}$$

$$-\int_0^{\pi}\underbrace{\frac{-\cos(nx+x/2)}{n+1/2}}_{v}\underbrace{\frac{du}{dx}dx}_{du}$$

$$=\frac{-2\pi}{n+1/2}+\frac{\cos((nx+x/2)c_n)}{n+1/2}\int_0^{\pi}\frac{du}{dx}dx,$$

où $(c_n \in [0,\pi])$. Ainsi

$$=\frac{-2\pi+(u(\pi)-u(0)\cos((n+1/2)c_n)}{n+1/2}$$

$$=\frac{-2\pi+(2\pi+\pi^2/2)\cos((n+1/2)c_n)}{n+1/2},$$

et en prenant la limite lorsque n tend vers l'infini, on a

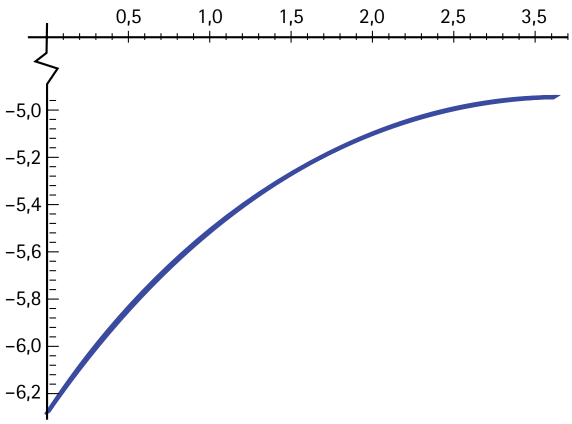
$$-\frac{\pi^3}{3}+\sum_{k=1}^{n}\frac{2\pi}{k^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2\pi(2\pi+\pi^2/2)\cos((n+1/2)c_n)}{n+1/2}=0,$$

ce qui, après quelques réarrangements, donne

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

En considérant l'utilisation du théorème de la valeur moyenne pour une intégrale, on remarque que du/dx est non négatif sur $[0, \pi]$ puisque c'est le produit de deux fonctions croissantes



$$u_1(x) = x - 2\pi \text{ et } u_2(x) = \frac{x/2}{\sin(x/2)}.$$

De plus, on prouve facilement (1) si on multiplie par sin(x/2) et que l'on utilise l'identité

cos *a* sin *b* =(sin(*a* + *b*) − sin(*a* − *b*))/2.

Ordre et désordre

1. Des suites croissantes de longueur 1 peuvent exister (ce sont les plus petites suites possibles). Il s'agit alors d'une carte dont les voisins dans la suite originale ont été envoyés de part et d'autre. Dans l'exemple de l'article, la première suite croissante est composée de l'as, du 2 et du 3 de pique. Pour sa part, le 4 de pique a déjà été déplacé à la gauche du 3 de pique. Si on échangeait les positions du 2 et du 3 de pique, le trois de pique formerait une suite croissante de longueur 1. Plusieurs exemples de suites croissantes minimales se trouvent dans la solution du deuxième problème.
2. En supposant que le paquet était initialement comme dans l'article (dans l'ordre: pique, carreau, trèfle, coeur, puis de l'as au roi dans chaque suite), on trouve 25 suites croissantes: A♠; 2, 3♠; 4, 5, 6♠; 7, 8, 9♠; 10♠; J, Q, K♠ et A, 2♦; 3♦; 4, 5♦; 6, 7♦; 8♦; 9, 10♦; J, Q♦; K♦; A♣; 2♣; 3, 4♣; 5, 6♣; 7, 8♣; 9, 10, J, Q♣; K♣ et A, 2♥; 3, 4, 5, 6, 7♥; 8♥; 9♥; 10, J♥; Q, K♥.