Section problèmes

Euler et le problème de Bâle[1]

1. Voici comment on peut démontrer l'identité $\varsigma(2) = \pi^2/6$ au moyen d'outils élémentaires.

   a) Montrer l'identité trigonométrique

   $$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=\frac{\sin(nx+x/2)}{2\sin(x/2)},$$

   valable pour tout réel x, avec la convention que le membre de droite est compris au sens de la limite lorsque le dénominateur s'annule.

   Suggestion : multiplier par $\sin(x/2)$ et utiliser le fait que

   $$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)).$$

   b) Multiplier par $x^2 - 2\pi x$ de chaque côté de l'identité donnée en a). Puis, intégrer de chaque côté sur l'intervalle $[0, \pi]$. Montrer, en intégrant par parties, que le membre de gauche vaut

   $$-\frac{\pi^3}{3}+\sum_{k=1}^{n}\frac{2\pi}{k^2}.$$

   c) Vérifier que le résultat suit si on peut montrer que l'intégrale du membre de droite tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

   d) Le membre de droite n'a pas de primitive élémentaire. Mais, poser

   $$u=\frac{x^2-2\pi x}{2\sin(x/2)},\qquad v'=\sin\left(nx+\frac{x}{2}\right),$$

   et intéger une fois par parties. Voir que

   $$uv\big]_0^\pi=-\frac{2\pi}{n+1/2}.$$

   Dans la partie $-\int_0^\pi u'v\,dx$, voir que u' est bornée par une constante C (ce qui demande d'étudier la limite quand $x\to 0$) et que v est majorée par $1/(n+1/2)$.

   En déduire que l'intégrale du membre de droite de l'identité trigonométrique de départ tend vers 0 quand $n\to\infty$.

1. Cette démonstration s'inspire de celle donnée par Samuel Moreno dans un article paru en 2016 dans « The College Mathematics Journal », vol. 47, no 2, pp. 134-135.

Ordre et désordre

1. Quelle est la longueur minimale d'une suite croissante de cartes[2]? Montrer comment échanger des cartes de l'exemple de cet article pour créer une suite de longueur minimale.
2. Identifier les suites croissantes de cartes et leur nombre[2] dans l'illustration à gauche.

2. Une suite croissante est définie dans l'encadré « Algorithmes de mélange » de l'article « Ordre et désordre ».