Été–automne 2021
Solutions

Le partage équitable

1. Si Maryam balaie le gâteau de gauche à droite, au départ, la position des couteaux correspond à lui donner la partie gauche du gâteau. Soit M_c la portion de droite du gâteau dont hérite Caucher. Si $v_c(M_c) = 1/2$ ce découpage est une solution. Sinon, supposons qu'à cette position $v_c(M_c) < 1/2$. Alors, lorsque Maryam a fini de balayer le gâteau, elle hérite de M_c et Caucher de la portion M_m que Maryam avait au départ. Comme cette portion est le complémentaire de M_c, alors $v_c(M_m) > 1/2$. Par le théorème de la valeur intermédiaire, il existe entre les deux extrêmes une position où la portion de Caucher a pour lui valeur 1/2.

   De même si $v_c(M_c) > 1/2$.

2. On utilise les mêmes notions que dans l'article « Partage équitable bis ». Chacun n'est pas jaloux si la valeur de son morceau (pour sa fonction valeur) est inférieure ou égale à la valeur des morceaux des autres.

   Le morceau de droite va à la personne qui a crié « Stop ! ». Le morceau du milieu va à celle des deux autres personnes dont le couteau est le plus à droite, donc le plus loin du sabre, et le morceau de gauche va à la dernière personne. Appelons M_g le morceau de gauche, M_m, celui du milieu et M_d, celui de droite.

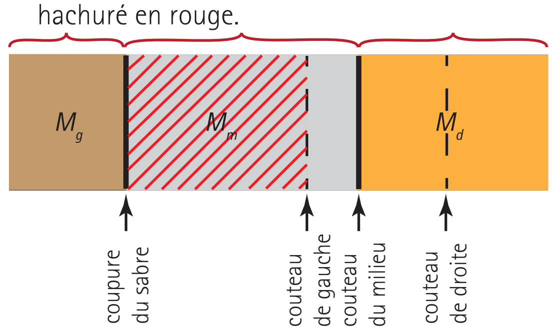
   Première partie de la stratégie :

   Chaque personne place son couteau de telle sorte que le morceau de gauche ait, pour elle, la même valeur que le morceau entre le sabre et son couteau.

   Lorsque les personnes déplacent leur couteau, à tout instant leurs couteaux sont ordonnés de gauche à droite et, pour simplifier, supposons que les positions des couteaux sont distinctes.

   Appelons première personne, celle dont le couteau est le plus à gauche, avec fonction de valeur v_1, deuxième personne, celle dont le couteau est au milieu, avec fonction de valeur v_2, et troisième personne, celle dont le couteau est à droite, avec fonction de valeur v_3.

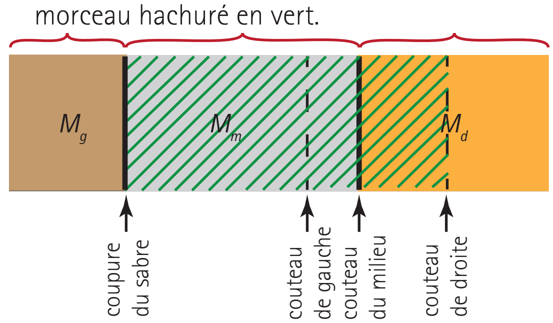
   Ainsi sur la figure ci-dessous, M_g a la même valeur pour la première personne que le morceau hachuré en rouge.



   Donc,

   $$v_1(M_g) = v_1(\;) < v_1(M_m) \qquad (*)$$

   De même sur la figure ci-dessous, M_g a la même valeur pour la troisième personne que le morceau hachuré en vert.



   Donc,

   $$v_3(M_g) = v_3(\;) > v_3(M_m) \qquad (**)$$

Deuxième partie de la stratégie :

La première personne crie « Stop ! » quand, pour elle, la valeur de M_g devient égale à la valeur de M_d.

La deuxième personne crie « Stop ! » quand les deux coupures divisent en trois portions d'égale valeur pour elle, c'est-à-dire

$$v_2(M_g) = v_2(M_m) = v_2(M_d).$$

La troisième personne crie « Stop ! » quand, pour elle, la valeur de M_m devient égale à la valeur de M_d.

Vérifions que, quelle que soit la personne qui crie « Stop ! » avant les autres, aucune n'est jalouse des autres.

La première personne crie « Stop ! » :

Pour elle, $v_1(M_m) > v_1(M_g) = v_1(M_d)$ par (*). Donc, elle n'est pas jalouse de recevoir M_d.

Pour la deuxième personne,

$$v_2(M_g) = v_2(M_m) < v_2(M_d),$$

puisqu'elle n'a pas crié « Stop ! ». Donc, elle n'est pas jalouse de recevoir M_g.

Quant à la troisième personne,

$$v_3(M_m) < v_3(M_g) < v_3(M_d), \text{ par (**)},$$

puisqu'elle n'a pas crié « Stop !. Donc, elle n'est pas jalouse de recevoir M_m.

La deuxième personne crie « Stop ! » :

Pour la première personne,

$$v_1(M_g) < v_1(M_d),$$

puisqu'elle n'a pas crié « Stop ! » et $v_1(M_g) < v_1(M_m)$ par (*).

Donc, elle n'est pas jalouse de recevoir M_g.

Pour la deuxième personne,

$v_2(M_g) = v_2(M_m) = v_2(M_d)$. Donc, elle n'est pas jalouse de recevoir M_d.

Quant à la troisième personne,

$$v_3(M_m) < v_3(M_g) < v_3(M_d),$$

puisqu'elle n'a pas crié « Stop ! », et par (**). Donc, elle n'est pas jalouse de recevoir M_m.

La troisième personne crie « Stop ! » :

Pour la première personne,

$$v_1(M_g) < v_1(M_d),$$

puisqu'elle n'a pas crié « Stop ! » et

$$v_1(M_g) < v_1(M_m) \text{ par (*)}.$$

Donc, elle n'est pas jalouse de recevoir M_g.

Pour la deuxième personne,

$$v_2(M_g) = v_2(M_m) < v_2(M_d),$$

puisqu'elle n'a pas crié « Stop ! ». Donc, elle n'est pas jalouse de recevoir M_m.

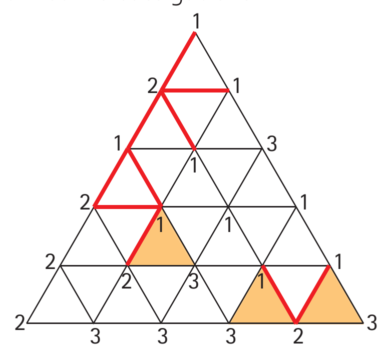
Quant à la troisième personne,

$$v_3(M_m) = v_3(M_d) < v_3(M_g),$$

puisqu'elle a crié « Stop ! », et par (**). Donc, elle n'est pas jalouse de recevoir M_d.

3. La solution est la même que celle de l'encadré dans l'article « Partage équitable bis ». On appelle « porte » tout segment joignant deux segments d'exprémités annotées 1 et 2. Un triangle annoté 1, 2 et 3 est un triangle qui a exactement une porte.

Remarquons qu'on a un nombre impair de portes sur la frontière car on part de 1 et on arrive à 2 sur le côté gauche.



Faisons la somme sur tous les triangles du nombre de portes associées à chaque triangle (une porte est comptée deux fois si elle est entre deux triangles). Alors, ce nombre est impair car on a un nombre impair de portes sur la frontière et que chaque porte intérieure est comptée deux fois. Donc, on a au moins un triangle qui a exactement une porte.

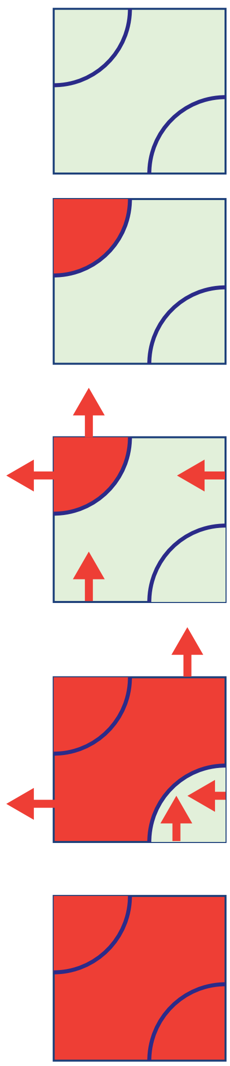
Mappemonde

1. Les classes d'équivalence sont

$$(-1, y) \sim (1, y)$$
$$(x, -1) \sim (x, 1)$$

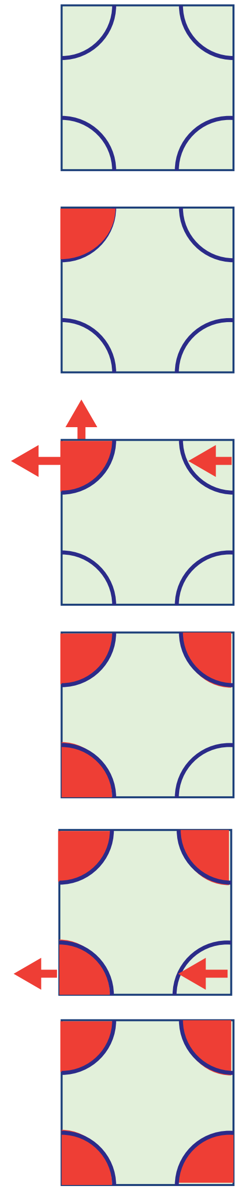
Les autres points sont seuls dans leur classe d'équivalence.

2. Nous utiliserons le fait que le bord de droite et de gauche sont en fait recollés et qu'il en est de même pour celui du haut et du bas. Procédons en répandant de la couleur dans une zone et en la laissant se propager à travers les bords.



Il n'y a donc qu'une seule zone délimitée par cette courbe sur le tore.

On procède de façon analogue pour la seconde courbe, on obtient alors :



Deux zones sont délimitées par la courbe. Remarquons qu'on aurait pu arriver à la même conclusion en translatant la courbe vers la gauche et vers le bas, montrant ainsi qu'il s'agit simplement d'un cercle qui coupe bien la forme en deux.

3, Nous obtenons un tore à deux trous.

Cette photo par auteur inconnu est soumise à la licence CC BY-SA.

On peut observer la démarche à l'adresse https://www.youtube.com/watch?v=G1yyfPShgqw