Les deux paires de chaussettes

Rubrique des **Paradoxes**

Jean-Paul Delahaye
Université des Sciences
et Technologies de Lille

Il fait froid, Lucien a décidé de mettre deux paires de chaussettes (l'une est rouge et l'autre est noire). Lucien sait qu'elles sont rangées dans son tiroir qui ne contient rien d'autre. Il fait nuit et, pour ne pas déranger, il n'allume pas la lumière. Il met ses chaussettes au hasard. Lucien n'aura pas à les enlever et à les remettre une seconde fois dans la cuisine si chaque pied porte deux chaussettes différentes dans le même ordre, par exemple une rouge en dessous et une noire au-dessus à chaque pied.

Lucien se demande quelle est la probabilité pour qu'il réussisse du premier coup à mettre ses 4 chaussettes d'une façon convenable ?

Raisonnement 1

Lucien prend une chaussette au hasard, il la met à son pied droit. Il en prend une seconde, il la met à son pied droit par-dessus la première. Tout sera correct à cet instant si la seconde chaussette – prise parmi trois – n'est pas la jumelle de celle mise en premier. Cela se produira deux fois sur trois (car la chaussette jumelle de celle déjà enfilée est l'une des trois qui restent). Ensuite, il met à son pied gauche une troisième chaussette (prise parmi deux différentes). Elle doit être la jumelle de celle mise en premier à droite, cela se produira une fois sur deux. La dernière sera alors nécessairement convenable.

En tout, la probabilité de réussir est donc $P = 2/3 \times 1/2 = 1/3$.

Raisonnement 2

Lucien prend deux chaussettes au hasard et les met à son pied droit. Il faut qu'elles soient différentes. Les choix possibles sont rouge-rouge, noire-noire, rouge-noire, noire-rouge. Lucien a donc une chance sur deux de mettre ses deux chaussettes sans s'engager vers une configuration insatisfaisante. Ensuite, il doit mettre les deux autres chaussettes (qui sont de couleurs différentes) dans le bon ordre, et cela donnera quelque chose de convenable une fois sur deux.

Lucien réussira donc une fois sur quatre : $P = 1/4$.

Raisonnement 3

Lucien prend deux chaussettes au hasard et en met une à droite, l'autre à gauche. Pour que cela ne l'engage pas vers une mauvaise configuration, il faut que les deux chaussettes choisies soient de la même couleur. Les possibilités sont rouge-rouge, noire-noire, rouge-noire, noire-rouge. Donc une configuration convenable se produira une fois sur deux. Si c'est le cas, les deux autres chaussettes seront aussi convenablement placées.

La probabilité de réussir est donc 1/2 : $P = 1/2$.

Voilà qui est étrange et paradoxal : la probabilité de réussir ne peut pas être à la fois 1/4, 1/3 et 1/2. Quel raisonnement est bon ? Expliquez alors pourquoi les deux autres sont faux. Autre possibilité : ils sont tous bons, car la probabilité de réussir dépend de la procédure qu'on utilise et la conclusion doit donc être qu'il faut utiliser la troisième méthode puisqu'elle me donne une chance sur deux de réussir ce qui est le mieux.

Solution du paradoxe précédent

Le congrès des myopes

Au congrès annuel des myopes, un jeu est organisé avec 11 des congressistes. Après que ceux-ci ont convenu de la stratégie qu'ils allaient utiliser, l'arbitre dispose les joueurs en cercle et pose un chapeau noir ou rouge sur leur tête :

- Le myope 1 voit le chapeau du myope 11 et lui seulement ;
- Le myope 2 voit le chapeau du myope 1 et lui seulement ;
- ...
- Le myope 11 voit le chapeau du myope 10 et lui seulement.

Simultanément, les 11 myopes indique la couleur du chapeau qu'il pense porter et les 11 joueurs gagnent l'accès gratuit au congrès suivant si l'un d'eux, au moins, donne la bonne réponse.

En répondant au hasard, ils ont peu de chance de perdre, mais l'arbitre a pu les espionner pendant qu'ils parlaient avant l'épreuve et il est possible qu'il exploite ce qu'il a entendu pour les faire perdre. Pourtant, même dans un tel cas, les 11 joueurs sont certains de gagner. Quelle stratégie ont-ils convenu qui assure à 100 % que l'un d'eux (au moins) proposera la bonne couleur pour le chapeau qu'il porte ?

Un second problème est posé:

- Prouver que si l'un des myopes est en réalité un aveugle alors, cette fois, aucune stratégie convenue à l'avance ne peut fonctionner dans 100 % des cas.

Solution

Une stratégie gagnante à tous coups pour l'équipe de myopes est la suivante. Le premier myope (ou l'un des myopes choisi une fois pour toutes) indique la couleur qu'il voit devant lui. Les autres indiquent la couleur inverse de celle qu'ils voient devant eux. De deux choses l'une :

a) Tous les chapeaux ont la même couleur. Dans ce cas, le premier myope a deviné la couleur de son chapeau.

b) Les couleurs ne sont pas toutes identiques. Dans ce cas, il existe au moins deux myopes qui ont devant eux un chapeau différent du leur, l'un au moins n'est pas le premier myope et donc devine la couleur de son chapeau.

Le raisonnement pour le second problème consiste à créer une distribution de chapeaux qui fasse perdre tous les joueurs en commençant par l'aveugle. Il est un peu trop compliqué pour l'espace de cette rubrique, vous le trouverez détaillé en :

http://www.lifl.fr/~jdelahay/LNA/LNA54.pdf

Notez que cette stratégie fonctionne avec un nombre pair ou impair de joueurs.